Analyse numérique de la diffraction d'ondes électromagnétiques par une structure périodique courbe. Cas de l'équation de Helmholtz*

Toufic Abboud Habib Ammari † P. Ferreira ‡

Centre de Mathématiques Appliquées, CNRS URA 756,
École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

Résumé : On s'intéresse à l'approximation numérique de la diffraction d'ondes par des structures courbes périodiques. On donne une méthode qui repose sur un résultat d'approximation par une structure périodique plane de type optique géométrique permettant de localiser et d'accélérer les calculs des champs diffractés par des structures périodiques courbes.

1 Introduction et énoncé des principaux résultats

Le travail présenté dans cet article a trait à l'étude de la diffraction d'ondes électromagnétiques par des structures périodiques. Ce sujet a une grande importance dans les applications industrielles, telles que l'imagerie électromagnétique ou les réseaux de cornets d'antennes.

Un bref regard sur la littérature montre que les premiers travaux sur les structures périodiques ont été effectués en optique (Stroke 1967), en acoustique (D. Pruingn 1976), en spectroscopie et en technologies des micro-ondes (Bolotovskii et Voskresentii 1968), et en physique des solides (Bonzel et Gjostein 1963).
Les premiers résultats mathématiques sur l'étude des problèmes de diffraction par un ensemble infini d'obstacles ont été ceux d'Alber [4] concernant le problème aux limites quasi-périodiques de l'équation de Helmholtz dans un domaine non borné. Il a établi l'existence et l'unicité, en imposant dans le cas d'une condition aux bords de type Dirichlet, une condition portant sur la géométrie de la structure. Ces résultats d'existence et d'unicité, ont été ensuite généralisés aux conditions aux limites de type Neumann par Wilcox dans [14], aux équations de Maxwell posées à l'extérieur d'une structure plane infinie de conducteurs par Nédélec et Starling [12], Chen et Friedman [8], Dobson et Friedman [10], et dans le cas d'une couche de diélectrique de coefficients variables avec inclusions conductrices, par Abboud [1].
L'étude mathématique et numérique des réseaux plans infinis a été largement traitée, voir par exemple [1], [7], [11] et [13], et plusieurs codes numériques calculant les coefficients de réflexion et de transmission d'un réseau plan ont été développés. Pour réduire le volume de

*Cet article est soumis pour publication dans *Modélisation Mathématique et Analyse numérique*.

†Les correspondances sont à adresser à H. Ammari, Email: ammari@cmapx.polytechnique.fr

‡P. Ferreira a bénéficié d'une bourse de la Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica, Lisboa, Portugal.

ces calculs afin de les rendre envisageables pour les systèmes informatiques actuels, il s'est avéré nécessaire de développer un modèle s'appuyant fortement sur la périodicité.
L'étape fondamentale de cette modélisation consiste à considérer que les réseaux qu'on étudie ont une structure périodique plane infinie. On introduit ainsi des propriétés d'invariance géométrique qui permettent de décomposer les champs électromagnétiques, et de réduire leur détermination à l'étude de problèmes posés sur une cellule élémentaire de périodicité.

Malheureusement, dans les applications industrielles, les réseaux ne sont pas plans. On doit alors se demander quels sont les liens entre le problème modèle du réseau plan infini qui est résolu, et le réseau courbe fini qui intervient dans les applications industrielles. Notons qu'un calcul direct du champ diffracté par un réseau courbe demande souvent un grand nombre d'inconnues et donc il est très coûteux et même infaisable dans certains cas. L'un des objectifs de cet article est de réduire d'une manière considérable les calculs numériques du champ diffracté en se basant sur des résultats récents donnés dans [2].

Dans [2] deux des auteurs de cet article étudient l'effet de courbure d'un réseau cylindrique circulaire sur la diffraction d'une onde électromagnétique plane en polarisation TE ou TM. Ils justifient pour tout rapport entre la longueur d'onde λ et la taille d de la période l'approximation en champ proche par un réseau plan infini éclairé sous le même angle d'incidence, quand le rayon de courbure R tend vers l'infini. Ils mettent en évidence l'apparition de régions de nature optique différente, où l'erreur est de l'ordre de $O(d/R)$, séparées par des zones de transition où l'erreur est de l'ordre de $O(d/(\lambda^{2/3}R^{1/3}))$. Ces zones de transition correspondent soit à l'existence de modes de Bragg tangents, soit à la transition ombre-lumière. Dans chacune de ces régions ils calculent le premier correcteur qui est solution d'un problème de diffraction par un réseau plan infini. Dans [3], ces résultats sont généralisés au cas d'une couche de diélectrique de coefficients périodiques couvrant un objet conducteur strictement convexe, de bord analytique ou de classe $\mathcal{C}^\infty$.
L'objet de cet article est de présenter une méthode et des simulations numériques pour ce problème de diffraction par un réseau courbe de l'équation de Helmholtz et de montrer comment le résultat d'approximation par un réseau plan infini permet d'accélérer d'une manière considérable les calculs du champ diffracté. Un des grands avantages de cette méthode est de localiser le calcul du champ proche dans les régions que nous intéressent. L'approximation est précise et uniforme.

Nous considérons un réseau cylindrique circulaire, image d'un réseau plan infini de période d, constitué d'une couche de diélectrique avec inclusions périodiques parfaitement conductrices, par la transformation ϕ définie par :

$$(y_1, y_2) \longrightarrow \phi(y_1, y_2) = x(r,\theta) \; avec \; r = R_0 + y_2 \; et \; R_0\theta = y_1 \; mod \; (2\pi R_0),$$

où R_0 est le rayon du cercle conducteur et d la période du réseau plan sont tels que le nombre de périodes $N = 2\pi R_0/d$ soit un entier grand.

Notons Ω^c le milieu conducteur et $\Omega = I\!R^2 \setminus \overline{\Omega}^c$. Les équations de Maxwell se réduisent à

$$(1) \qquad \begin{cases} div 1/\mu \nabla u + k^2 \varepsilon u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \;\text{ ou }\; \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u - u^{in} \; satisfait \; la \; condition \; de \; radiation, & \end{cases}$$

où u^{in} est une onde incidente plane et s'ecrit en coordonnées polaires

$$u^{in}(r,\theta) = e^{-ikrcos\theta}.$$

ε et μ sont les coefficients du diélectrique. On suppose que les coefficients ε et μ sont bornés dans la couche de diélectrique Ω^d, périodiques par rapport à la variable θ de période $2\pi/N$ et égaux à 1 dans le milieu extérieur $\Omega^e = \Omega \setminus \overline{\Omega^d}$. On suppose de plus que μ est continue dans Ω. Cette hypothèse permet d'avoir l'unique solution u du problème (1) dans $H^{2,loc}(\Omega)$.

On définit u_j^{in} par

$$u_j^{in}(r,\theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u^{in}(r,\theta + n2\pi/N)e^{-inj2\pi/N}, 0 \leq j \leq N-1.$$

u_j^{in} satisfait :

$$u_j^{in}(r,\theta + 2\pi/N) = u_j^{in}(r,\theta)e^{ij2\pi/N}.$$

On dira qu'une fonction ψ est j quasi-périodique si elle vérifie

$$\psi(r,\theta + 2\pi/N) = e^{ij2\pi/N}\psi(r,\theta).$$

On vérifie très facilement que

$$u^{in} = \sum_{j=0}^{N-1} u_j^{in}.$$

Comme toute fonction périodique par rapport à la variable θ de période 2π peut se décomposer en somme de N fonctions quasi-périodiques par rapport à la variable θ de période $2\pi/N$, on cherche u de la forme

$$u = \sum_{j=0}^{N-1} u_j.$$

L'invariance de la géométrie par rotation d'angle $2\pi/N$, et les opérateurs de Dirichlet–Neumann quasi-périodiques permettent de réduire le problème (1) à N problèmes posés dans la cellule élémentaire $\Omega_{\theta_l,R}$ tronquée par un cercle de rayon R assez grand.
On note

$$S_{R,\theta_l} = \Big\{\ r = R, \theta_l < \theta < \theta_l + 2\pi/N\ \Big\},$$

où

$$\theta_l = 2\pi l/N.$$

Nous sommes ramenés alors à étudier le problème suivant :

$$(2)_j \begin{cases} trouver\ u_j \in H^1_{j,\theta}(\Delta, \Omega_{\theta_l,R}), & \\ div 1/\mu \nabla u_j + k^2 \varepsilon u_j = 0 & dans\ \Omega_{\theta_l,R}, \\ u_j = 0\ ou\ \partial_n u_j = 0 & sur\ \partial\Omega^c_{\theta_l}, \\ \partial_n(u_j - u^{in}) = \mathcal{T}_j(u_j - u^{in}) & sur\ S_{R,\theta_l}, \end{cases}$$

où $\mathcal{T}_j$ est l'opérateur de Dirichlet-Neumann, donné par

$$\mathcal{T}_j : v_j = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{nN+j}e^{i(nN+j)\theta} \mapsto \mathcal{T}_j v_j = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_{nN+j}(k,R)v_{nN+j}e^{i(nN+j)\theta},$$

où $z_n(k,R) = kH_n^{(1)'}(kR)/H_n^{(1)}(kR)$, $H_n^{(1)}$ sont les fonctions de Hankel vérifiant la condition d'onde sortante, et $H^1_{j,\theta}(\Delta, \Omega_{\theta_l,R})$ sont des espaces de Sobolev quasi-périodiques. On note $H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})$ l'adhérence de l'espace

$$\mathcal{C}^\infty_\theta = \Big\{ \ \psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) : \ \psi(r, \theta + 2\pi/N) = e^{ij2\pi/N}\psi(r,\theta) \ \Big\}$$

dans l'espace $H^1(\Omega_{\theta_l,R})$. $H^1_{j,\theta}(\Delta, \Omega_{\theta_l,R})$ est l'adhérence de l'espace $\mathcal{C}^\infty_\theta$ dans l'espace

$$H^1(\Delta, \Omega_{\theta_l,R}) = \Big\{ u \in H^1(\Omega_{\theta_l,R}) \ tel\ que\ \Delta u \in L^2(\Omega_{\theta_l,R}) \Big\}.$$

L'application trace sur S_{R,θ_l} définie sur l'espace $\mathcal{C}^\infty_\theta$ se prolonge par densité à l'espace $H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})$. L'image par l'application trace de l'espace $H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})$ est notée $H^{1/2}_{\theta_l}(S_{R,\theta_l})$. On peut bien évidemment définir les espaces de Sobolev quasi-périodiques $H^s_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})$ pour tout réel s. Enfin, on définit l'espace $\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})$ comme l'adhérence de l'espace

$$\Big\{ \ \psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_{\theta_l,R}) : \ \psi(r, \theta + 2\pi/N) = e^{ikdsin\theta_l}\psi(r,\theta) \ \Big\},$$

dans l'espace $H^1(\Omega_{\theta_l,R})$. On dira qu'une fonction ψ est θ_l quasi-périodique si elle vérifie

$$\psi(r, \theta + 2\pi/N) = e^{ikdsin\theta_l}\psi(r,\theta),$$

au moins au sens faible.

Il est bien connu que l'opérateur pseudo-différentiel

$$\mathcal{T}_j \ : H^{1/2}_{j,\theta}(S_{R,\theta_l}) \longmapsto H^{-1/2}_{j,\theta}(S_{R,\theta_l})$$

est continu et il vérifie :

$$-\Re e\langle \mathcal{T}_j v_j, v_j\rangle \ \geq \ \frac{1}{2R}\ ||v_j||^2_{L^2(S_R)}, \tag{2}$$

et

$$\Im m\langle \mathcal{T}_j v_j, v_j\rangle \ > \ 0 \quad \text{si } v_j \neq 0. \tag{3}$$

On donne dans le lemme suivant le lien entre le problème (1) et les problèmes $(2)_j$ posés uniquement dans une cellule élémentaire $\Omega_{\theta_l,R}$.

LEMME 1. *L'unique solution u du problème* (1) *est donné par*

$$u = \sum_{j=0}^{N-1} u_j,$$

où u_j est l'unique solution du problème $(2)_j$.

Le problème $(2)_j$ admet la formulation variationnelle suivante :

$$a_j(u_j, v_j) = \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \frac{1}{\mu}\nabla u_j\, \nabla \overline{v}_j - k^2 \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \varepsilon u_j \overline{v}_j - (\mathcal{T}_j u_j, v_j) = \Big(\mathcal{T}_j(u^{in}_j) - \partial_n u^{in}_j, v_j\Big),$$

pour tout v_j dans $H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})$. La solution u_j du problème $(2)_j$ est dans $H^2_j(\Omega_{\theta_l,R})$. Cette régularité est essentielle pour obtenir les estimations d'erreur présentées dans cet article.

On considère la famille S_j^h d'éléments finis j-quasi-périodiques dont l'existence est assurée par Ciarlet dans [9], vérifiant : pour tout u_j dans l'espace de Sobolev j quasi-périodique $H^s_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})$, où $s \geq 2$, il existe une constante C strictement positive indépendante de h telle que on ait

$$\inf_{\psi_j^h \in S_j^h} \Big\{ \|u_j - \psi_j^h\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} + h\|u_j - \psi_j^h\|_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} +$$

$$h^{\frac{1}{2}}\|u_j - \psi_j^h\|_{L^2(\partial\Omega_{\theta_l,R})} + h\|u_j - \psi_j^h\|_{H^{1/2}_{j,\theta}(\partial\Omega_{\theta_l,R})} \Big\} \quad \leq \quad C\, h^{s'} \|u_j\|_{H^{s'}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}$$

pour $s' \in [2, s]$.

On note $u_j^{h,m}$ l'unique solution dans S_j^h du problème suivant

$$a_j^m(u_j^{h,m}, v_j^h) = \left(\mathcal{T}_j^m(u_j^{in}) - \partial_n u_j^{in}, v_j^h\right), \ \forall v_j^h \in S_j^h \tag{4}$$

où

$$\mathcal{T}_j^m : v_j = \sum_{n=-m}^{n=m} v_{nN+j} e^{i(nN+j)\theta} \mapsto \mathcal{T}_j^m v_j = \sum_{n=-m}^{n=m} z_{nN+j}(k, R) v_{nN+j} e^{i(nN+j)\theta}.$$

Ce travail est divisé en quatre paragraphes : dans le premier, on commence par démontrer l'estimation optimale d'erreur suivante :

THÉORÈME 1. *Il existe une constante C strictement positive, indépendante de h, m et de u_j telle que pour tout s entre 0 et 1/2, on ait:*

$$\left\|u_j - u_j^{h,m}\right\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} \quad \leq \quad C\left\{(h^2 + hm^{-s})\, \|u_j\|_{H^2_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} \right.$$

$$\left. + m^{-s-1/2}\|u_j\|_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}\right\}$$

et

$$\left\|u_j - u_j^{h,m}\right\|_{H^1(\Omega_{\theta_l,R})} \quad \leq \quad C\left\{m^{-s-1/2}\|u_j\|_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} \right.$$

$$\left. + h\|u_j\|_{H^2_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}\right\}$$

Ces estimations sont analogues aux estimations obtenues par Abboud dans sa thèse [1] et par Bao dans [6] pour le réseau plan infini. Cependant notre démonstration de cette estimation d'erreur est plus simple. La mise en oeuvre de l'approximation par éléments finis j quasi-périodiques est présentée à la fin du premier paragraphe.

Dans le deuxième paragraphe, on montre un résultat original d'approximation par le réseau plan infini. Le but du troisième paragraphe est de donner une méthode qui repose sur les théorèmes démontrés dans le deuxième paragraphe permettant d'accélérer les calculs du champ diffracté par le réseau courbe.

On considère $v_l \in \mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})$ (de trace nulle sur $\partial\Omega^c_{\theta_l}$ dans le cas de Dirichlet), solution unique du problème suivant :

$$\begin{aligned} b_{\theta_l}(v_l, w_l) &= \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \frac{1}{\mu} \nabla v_l \nabla \overline{w}_l - k^2 \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \varepsilon\, v_l \overline{w}_l - \langle T_{\theta_l} v_l, w_l\rangle \\ &= \langle \frac{\partial v^{in}}{\partial n} - T_{\theta_l} v^{in}, w_l\rangle, \end{aligned} \tag{5}$$

pour tout $w_l \in \mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})$.

T_{θ_l} est l'opérateur de Dirichlet-Neumann défini par :

$$w_l = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_l^n \; e^{ikR(n/\eta+sin\theta_l)\theta} \longmapsto T_{\theta_l} w_l = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i\mu_n \; w_l^n \; e^{ikR(n/\eta+sin\theta_l)\theta},$$

où

$$\mu_n = \begin{cases} \sqrt{k^2-(2\pi n/d+ksin\theta_l)^2} & si\ k >\mid 2\pi n/d + ksin\theta_l \mid, \\ i\sqrt{(2\pi n/d+ksin\theta_l)^2-k^2} & sinon. \end{cases}$$

On dit que $\Omega_{\theta_l,R}$ est dans *une région de transition* si il existe $n \in \mathbb{Z}$, tel que on ait :

$$|\frac{n}{\eta} + sin\theta_l| \; = \; 1 + \xi(kR)^{-2/3} \tag{6}$$

avec $\eta = kR/N$ et $\mid \xi \mid < c$ où c est une constante donnée en fonction du premier zéro de la première fonction d'Airy.

On considère $v_l^{h,m} \in S^h_{\theta_l}$, solution unique de

$$b^m_{\theta_l}(v_l^{h,m}, w_l^h) = \left(T^m_{\theta_l}(v^{in}) - \partial_n v^{in}, w_l^h\right), \; \forall w_l^h \in S^h_{\theta_l} \tag{7}$$

où

$$T^m_{\theta_l} : w_l = \sum_{n=-m}^{n=m} w_l^n \; e^{ikR(n/\eta+sin\theta_l)\theta} \mapsto T^m_{\theta_l} w_l = \sum_{n=-m}^{n=m} i\mu_n \; w_l^n \; e^{ikR(n/\eta+sin\theta_l)\theta},$$

$$b^m_{\theta_l}(v_l^{h,m}, w_l^h) = \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \frac{1}{\mu} \nabla v_l^{h,m} \nabla \overline{w}_l^h - k^2 \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \varepsilon \, v_l^{h,m} \overline{w}_l^h - \langle T^m_{\theta_l} v_l^{h,m}, w_l^h \rangle$$

et $S^h_{\theta_l}$ est la famille des éléments finis θ_l quasi-périodiques.

Les résultats d'approximation par un réseau plan infini sont énoncés dans les théorèmes suivants :

THÉORÈME 2. *Si on suppose que $\Omega_{\theta_l,R}$ est en dehors des régions de transition alors il existe une constante C strictement positive, indépendante de h, m et de u telle que pour tout s entre 0 et $1/2$, on ait:*

$$\begin{aligned} \left\| u - v_l^{h,m} \right\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} \;\; \leq \;\; & C \Big\{ (h^2 + hm^{-s}) \, \|v_l\|_{\mathcal{H}^2_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} \\ & m^{-s-1/2} \|v_l\|_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} + R^{-1} \|v_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} \Big\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| u - v_l^{h,m} \right\|_{H^1(\Omega_{\theta_l,R})} \;\; \leq \;\; & C \Big\{ (R^{-1} + m^{-s-1/2}) \|v_l\|_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} \\ & + h \|v_l\|_{\mathcal{H}^2_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} \Big\} \end{aligned}$$

THÉORÈME 3. *Si $\Omega_{\theta_l,R}$ est dans une région de transition alors il existe une constante C strictement positive, indépendante de h, m et de u telle que pour tout s entre 0 et $1/2$, on ait:*

$$\begin{aligned} \left\| u - v_l^{h,m} \right\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} \;\; \leq \;\; & C \Big\{ (h^2 + hm^{-s}) \, \|v_l\|_{\mathcal{H}^2_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} \\ & + m^{-s-1/2} \|v_l\|_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} + R^{-1/3} \|v_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} \Big\} \end{aligned}$$

et

$$\left\| u - v_l^{h,m} \right\|_{H^1(\Omega_{\theta_l,R})} \leq C \left\{ (R^{-1/3} + m^{-s-1/2}) \|v_l\|_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} + h \|v_l\|_{\mathcal{H}^2_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} \right\}$$

Les résultats numériques présentés dans le dernier paragraphe utilisent d'une manière essentielle ces théorèmes d'approximation.

2 Estimation optimale d'erreur

Le but de ce paragraphe est de fournir une estimation optimale d'erreur entre la solution u_j du problème $(2)_j$ et la solution $u_j^{h,m}$ du problème (4).

2.1 Une première estimation d'erreur

On considère tout d'abord l'erreur entre u_j et u_j^h solution unique du problème suivant :

$$a_j(u_j^h, v_j^h) = \left(\mathcal{T}_j(u_j^{in}) - \partial_n u_j^{in}, v_j^h \right), \tag{8}$$

pour toute fonction v_j^h dans S_j^h.

LEMME 2. *Il existe h_0 strictement positif tel que pour tout h inférieur à h_0 le problème (8) admet une unique solution notée u_j^h.*

On note

$$e_j^h = u_j - u_j^h.$$

On vérifie facilement que

$$a_j(e_j^h, e_j^h) = 2i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Im m\, z_{nN+j}(k,R)\, u_{j,n}\, \overline{u}_{j,n}^h,$$

où $u_{j,n}$ et $u_{j,n}^h$ sont les coefficients de Fourier de u_j et de u_j^h.

Comme S_j^h est inclus dans $H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})$ on obtient alors

$$a_j(e_j^h, e_j^h) = a_j(e_j^h, u_j - \psi_j^h), \quad \psi_j^h \in S_j^h.$$

D'où

$$a_j(e_j^h, e_j^h) = \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \frac{1}{\mu} \nabla e_j^h\, \nabla (\overline{u_j - \psi_j^h}) - k^2 \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \varepsilon e_j^h (\overline{u_j - \psi_j^h}) - \left(\mathcal{T}_j e_j^h, u_j - \psi_j^h \right).$$

Comme

$$| \left(\mathcal{T}_j e_j^h, u_j - \psi_j^h \right) | \leq \| \mathcal{T}_j e_j^h \|_{H^{-1/2}_{j,\theta}(S_{\theta_l,R})} \| u_j - \psi_j^h \|_{H^{1/2}_{j,\theta}(S_{\theta_l,R})},$$

alors en utilisant l'inégalité suivante

$$\forall \beta > 0, \exists\, C(\beta) > 0, \ \textit{tel que}\ ab \leq \beta a^2 + C(\beta) b^2, \tag{9}$$

on montre que

$$\begin{aligned} | \left(\mathcal{T}_j e_j^h, u_j - \psi_j^h \right) | &\leq 2\beta \| e_j^h \|^2_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} + C(\beta) h^{2s'-2} \| u_j \|^2_{H^{s'}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} \\ &+ C(\beta) \| u_j - \psi_j^h \|_{H^{1/2}_{j,\theta}(S_{\theta_l,R})}. \end{aligned} \tag{10}$$

La majoration de

$$|\int_{\Omega_{\theta_l,R}} \frac{1}{\mu} \nabla e_j^h \, \nabla(\overline{u_j - \psi_j^h})|$$

et de

$$|\int_{\Omega_{\theta_l,R}} \varepsilon e_j^h (\overline{u_j - \psi_j^h})|$$

s'effectue exactement comme dans (10), en utilisant l'inégalité (9). On voit alors que

$$|a_j(e_j^h, e_j^h)| \ \leq \ 2\beta \|e_j^h\|^2_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} + C(\beta) h^{2s'-2} \|u_j\|^2_{H^{s'}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

D'où le lemme suivant :

LEMME 3. *Pour tout β strictement positif, il existe une constante $C(\beta)$ strictement positive telle que on ait*

$$|a_j(e_j^h, e_j^h)| \ \leq \ C(\beta) h^{2s'-2} \|u_j^h\|^2_{H^{s'}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} + 2\beta \left\| e_j^h \right\|^2_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} \tag{11}$$

pour tout $s' \in [2, s]$.

Ce dernier lemme permet d'obtenir la proposition suivante :

PROPOSITION 1. *Il existe une constante C strictement positive indépendante de h telle que on ait*

$$\left\| e_j^h \right\|_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} \ \leq \ C h^{s'-1} \|u_j^h\|_{H^{s'}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} \tag{12}$$

pour tout $s' \in [2, s]$.

Pour déduire l'inégalité (12) à partir de (11), on a besoin du lemme suivant :

LEMME 4. *On considère X un espace de Hilbert séparable, a_0 et a_r deux formes sesquilinéaires sur X vérifiant :*

$$\begin{aligned} &(i) \ \ \exists\, \alpha > 0, \forall\, v \in X, \Re e\, a_0(v,v) \geq \alpha \ \| v \|_X^2 \,; \\ &(ii) \ \ \forall\, (u_n) \in X^{I\!N}, \, u_n \rightharpoonup u \Rightarrow a_r(u_n, u_n) \to a_r(u,u) \,; \\ &(iii) \ \ a(u,u) = a_0(u,u) + a_r(u,u) = 0 \implies u = 0 \end{aligned}$$

Soit (u_n) une suite d'éléments de X, alors on a l'implication suivante

$$a_0(u_n, u_n) + a_r(u_n, u_n) = O(n^{-2s}) \ (s > 0) \implies \| u_n \|_X = O(n^{-s})$$

La preuve de ce lemme de stabilité se fait par l'absurde en utilisant des arguments d'unicité et de compacité. On suppose que l'inégalité

$$\| u_n \|_X = O(n^{-s})$$

est fausse. Pour toute constante C strictement positive et pour tout entier naturel n_0, il existe alors un entier naturel $n \geq n_0$ tel que on ait

$$|| u_n ||_X \quad \geq \quad C n^{-s}.$$

On obtient une suite $(n^s u_n)$ telle que $|| n^s u_n ||_X$ converge vers $+\infty$.

On pose $v_n = u_n / \| u_n \|_X$. Il est très facile de voir que :

(13) $$\| v_n \|_X = 1 \Longrightarrow v_n \rightharpoonup v,$$

et que

$$a_0(v_n - v, v_n - v) + a_r(v_n - v, v_n - v) \longrightarrow -a_0(v, v).$$

La propriété (ii) permet de montrer que :

(14) $$a_0(v_n - v, v_n - v) \longrightarrow -a_0(v, v).$$

De (i), on déduit que $v = 0$. Ce qui est en contradiction avec (13).

2.2 Approximation de l'opérateur de Dirichlet-Neumann

Maintenant on considère le problème suivant

(15) $$a_j^m(u_j^{h,m}, v_j^h) = \left(\mathcal{T}_j^m(u_j^{in}) - \partial_n u_j^{in}, v_j^h\right), \ \forall v_j^h \in S_j^h$$

où

$$\mathcal{T}_j^m : v_j = \sum_{n=-m}^{n=m} v_{nN+j} e^{i(nN+j)\theta} \mapsto \mathcal{T}_j^m v_j = \sum_{n=-m}^{n=m} z_{nN+j}(k, R) v_{nN+j} e^{i(nN+j)\theta},$$

est une approximation de l'opérateur de Dirichlet-Neumann $\mathcal{T}_j$. On peut vérifier facilement le lemme suivant :

Lemme 5. *Le problème* (15) *admet une unique solution dans* S_j^h *notée* $u_j^{h,m}$.
Comme le problème (15) conduit à un système linéaire de dimension finie alors l'unicité de la solution du système linéaire implique l'existence d'une unique solution de (15). L'unicité s'obtient en adaptant la démonstration du Lemme 4.

On a l'identité

$$a_j^m(u_j - u_j^{h,m}, u_j - u_j^{h,m}) = a_j^m(u_j - u_j^{h,m}, u_j - \psi_j^h) + a_j^m(u_j - u_j^{h,m}, \psi_j^h - u_j^{h,m})$$

On veut obtenir une majoration de ces deux termes. Il est facile de voir que

$$a_j^m(u_j^{h,m}, \psi_j^h - u_j^{h,m}) = \left(\mathcal{T}_j^m(u_j^{in}) - \partial_n u_j^{in}, \psi_j^h - u_j^{h,m}\right),$$

et

$$a_j^m(u_j, \psi_j^h - u_j^{h,m}) = \left(\mathcal{T}_j(u_j^{in}) - \partial_n u_j^{in}, \psi_j^h - u_j^{h,m}\right) + \left((\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_j^m)u_j, \psi_j^h - u_j^{h,m}\right).$$

On obtient alors l'identité suivante

(16) $$a_j^m(u_j - u_j^{h,m}, \psi_j^h - u_j^{h,m}) = \left((\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_j^m)u_j^{in}, \psi_j^h - u_j^{h,m}\right) + \left((\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_j^m)u_j, \psi_j^h - u_j^{h,m}\right).$$

Pour tout s entre 0 et 1/2 on a

$$\left| \left((\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_j^m)u_j^{in}, \psi_j^h - u_j^{h,m}\right) \right| \leq \|(\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_j^m)u_j^{in}\|_{H_{j,\theta}^{-s}(S_{\theta_l,R})} \|\psi_j^h - u_j^{h,m}\|_{H_{j,\theta}^{s}(S_{\theta_l,R})}.$$

On vérifie que

(17) $$\|(\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_j^m)u_j^{in}\|_{H_{j,\theta}^{-s}(S_{\theta_l,R})} \leq m^{-s-1/2} \|u_j^{in}\|_{H_{j,\theta}^{1/2}(S_{\theta_l,R})}.$$

La continuité de l'application trace donne

$$\|\psi_j^h - u_j^{h,m}\|_{H^s_{j,\theta}(S_{\theta_l,R})} \leq C\,\|\psi_j^h - u_j^{h,m}\|_{H^{s+1/2}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}, \tag{18}$$

où C est une constante positive indépendante de h et de m. les inégalités (17) et (18) conduisent à l'estimation suivante

$$\begin{aligned}|a_j^m(u_j - u_j^{h,m}, \psi_j^h - u_j^{h,m})| \;&\leq\; Cm^{-s-1/2}\left(||u_j^{in}||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} + ||u_j||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}\right)\\ &\qquad \|\psi_j^h - u_j^{h,m}\|_{H^{s+1/2}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}.\end{aligned}$$

On majore le premier terme dans l'identité (16)

$$|a_j^m(u_j - u_j^{h,m}, u_j - \psi_j^h)| \leq \|u_j - u_j^{h,m}\|_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}\|u_j - \psi_j^h\|_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

En regroupant tous les termes on voit que

$$\begin{aligned}&|a_j^m(u_j - u_j^{h,m}, u_j - u_j^{h,m})| \leq h^{s'-1}\,\|u_j - u_j^{h,m}\|_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}\|u_j\|_{H^{s'}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}\\ &+Cm^{-s-1/2}\left(||u_j^{in}||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} + ||u_j||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}\right)\|u_j - u_j^{h,m}\|_{H^{s+1/2}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}.\end{aligned} \tag{19}$$

De la même façon que dans la Proposition 1, l'inégalité (19) permet d'obtenir l'estimation d'erreur suivante

$$\begin{aligned}\|u_j - u_j^{h,m}\|_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} \;&\leq\; h^{s'-1}\,\|u_j\|_{H^{s'}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} + C\,m^{-s-1/2}\\ &\qquad \left(||u_j^{in}||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} + ||u_j||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}\right).\end{aligned}$$

Maintenant pour obtenir une estimation optimale de

$$\|u_j - u_j^{h,m}\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})},$$

on fait appel à la méthode classique de dualité d'Aubin-Nitsche qui consiste à remarquer que

$$\|u_j - u_j^{h,m}\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} = \sup_{f\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{\theta_l,R})} \frac{(u_j - u_j^{h,m}, f)_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}}{||f||_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}}.$$

Pour toute fonction f régulière à support compact dans $\Omega_{\theta_l,R}$, on note w_j l'unique solution dans $H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})$ du problème

$$(2)'_j \begin{cases} \textit{trouver } w_j \in H^1_{j,\theta}(\Delta, \Omega_{\theta_l,R}), \\ div 1/\mu \nabla w_j + k^2\varepsilon w_j = -\overline{f} & \textit{dans } \Omega_{\theta_l,R}, \\ w_j = 0 \textit{ ou } \partial_n w_j = 0 & \textit{sur } \partial\Omega^c_{\theta_l}, \\ \partial_n(w_j) = \mathcal{T}_j^*(w_j) & \textit{sur } S_{R,\theta_l}, \end{cases}$$

$\mathcal{T}_j^*$ est l'adjoint de l'opérateur pseudo-différentiel $\mathcal{T}_j$ qui est d'ordre 1. En multipliant l'équation

$$div 1/\mu \nabla w_j + k^2\varepsilon w_j = -\overline{f} \quad \textit{dans } \Omega_{\theta_l,R}$$

par $u_j - u_j^{h,m}$ et en intégrant par parties, on voit que

$$(u_j - u_j^{h,m}, f)_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} = a_j^m(u_j - u_j^{h,m}, \overline{w}_j) - ((\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_j^m)u_j, \overline{w}_j).$$

Pour toute fonction ψ_j^h dans S_j^h, on a

$$a_j^m(u_j - u_j^{h,m}, \overline{w}_j) = a_j^m(u_j - u_j^{h,m}, \overline{w}_j - \psi_j^h) + ((\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_j^m)u_j, \psi_j^h).$$

En utilisant la continuité de la forme a_j^m, on obtient

$$|a_j^m(u_j - u_j^{h,m}, \overline{w}_j - \psi_j^h)| \leq ||u_j - u_j^{h,m}||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} ||\overline{w}_j - \psi_j^h||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

La continuité des opérateurs de Dirichlet-Neumann et de l'application trace sur S_{R,θ_l} permettent de vérifier que

$$|((\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_j^m)u_j, \overline{w}_j - \psi_j^h)| \leq m^{-s-1/2} ||u_j||_{H^{s+1/2}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} ||\overline{w}_j - \psi_j^h||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

Ces estimations conduisent donc à l'inégalité suivante

$$|(u_j - u_j^{h,m}, f)_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}| \leq h ||u_j - u_j^{h,m}||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} ||w_j||_{H^2_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}$$

$$+ h m^{-s-1/2} ||u_j||_{H^{s+1/2}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} ||u_j||_{H^2_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

Grâce à la majoration

$$||w_j||_{H^2_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} \leq C ||f||_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}$$

qui découle de la régularité de la solution du problème $(2)_j$, on obtient

$$\|u_j - u_j^{h,m}\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} \leq \; h^{s'} \; \|u_j\|_{H^{s'}_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} \; + \; C \, m^{-s-1/2} \, h \, \left(||u_j^{in}||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} + ||u_j||_{H^1_{j,\theta}(\Omega_{\theta_l,R})} \right).$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 1.

2.3 Mise en oeuvre de l'approximation par des éléments finis quasi-périodiques

Le but de ce paragraphe est d'indiquer comment le problème discret

$$a_j^m(u_j^{h,m}, v_j^h) = \left(\mathcal{T}_j^m(u_j^{in}) - \partial_n u_j^{in}, v_j^h \right), \; \forall v_j^h \in S_j^h, \tag{20}$$

peut être mis en oeuvre sur ordinateur. Les propriétés que l'on énonce pour le problème (20) sont vraies pour les problèmes discrets définis dans les pages suivantes.
On désire calculer une bonne approximation de la solution du problème (1). Pour tout j entre 1 et N, on se donne alors une base $(\varphi_p^j)_{p=1}^P$ de l'espace vectoriel de dimension finie S_j^h des éléments finis j quasi-périodiques. Les inconnues à calculer sont les coefficients des solutions $u_j^{h,m}$ dans les bases $(\varphi_p^j)_{p=1}^P$. La méthode présentée consiste à introduire des inconnues supplémentaires. Le problème discret (20) conduit à un système linéaire de $([\frac{2m+1}{N}] + P)$ équations à $([\frac{2m+1}{N}] + P)$ inconnues qui s'ecrit

$$M^j x^j = b^j. \tag{21}$$

La matrice M^j de taille $([\frac{2m+1}{N}] + P) \times ([\frac{2m+1}{N}] + P)$ admet la décomposition suivante

$$M^j = \begin{pmatrix} A^j & B^j \\ -(B^j)^* & C^j \end{pmatrix}$$

où les matrices A^j, B^j et C^j sont données par

$$A^j_{p,q} = \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \frac{1}{\mu} \nabla \varphi^j_p \nabla \overline{\varphi}^j_q - k^2 \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \varepsilon \varphi^j_p \overline{\varphi}^j_q, \quad \textit{pour } 1 \leq p \leq P \textit{ et } 1 \leq q \leq P,$$

$$B^j_{p,q} = -\frac{2\pi R}{N} z_{qN+j}(k,R) \overline{\varphi}^j_{p,q}, \quad \textit{pour } 1 \leq p \leq P \textit{ et } -m \leq qN+j \leq m,$$

et

$$C^j_{p,q} = -\delta_{p,q} \frac{2\pi R}{N} \overline{z}_{qN+j}(k,R), \quad \textit{pour } -m \leq pN+j \leq m \textit{ et } -m \leq qN+j \leq m.$$

La matrice C^j est une matrice carrée diagonale. Le vecteur x^j, de taille $([\frac{2m+1}{N}]+P)$, s'écrit

$$x^j = \begin{pmatrix} \alpha^j_p \\ \beta^j_q \end{pmatrix}$$

avec α^j_p est la p-ième composante de $u^{h,m}_j$

$$u^{h,m}_j = \sum_{p=1}^{P} \alpha^j_p \varphi^j_p.$$

Les inconnues supplémentaires (β^j_q) sont données par

$$\beta^j_q = \sum_{p=1}^{P} \alpha^j_p \varphi^j_{p,q},$$

où $\varphi^j_{p,q}$ est le $qN+j$-ième coefficient de Fourier de la trace de la fonction de base φ^j_p sur S_{R,θ_l}.

Le second membre b^j dans le système linéaire (21) est donné par

$$b^j_p = \frac{2\pi}{N} \sum_{|qN+j| \leq m} i^{qN+j} \Big(z_{qN+j}(k,R) j_{qN+j}(k,R) - k j'_{qN+j}(k,R) \Big) \overline{\varphi}^j_{p,q}, \quad \textit{pour } 1 \leq p \leq P$$

et

$$b^j_p = 0, \quad \textit{pour } P+1 \leq p \leq ([\frac{2m+1}{N}]+P).$$

$j_n(k,R)$ est la n-ième fonction de Bessel de première espèce.
b^j s'écrit alors

$$b^j = \begin{pmatrix} b^j_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec b^j_1 de taille P. Le système discret est équivalent à résoudre l'équation matricielle suivante

$$\Big((B^j)^* (A^j)^{-1} B^j + C^j \Big) \alpha^j = (B^j)^* (A^j)^{-1} b^j_1, \tag{22}$$

où $\alpha^j = (\alpha^j_p)^P_{p=1}$.

Il faut noter que A^{j+1} s'obtient très facilement à partir de A^j. On considère (φ^j_p) une base de l'espace S^h_j. En multipliant par $e^{i2\pi/N}$ les fonctions de base définies sur les éléments géométriques qui ont un sommet sur $\{\theta = \theta_l \textit{ et } R_0 < r < R\}$, et en complétant cette famille par les (φ_p^j) associées aux éléments géométriques qui n'ont pas de sommets sur $\{\theta = \theta_l + 2\pi/N \textit{ et } R_0 < r < R\}$, on construit une base de l'espace S_{j+1}^h. La matrice A^{j+1} s'obtient en modifiant seulement les termes qui correspondent aux nouvelles fonctions obtenues par multiplication par $e^{i2\pi/N}$.

Les remarques suivantes s'imposent :
(i) En utilisant cette technique de décomposition en fonctions quasi-périodiques, on a réduit d'un facteur N^2 le nombre d'opérations pour décomposer le système linéaire obtenu.
(ii)On voit que

$$B^{N-j} = B^j, C^{N-j} = C^j \textit{ et } b^{N-j} = b^j.$$

D'où les deux problèmes $(2)_{N-j}$ et $(2)_j$ sont les mêmes.

3 Approximation par un réseau plan infini et estimation optimale d'erreur

3.1 Estimation optimale d'erreur

Le but de ce paragraphe est de démontrer les Théorèmes 2 et 3.
On a

$$\|u - v_l^{h,m}\|_{H^1(\Omega_{\theta_l,R})} \leq \|u - v_l\|_{H^1(\Omega_{\theta_l,R})} + \|v_l - v_l^{h,m}\|_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

En appliquant les résultats de la section précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \|v_l - v_l^{h,m}\|_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} &\leq C\Big\{m^{-s-1/2}\|v_l\|_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} \\ &\qquad + h\|v_l\|_{\mathcal{H}^2_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})}\Big\} \end{aligned}$$

Pour démontrer les deux Théorèmes 2 et 3, il nous reste alors à estimer $\|u - v_l\|_{H^1(\Omega_{\theta_l,R})}$ et $\|u - v_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}$. L'estimation de $\|u - v_l\|_{H^1(\Omega_{\theta_l,R})}$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4. *Si on suppose que $\Omega_{\theta_l,R}$ est en dehors des régions de transition alors il existe une constante C strictement positive, telle que on ait:*

$$\|u - v_l\|_{H^1(\Omega_{\theta_l,R})} \leq CR^{-1}\,||v_l||_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

Dans le cas où $\Omega_{\theta_l,R}$ est dans une région de transition, il existe une autre constante C strictement positive, telle que on ait:

$$\|u - v_l\|_{H^1(\Omega_{\theta_l,R})} \leq CR^{-1/3}\,||v_l||_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

Voir Abboud-Ammari [2] pour la démonstration.

Maintenant, en regroupant ces inégalités, il est facile de voir qu'on obtient l'estimation :

$$\begin{aligned} \left\|u - v_l^{h,m}\right\|_{H^1(\Omega_{\theta_l,R})} &\leq C\left\{(R^{-1/3} + m^{-s-1/2})\,\|v_l\|_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})}\right. \\ &\qquad \left. + h\,\|v_l\|_{\mathcal{H}^2_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})}\right\} \end{aligned}$$

pour $\Omega_{\theta_l,R}$ dans une région de transition et

$$\begin{aligned} \left\|u - v_l^{h,m}\right\|_{H^1(\Omega_{\theta_l,R})} &\leq C\left\{(R^{-1} + m^{-s-1/2})\,\|v_l\|_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})}\right. \\ &\qquad \left. + h\,\|v_l\|_{\mathcal{H}^2_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})}\right\} \end{aligned}$$

pour $\Omega_{\theta_l,R}$ en dehors des régions de transition.

Pour obtenir des estimations optimales pour

$$\|u - v_l^{h,m}\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}$$

on utilise encore la méthode de dualité d'Aubin-Nitsche. En fait, on a

$$\|u - v_l^{h,m}\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} \leq \|u - v_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} + \|v_l - v_l^{h,m}\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

En appliquant une autre fois les résultats de la section 3, on montre qu'il existe une constante C strictement positive indépendante de m et de h tel que :

$$\begin{aligned}\left\|v_l - v_l^{h,m}\right\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} \quad &\leq \quad C\Big\{(h^2 + hm^{-s})\, \|v_l\|_{\mathcal{H}^2_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} \\ &\qquad + m^{-s-1/2}\|v_l\|_{\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})}\Big\} \ .\end{aligned}$$

Pour l'estimation L^2, on a

$$\|u - v_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} \leq \|u - u_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} + \|u_l - v_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})},$$

où u_l est l'unique solution dans $\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})$ du problème variationnel suivant

$$\text{(23)} \qquad \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \frac{1}{\mu}\nabla u_l \nabla \overline{w}_l - k^2 \int_{\Omega_{\theta_l,R}} \varepsilon\, u_l \overline{w}_l - \langle \mathcal{T}_{\theta_l} u_l, w_l\rangle = (\mathcal{T}_{\theta_l}(\tilde{u}^{in}) - \partial_n \tilde{u}^{in}, w_l)\ ,$$

pour tout $w_l \in \mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})$ (w_l est de trace nulle dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet), où

$$\mathcal{T}_{\theta_l} : w_l = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_l^n\ e^{ikR(n/\eta+sin\theta_l)\theta} \mapsto \mathcal{T}_{\theta_l} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_{\nu_n}(k,R)\ w_l^n\ e^{ikR(n/\eta+sin\theta_l)\theta},$$

D'après [2], on a

$$\|u - u_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} \leq C\frac{1}{R}\|v_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

Il reste à estimer

$$\|u_l - v_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} = \sup_{f\in\mathcal{C}^\infty_0(\Omega_{\theta_l,R})} \frac{(u_l - v_l, f)_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}}{||f||_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}}.$$

Pour toute fonction f régulière à support compact dans $\Omega_{\theta_l,R}$, on note w_l l'unique solution dans $\mathcal{H}^1_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})$ du problème

$$(2)_l \begin{cases} trouver\ w_l \in \mathcal{H}^1_\theta(\Delta, \Omega_{\theta_l,R}), & \\ div 1/\mu \nabla w_l + k^2 \varepsilon w_l = -\overline{f} & dans \Omega_{\theta_l,R}, \\ w_l = 0\ ou\ \partial_n w_l = 0 & sur\ \partial\Omega^c_{\theta_l}, \\ \partial_n(w_l) = \mathcal{T}^*_{\theta_l}(w_l) & sur\ S_{R,\theta_l}, \end{cases}$$

$\mathcal{T}^*_{\theta_l}$ est l'adjoint de l'opérateur pseudo-différentiel $\mathcal{T}_{\theta_l}$ qui est d'ordre 1.
L'estimation de la différence entre les deux opérateurs $\mathcal{T}_{\theta_l}$ et T_{θ_l} conduit à l'inégalité suivante

$$|(u_l - v_l, f)_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}| \leq ||v_l||_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}||w_l||_{\mathcal{H}^2_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

Maintenant, grâce à la majoration

$$||w_l||_{\mathcal{H}^2_{\theta_l}(\Omega_{\theta_l,R})} \leq C||f||_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}$$

obtenue à partir de la régularité de la solution du problème $(2)_l$, on obtient

$$\|u_l - v_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})} \leq \; C \; \|v_l\|_{L^2(\Omega_{\theta_l,R})}.$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 4.

3.2 Mise en oeuvre

On commence par déterminer les régions de transition. Dans ces régions, on peut approcher le champ diffracté par celui obtenu par l' approximation par le réseau plan infini tangent plus le premier correcteur donné dans [2] et qui fait en fait intervenir la forme $b^m_{\theta_l}$. En dehors de ces régions, on ne programme pas le correcteur qui corrige des termes en $0(1/R^2)$. L'approximation par le réseau plan infini est satisfaisante. On peut aussi, pour accélérer les calculs du champ diffracté, remplacer $N^{1/3}$ cellules voisines autour d'une incidence θ_l par un seul réseau plan infini se trouvant à l'incidence θ_l. C'est à dire, si on note par ω_{θ_l} ce domaine

$$\omega_{\theta_l,R} = \Big\{(r,\theta) \; tel \; que \; r < R \; et \; \theta_l - cN^{1/3}2\pi/N < \theta < \theta_l + cN^{1/3}2\pi/N\Big\},$$

(c est une constante positive) on résout le problème variationnel posé dans $\omega_{\theta_l,R}$

$$\text{(24)} \qquad \int_{\omega_{\theta_l,R}} \frac{1}{\mu}\nabla u_l \nabla \overline{w}_l - k^2 \int_{\omega_{\theta_l,R}} \varepsilon \, u_l \overline{w}_l - \langle T_{\theta_l} u_l, w_l\rangle = \left(T_{\theta_l}(v^{in}) - \partial_n v^{in}, w_l\right),$$

pour tout $w_l \in \mathcal{H}^1_{\theta_l}(\omega_{\theta_l,R})$ (w_l est de trace nulle dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet).
Le choix de $N^{1/3}$ cellules est optimal. Remarquons que le calcul direct conduit très approximativement à $C_1\,(nN)^3$ opérations où n est le nombre d'inconnues par cellule élémentaire et que la méthode présentée dans cet article permet de gagner un facteur $N^{4/3}$ (le nombre d'opérations est de l'ordre de $C_2\,N^{2/3}\,n^3$). Un autre gain est au niveau de la place mémoire. Un calcul direct nécessite le stockage de $(nN)^2$ inconnues alors que notre méthode ne nécessite que le stockage de n^2 inconnues $N^{2/3}$ fois. Cet avantage rend possible le calcul numérique des champs diffractés par des réseaux courbes à des très hautes fréquences. Un des grands avantages de cette méthode est qu'elle localise les calculs en champ proche. Si on s'intéresse à la valeur du champ uniquement dans une région de la forme

$$\Big\{\theta_1 < \theta < \theta_2, r < R\Big\},$$

alors on ne ferra des calculs "réseau plan infini" uniquement pour les incidences θ_j qui se trouvent entre θ_1 et θ_2. Comme les différents correcteurs sont faciles à calculer alors on gagne trés approximativement un facteur N^3. Ceci constitue nous semble-t-il le plus grand gain de cette méthode qui pourrait être généralisée au calcul de l'onde diffractée par des structures périodiques finies (interfaces entre deux milieux diélectriques par exemple) en utilisant les résultats de type optique géométrique obtenus par Ammari dans [5].

4 Expériences numériques

Pour terminer cet article nous donnons quelques résultats numériques. Nous considérons les valeurs suivantes : $R_0 = 1, R = 1.125664, k = 50, \lambda = 0.125664, d = 0.062832, N = 100, \varepsilon = \mu = 1$ et le pas du maillage $h = 0.003307$.

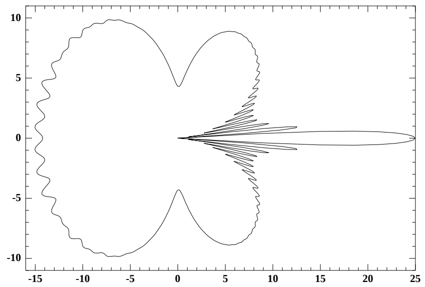

Figure 1 : *Diagramme de radiation pour le réseau courbe*

La figure 1 représente le calcul direct du diagramme de radiation pour le réseau circulaire éclairé avec une incidence normale.

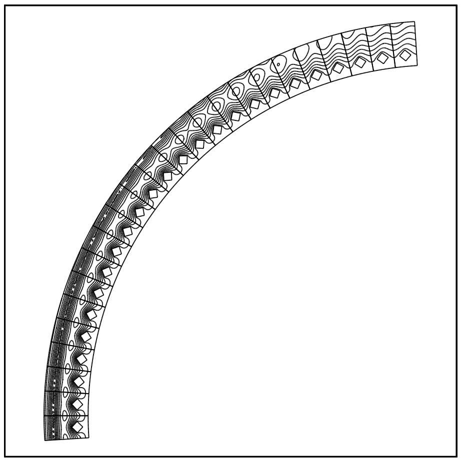

Figure 2 : *Module du champ diffracté par le réseau courbe*

La figure 2 représente pour un quart du cercle le module du champ diffracté par le réseau circulaire éclairé avec une incidence horizontale.

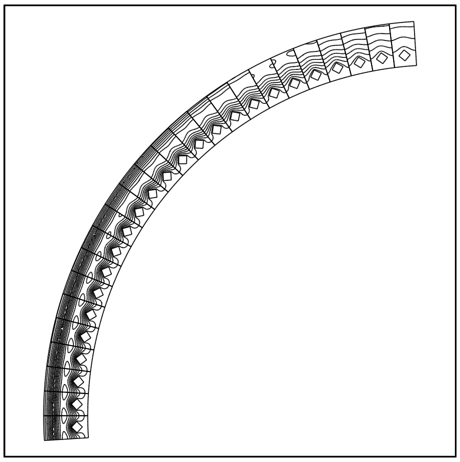

Figure 3 : *Module du champ calculé à partir de l'approximation d'optique géométrique*

La figure 3 représente le module du champ diffracté par le réseau circulaire calculé pour un quart du cercle en utilisant l'approximation de l'optique géométrique.

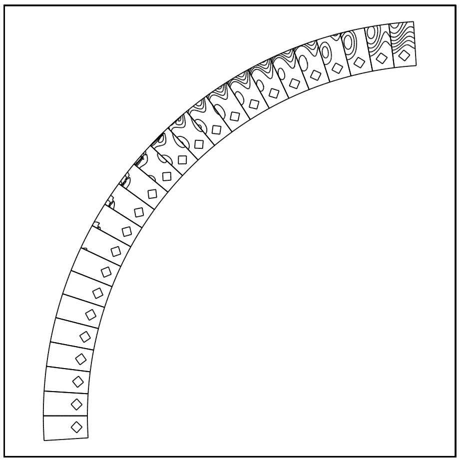

Figure 4 : *L'erreur d'approximation*

References

[1] T. Abboud, Étude mathématique de quelques problèmes de diffraction en électromagnétisme, Thèse de L'École Polytechnique (1991).

[2] T. Abboud et H. Ammari, Diffraction at a curved grating. Approximation by an infinite plane grating, à paraître dans *J. Math. Anal. Appl.*, (voir aussi *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I,* **t.320** (1995), 113-118).

[3] T. Abboud, H. Ammari et G. Lebeau, Analyse asymptotique de la diffraction par un réseau convexe, article à paraître. (voir aussi *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **t.320** (1995),1085-1090).

[4] H. D. Alber, A quasi-periodic boundary value problem for the Laplacien and continuation of its resolvent, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **82 A** (1979).

[5] H. Ammari, Finite gratings at high frequencies. Part I: the Helmholtz equation, *J. Math. Anal. Appl.* (soumis).

[6] G. Bao, Finite element approximation of time harmonic waves in periodic structures, *SIAM, J. Num. Anal.*, **32** (1995), 1155-1169.

[7] Z. Benjelloun Touimi El Dabaghi, Diffraction par un réseau 1-périodique de $I\!R^3$, Thèse de l'École Polytechnique (1988).

[8] X. Chen et A. Friedman, Maxwell's equations in a periodic structure, *Trans. Amer. Math. Soc.* **323** (1991), 465-507.
[9] P. G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, 1980.
[10] D. Dobson et A. Friedman, The time-harmonic Maxwell equations in a doubly periodic structure, *J. Math. Anal. Appl.*, **166** (1992), 507-528.
[11] A. Morelot, Étude d'une méthode numérique de simulation de la diffraction d'une onde électromagnétique par un réseau bi-périodique, Thèse de l'École Polytechnique (1992).
[12] J.C. Nédélec et F. Starling, Integral equation methods in a quasi-periodic diffraction problem for the time-harmonic Maxwell's equations, *SIAM, J. Math. Anal.*, **22** (1991), 1679-1701.
[13] F. Starling, Étude mathématique de quelques problèmes de diffraction en électromagnétisme, Thèse de l'École Polytechnique (1991).
[14] C.H. Wilcox, Scattering theory for diffraction gratings, App. Math. Sc. **46**, Springer-Verlag, 1984.

Remerciements- Les auteurs tiennent à remercier Jean Claude Nédélec pour tout l'intêret qu'il porte à ce travail.