Résonances pour les Équations de Maxwell dans une Structure Périodique

H. Ammari J. C. Nédélec N. Vialle

Centre de Mathématiques Appliquées, CNRS URA 756,

École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

Résumé. Nous étudions l'existence et la distribution des fréquences de résonance et des nombres d'ondes longitudinaux pour les équations de Maxwell dans un réseau. Nous ramenons notre problème à l'étude des valeurs caractéristiques d'une famille d'opérateurs périodiques non-auto-adjoints. Notre principal outil mathématique est la théorie des opérateurs intégraux.

Resonances for Maxwell's Equations in a Periodic Structure

Abstract. This paper deals with the existence and the distribution of the resonances associated to the Maxwell system in a periodic infinite structure. By boundary integral operators method, we reduce our problem to the existence and distribution of the characteristic values of a family of periodic non-self adjoint integral operators. The distribution of resonances is completely shown.

Mots clés. Opérateurs intégraux, Équations de Maxwell, Résonances, Intégrales de type Cauchy, Formule d'inversion de Hilbert, valeurs caractéristiques, Théorème de Rouché généralisé, Théorie de Fredholm analytique.

Key words and phrases. Integral Operators, Maxwell's equations, Resonances, Integrals of Cauchy type, The Hilbert inversion formulae, Characteristic values, Generalized Rouché's theorem, The Fredholm analytic theory.

AMS subject classifications. 47G10, 35P20, 45E05.

1 Introduction et géométrie du réseau.

L'étude de la réflexion d'ondes électromagnétiques par des couches planes périodiques a débuté avec les travaux de Rayleigh (1907) (voir [36] et [37]) et a intéressé de très nombreux auteurs, parmi lesquels nous citons Millar [30], Eckart [14], Uretsky [57], Urusovskii [58], Waterman [59], Holford [21], Stroke [53], Twersky [54], Adorina-Shestopalov [1], Rumsey [42], Heins [20], Brillouin [4]. Ce sujet a une grande importance dans certaines applications industrielles, telles que l'imagerie électromagnétique ou les réseaux de cornets d'antennes. Dans cet article, nous étudions l'existence et la distribution des fréquences de résonance et des nombres d'ondes longitudinaux (constantes de propagation suivant la direction d'invariance de la structure périodique) pour les équations de Maxwell dans une structure

périodique constituée par des lames conductrices infiniment minces déposées périodiquement sur la couche de diélectrique d'épaisseur h recouvrant un plan conducteur.
L'espace est rapporté à une base orthonormée (e_x, e_y, e_z) choisie de telle sorte que e_z soit parallèle à la direction d'invariance du réseau, ie la direction infinie des lames et que e_x corresponde à sa direction de périodicité. La demi largeur de la fente de diélectrique entre deux lames consécutives, notée δ, est le petit paramètre dans notre problème. d désigne la période de la structure.
Le milieu extérieur et la couche de diélectrique sont caractérisés par leur permittivité électrique ε et leur perméabilité magnétique μ, prises constantes dans chaque milieu.
Ainsi

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & y < h, \\ \varepsilon_2, & y > h, \end{cases} \qquad \mu = \begin{cases} \mu_1, & y < h, \\ \mu_2, & y > h. \end{cases}$$

Les conducteurs sont parfaits. Nous notons Γ_h^δ l'ensemble des sections des lames conductrices

$$\Gamma_h^\delta = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \left] \, \delta + jd, d - \delta + jd \, \right[\times \Big\{ y = h \Big\} \times \mathrm{R},$$

et Ω^δ le milieu de diffraction

$$\Omega^\delta = \Big(\mathrm{R} \times \left] \, 0, \infty \, \right[\times \mathrm{R} \Big) \setminus \Gamma_h^\delta,$$

de bord $\partial\Omega^\delta = \Gamma_h^\delta \cup \Big(\mathrm{R} \times \Big\{ y = 0 \Big\} \times \mathrm{R} \Big)$.

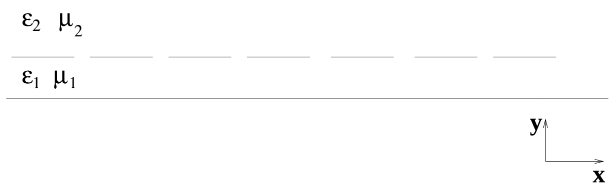

Figure 1 : *La première structure périodique*

Nous définissons également $\mathcal{O}^h$, cellule élémentaire du réseau, de frontières latérales, $\{x = -d/2\}$ et $\{x = d/2\}$.

$\mathcal{O}_1^h = \left] -d/2, d/2 \right[\times \left] h, +\infty \right[$	zone occupée par le milieu extérieur
$\mathcal{O}_2^h = \left] -d/2, d/2 \right[\times \left] 0, h \right[$	zone occupée par le milieu diélectrique
$S_\delta^h = \left] -\delta, \delta \right[\times \Big\{ y = h \Big\}$	fente diélectrique

$\partial\mathcal{O}_h^c = \left] -d/2, -\delta \right[\times \Big\{ y = h \Big\} \cup \left] \delta, d/2 \right[\times \Big\{ y = h \Big\} \cup \left] -d/2, d/2 \right[\times \Big\{ y = 0 \Big\}$ est la partie conductrice.
Dans la section 2, nous écrivons les équations et les conditions limites du problème, ainsi que la condition de radiation quasi-périodique à utiliser. Nous définissons également les fréquences de résonance, nombres d'ondes longitudinaux et ondes normales.
Dans la section 3, nous rappelons quelques résultats sur le théorème de Rouché généralisé à une famille d'opérateurs méromorphes sur un domaine de $\mathbb{C}$ et sur la théorie de Fredholm analytique.
Dans la section 4, nous ramenons le problème de l'existence et de la distribution des

fréquences de résonance et de nombres d'ondes longitudinaux pour le système de Maxwell à celui de l'existence et de la distribution des valeurs caractéristiques pour des opérateurs intégraux définis sur la fente diélectrique de la cellule élémentaire du réseau. Nous démontrons ainsi dans les deux dernières sections l'existence d'un nombre infini de fréquences de résonance (complexes) proches de l'axe réel et d'un nombre infini de fréquences de résonance (réelles) sur l'axe réel. Les résonances complexes sont liées aux modes propagatifs dans la structure périodique. Nous démontrons aussi l'existence d' un nombre fini de nombres d'ondes longitudinaux proches de l'axe réel qui sont liées elles aussi aux modes de Bragg (i.e. les modes propagatifs) de la structure périodique.
Nous pouvons considérer notre structure périodique comme une perturbation de la situation de référence suivante

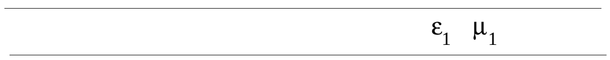

Figure 2 : *La structure de référence*

où nous avons remplacé les lames conductrices par un plan parfaitement conducteur que nous considérons comme un obstacle périodique de même période d. Il s'agit d'un guide fermé dans la direction e_y dont les fréquences de résonance sont situées sur la demi droite positive et sont exactement les pôles des noyaux de Green périodiques.
Ouvrir des petites fentes dans le plan conducteur perturbe ces fréquences de résonance sur l'axe réel et ajoute d'autres fréquences de résonance dans le demi-plan complexe inférieur qui correspondent aux modes propagatifs de la structure périodique. Ces fréquences de résonance restent proches de l'axe réel.
Dans la dernière section, nous généralisons cette approche à l'étude de fréquences de résonance dans une structure périodique constituée par des lames conductrices de largeur 2δ déposées périodiquement avec une période d sur une couche de diélectrique.
Notons enfin que les structures périodiques étudiées dans cet article correspondent à des antennes de "microslot" et "microstrip". Dans le langage des physiciens, une antenne de "microstrip" est une structure périodique constituée par des lames infiniment minces parfaitement conductrices de largeur petites déposées sur une couche de diélectrique et une antenne de "microslot" est telle que la largeur de la fente de diélectrique entre deux lames consécutives est petite (voir figure 1). Les effets des "microstrip" et "microslot" sur la réflexion des ondes électromagnétiques ont fait l'objet de très nombreuses études de la part des physiciens et des ingénieurs (voir par exemple [5], [8], [10], [12], [18], [19], [22], [24], [31], [32], [40], [41], [56], [60], [62]). Cette liste de travaux n'est pas exhaustive mais elle met en évidence l'importance et la nécessité d'une compréhension précise des effets des "microstrip" en vu des applications industrielles.

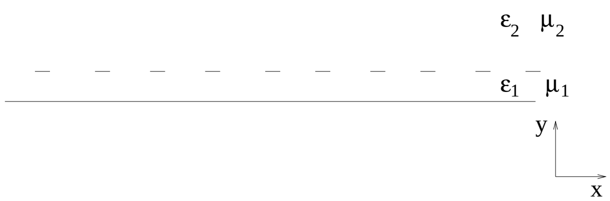

Figure 3 : *La deuxième structure périodique*

2 Position du problème et définitions

Nous cherchons les solutions $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ (x,y,z,t) des équations de Maxwell :

$$(1) \qquad \begin{cases} \varepsilon\, \partial_t \mathcal{E} - \mathrm{rot}\mathcal{H} \;=\; 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta, \\ \mu\, \partial_t \mathcal{H} + \mathrm{rot}\mathcal{E} \;=\; 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta, \\ \mathcal{E} \,\wedge\, e_y \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\delta, \\ \mathcal{H}\,.\,e_y \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\delta, \end{cases}$$

ayant la dépendance suivante en z et t:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x,y,z,t) &= E(x,y)\, e^{i\gamma z - ikt}, \\ \mathcal{H}(x,y,z,t) &= H(x,y)\, e^{i\gamma z - ikt}, \end{aligned}$$

et vérifiant une condition de radiation que nous préciserons dans la suite.
Nous nous intéressons à deux problèmes:
Dans un premier temps, le paramètre γ est fixé, réel et on recherche les valeurs de k dans le plan complexe telles que le système homogène précédent admette une solution non triviale (E, H).
Dans un deuxième temps, nous traitons le problème inverse qui consiste à choisir k comme paramètre et à chercher les valeurs de γ (fonctions de k) pour lesquelles il existe deux champs non nuls E et H vérifiant les équations de Maxwell (1).
C'est ce second point de vue qui est généralement adopté par les physiciens.
Nous obtenons donc le système suivant:

$$(2) \qquad \begin{cases} \varepsilon\, \partial_t \Big(E(x,y)\, e^{i\gamma z - ikt}\Big) - \mathrm{rot}\Big(H(x,y)\, e^{i\gamma z - ikt}\Big) \;=\; 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta, \\ \mu\, \partial_t \Big(H(x,y)\, e^{i\gamma z - ikt}\Big) + \mathrm{rot}\Big(E(x,y)\, e^{i\gamma z - ikt}\Big) \;=\; 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta, \\ H(x,y)\,.\,e_y \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\delta, \\ E(x,y) \,\wedge\, e_y \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\delta. \end{cases}$$

Ce qui conduit à

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\Big(H(x,y)\, e^{i\gamma z}\Big) - ik\,\varepsilon\, E(x,y)\, e^{i\gamma z} \;=\; 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta, \\ \mathrm{rot}\Big(E(x,y)\, e^{i\gamma z}\Big) + ik\,\mu\, H(x,y)\, e^{i\gamma z} \;=\; 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta, \\ E(x,y) \,\wedge\, e_y \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\delta. \end{cases}$$

Si on élimine le champ H dans les équations précédentes, nous obtenons

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\,\dfrac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\Big(E(x,y)\, e^{i\gamma z}\Big) - k^2 \varepsilon\, E(x,y)\, e^{i\gamma z} \;=\; \quad \text{dans } \Omega^\delta, \\ E(x,y) \,\wedge\, e_y \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\delta. \end{cases}$$

Nous allons exploiter la structure périodique du réseau en décomposant le problème initial en une suite de problèmes associés à des comportements quasi-périodiques. Donnons tout d'abord une définition de la quasi-périodicité pour un champ régulier.

DEFINITION 2.1. *Soit ω dans l'intervalle $[0, 2\pi/d[$. Nous dirons qu'un champ régulier E est quasi-périodique en la variable x s'il vérifie*

$$E(x + d, y) \;=\; e^{i\omega d}\, E(x,y).$$

Cette définition peut être étendue dans un sens faible à des champs moins réguliers (voir par exemple [35]).
Dans les sections suivantes, nous chercherons les valeurs de k (à γ fixé) et les nombres d'ondes γ (à k fixé) pour lesquelles il existe des solutions non triviales de (4) quasi-périodiques pour ω dans l'intervalle $[0, 2\pi/d[$. La recomposition des solutions du problème initial à travers les solutions quasi-périodiques pour ω décrivant l'intervalle $[0, 2\pi/d[$ reste un problème très délicat. Les seuls résultats que nous connaissons dans cette direction sont dûs à C. Gérard [16].
Nous précisons maintenant la condition de radiation qu'il faut imposer à la solution E des équations de Maxwell (4). Soit E un champ quasi-périodique vérifiant (4). E est régulier pour y assez grand. Cette régularité pour $y \geq h' > h$ nous permet de décomposer le champ E en série de Fourier quasi-périodique:

$$E(x,y) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} E_j(y)\, e^{i(\omega + 2\pi j/d)x}, \quad y \geq h' > h, \tag{5}$$

où les coefficients E_j vérifient les équations différentielles suivantes

$$\frac{d^2 E_j}{dy^2} + \Big(k^2\, \varepsilon_2\, \mu_2 - (\omega + 2\pi j/d)^2 - \gamma^2\Big)\, E_j = 0.$$

Les résultats classiques de régularité locaux pour les opérateurs elliptiques permettent d'affirmer que la série (5) ainsi que toutes ses dérivées sont uniformément convergentes. Soit β_j défini par

$$\beta_j(\gamma, k) = \begin{cases} \sqrt{k^2\, \varepsilon_2\, \mu_2 - (\omega + 2\pi j/d)^2 - \gamma^2} & \text{si } k^2\, \varepsilon_2\, \mu_2 \geq (\omega + 2\pi j/d)^2 + \gamma^2, \\ i\sqrt{(\omega + 2\pi j/d)^2 + \gamma^2 - k^2 \varepsilon_2 \mu_2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

(lorsque k est réel) et M le sup des $|j|$ pour lesquels le coefficient β_j est réel ($M = 0$ si $\Im m\, k \neq 0$). L'entier M correspond au nombre de modes propagatifs de notre structure périodique.

DEFINITION 2.2. *Nous dirons qu'un champ $E(x,y)$ de la forme* (5) *vérifie la condition de radiation à l'infini si la quantité*

$$\partial_y\, E(x,y) - \sum_{|j| \leq M} i\, \beta_j(k)\, E_j(y = h')\, e^{i\beta_j (y - h')}\, e^{i(\omega + 2\pi j/d)x} \tag{6}$$

est à décroissance exponentielle lorsque y tend vers $+\infty$.
Les modes propagatifs sont les $E_j(y = h')\, e^{i\beta_j (y-h')}\, e^{i(\omega + 2\pi j/d)x}$ pour $|j| \leq M$.
Nous définissons maintenant les fréquences de résonance des équations de Maxwell (4) de la manière suivante.

DEFINITION 2.3. *Nous dirons que k dans le plan complexe est une fréquence de résonance pour les équations* (4) *associée à (γ, ω) s'il existe une solution non triviale $E(x,y)$ quasi-périodique aux équations de Maxwell* (4) *qui vérifie la condition de radiation* (6).
Nous allons définir les ondes normales et les nombres d'ondes longitudinaux de la manière suivante.

DEFINITION 2.4. *Si k est une fréquence de résonance associée à (γ, ω), nous dirons que $E(x,y)\, e^{i\gamma z}$ est une onde normale quasi-périodique associée à γ.*

DEFINITION 2.5. *Nous dirons que γ dans le plan complexe est un nombre d'onde longitudinal pour les équations* (4) *associée à (k, ω) s'il existe une solution non triviale $E(x,y)$ quasi-périodique aux équations de Maxwell* (4) *qui vérifie la condition de radiation* (6).

Nous vérifions que

$$\operatorname{rot}\Big(e^{i\gamma z}\, E(x,y)\Big) \;=\; e^{i\gamma z}\Big(\operatorname{rot}_{x,y} E + i\gamma e_z \,\wedge\, E\Big),$$

où l'opérateur $\operatorname{rot}_{x,y} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge$. Le problème consiste alors à trouver k à γ fixé ou γ à k fixé tel que les équations suivantes :

$$(7) \qquad \begin{cases} \operatorname{rot}_{x,y} \dfrac{1}{\mu} \operatorname{rot}_{x,y} E + i\gamma \operatorname{rot}_{x,y} \dfrac{1}{\mu} (e_z \,\wedge\, E) \\ +i\dfrac{\gamma}{\mu}\; e_z \,\wedge\, \operatorname{rot}_{x,y} E - \dfrac{\gamma^2}{\mu}\; e_z \,\wedge\, (e_z \,\wedge\, E) - k^2 \varepsilon\, E \;=\; 0, \quad \text{dans } \Omega^\delta, \\ E \,\wedge\, e_y \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\delta, \end{cases}$$

admettent une solution sortante (i.e. vérifiant la condition de radiation) non triviale. Il est facile de vérifier que toute solution faible E de (7) doit vérifier dans un sens faible les équations de saut suivantes à la traversée de la fente S_h^δ :

$$(8) \qquad \begin{cases} [\,\varepsilon\, E \,.\, e_y\,] \;=\; 0, \\ [\,\dfrac{1}{\mu} \operatorname{rot}_{x,y} E \,\wedge\, e_y + i\dfrac{\gamma}{\mu}\; (e_z \,\wedge\, E) \,\wedge\, e_y\,] \;=\; 0. \end{cases}$$

A ce stade, nous allons faire les remarques importantes suivantes.

Remarque 1 :

Si on prend $\gamma \,=\, 0$, les équations (4) se décomposent en deux équations de Helmholtz scalaires non couplées. La solution générale s'obtient en superposant un champ de type $\Big((E_x, E_y, 0), (0,0,H_z)\Big)$ et un champ de type $\Big((0,0,E_z), (H_x, H_y, 0)\Big)$ où $H_z \,=\, H_z(x,y)$ vérifie l'équation de Helmholtz quasi-périodique dans $\mathcal{O}^h$ avec une condition aux limites sur $\partial\mathcal{O}_h^c$ de type Neumann :

$$(9) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \dfrac{1}{\varepsilon\mu}\, \nabla\, H_z + k^2\, H_z \;=\; 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}^h, \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial y} \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}_h^c, \end{cases}$$

et $E_z \,=\, E_z(x,y)$ vérifie l'équation de Helmholtz quasi-périodique dans $\mathcal{O}^h$ avec une condition aux limites sur $\partial\mathcal{O}_h^c$ de type Dirichlet :

$$(10) \qquad \begin{cases} \Delta\, E_z + k^2\, \varepsilon\, \mu\, E_z \;=\; 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}^h, \\ E_z \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}_h^c. \end{cases}$$

Nous retrouvons alors un problème plus habituel qui consiste à chercher les fréquences de résonance du Laplacien quasi-périodique dans la cellule élémentaire $\mathcal{O}^h$ avec une condition aux limites de type Dirichlet ou Neumann sur le bord conducteur $\partial\mathcal{O}_h^c$. Les valeurs de k sur l'axe réel pour lesquelles il n'y a pas d'unicité pour les problèmes (9) ou (10) donnent des champs de type $\Big((E_x, E_y, 0), (0,0,H_z)\Big)$ ou de type $\Big((0,0,E_z), (H_x, H_y, 0)\Big)$ qui correspondent à des ondes guidées de la structure périodique dites de type TE (transverse électrique) ou TM (transverse magnétique). L'étude de l'existence de ces modes guidés, faite par Bonnet-Bendhia et Starling dans [3], est liée à l'étude spectrale de deux opérateurs A_{TE} et A_{TM} auto-adjoints, positifs, non-bornés, aux résolvantes non compactes. Cette étude est basée sur le principe de min-max [2].

Remarque 2 :

Si le paramètre réel γ est non nul alors nous ne pouvons pas décomposer les équations de Maxwell (4) en un système d'équations de Helmholtz découplées. L'opérateur (7) est linéaire en k^2 mais nonlinéaire en γ^2 puisqu'il dépend à la fois de γ et de γ^2. Nous avons choisi la méthode des opérateurs intégraux pour pouvoir traiter à la fois les deux problèmes qui consistent à chercher k en fonction de γ et γ en fonction de k. Cette méthode, comme nous allons la décrire dans la suite, nous permet de démontrer l'existence et la distribution des fréquences de résonance et des nombres d'ondes longitudinaux pour les équations de Maxwell (4). Nous allons caractériser les ondes normales comme solutions d'un système de trois équations intégrales couplées et les fréquences de résonance et les nombres d'ondes longitudinaux comme les valeurs caractéristiques d'une famille d'opérateurs intégraux. Nous obtenons deux types d'ondes normales solutions de ce système d'équations intégrales.

La méthode des opérateurs intégraux utilise d'une manière essentielle le théorème de Rouché généralisé que nous allons énoncer dans la section suivante.

Notons enfin que cette méthode a été très largement utilisée par l'école russe pour déterminer les ondes normales dans plusieurs autres situations géométriques (voir par exemple les travaux de Repin, Y. V. Shestopalov, V. P. Shestopalov, Il'inskii, Chernokozhim, Lozhechko, Sirenko, Mutallimov, Smirnov, Fomin, Sherman, [39], [45], [46], [47], [49], [50], [26], [27], [7], [15], [44], [51]).

3 Théorème de Rouché généralisé et théorie de Fredholm analytique

Dans cette section, nous rappelons brièvement le théorème de Rouché généralisé dû à Gohberg et Sigal. Nous nous appuierons sur la présentation faite dans [17].

Soient $A(\lambda)$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ et Γ une courbe simple rectifiable fermée délimitant un domaine G.

DEFINITION 3.1. *Soit $A(\lambda)$ une famille d'opérateurs holomorphes dans un voisinage de λ_0, privé de λ_0. Nous dirons que λ_0 est une valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $A(\lambda)$ si il existe une fonction de λ à valeurs dans $\mathcal{B}$, notée $\Phi(\lambda)$, holomorphe et non nulle dans un voisinage de λ_0 telle que $A(\lambda)\,\Phi(\lambda)$ soit holomorphe au voisinage de λ_0 et nulle en λ_0. L'ordre du zéro λ_0 de la fonction $\lambda \mapsto A(\lambda)\,\Phi(\lambda)$ est appelé la multiplicité de $\Phi(\lambda)$.*

Le vecteur $\Phi_0 = \Phi(\lambda_0)$ est appelé le vecteur propre de $A(\lambda)$ associé à la valeur caractéristique λ_0. On définit son rang comme le maximum des multiplicités de toutes les fonctions $\Phi(\lambda)$ telles que $\Phi(\lambda_0) = \Phi_0$. La fermeture dans $\mathcal{B}$ de l'espace de vecteurs propres Φ_0 associés à λ_0 est le noyau de $A(\lambda)$ en λ_0 et noté $Ker\, A(\lambda_0)$. Pour simplifier notre exposé, nous supposons que $Ker\, A(\lambda_0)$ est de dimension finie égale à α. Notons par $\Phi_0^{(j)}$ pour $j \in \{1, \ldots, \alpha\}$ une base de $Ker\, A(\lambda_0)$, par r_j le rang de Φ_0^j et par $N(A(\lambda_0))$ l'entier $\displaystyle\sum_{j=1}^{\alpha} r_j$.

DEFINITION 3.2. *Si $A(\lambda)$ est holomorphe au point λ_0 et si $A(\lambda_0)$ est inversible alors λ_0 est un point régulier de la famille $A(\lambda)$.*

DEFINITION 3.3. *La multiplicité de λ_0 est définie par*

$$M(A(\lambda_0)) = N(A(\lambda_0)) - N(A^{-1}(\lambda_0)).$$

Remarquons que λ_0 peut être à la fois une valeur caractéristique de la famille $A(\lambda)$ et de $A^{-1}(\lambda)$. Si λ_0 n'est pas valeur caractéristique de $A^{-1}(\lambda)$ alors $M(A(\lambda_0)) = N(A(\lambda_0))$ et si elle n'est ni valeur caractéristique de $A(\lambda)$, ni de $A^{-1}(\lambda)$ alors $M(A(\lambda_0)) = 0$.
Soit λ_0 un pôle de la famille d'opérateurs $A(\lambda)$. Dans un voisinage de λ_0 nous pouvons écrire $A(\lambda)$ sous la forme

$$A(\lambda) = \sum_{j=-n}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^j A_j, \tag{11}$$

où les opérateurs A_j sont des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{B}$ et n est un entier naturel. La série de Laurent (11) converge normalement

$$\sum_{j=-n}^{+\infty} |\lambda - \lambda_0|^j \, ||A_j|| < +\infty.$$

Si les opérateurs A_j sont de dimension finie au point λ_0 ($A_j(\mathcal{B})$ est de dimension finie pour tout $j \geq -n$) alors la famille $A(\lambda)$ est dite méromorphe finie au point λ_0. Si elle admet un nombre fini de pôles de méromorphie dans un domaine G et qu'elle est méromorphe finie en chacun de ces points, nous dirons qu'elle est méromorphe dans G.

DEFINITION 3.4. *Nous dirons que $A(\lambda)$ est de type Fredholm au point λ_0 si $Im\, A_0$ est fermé, $Ker\, A_0$ est de dimension finie et $dim\mathcal{B}/Im\, A_0$ est finie où A_0 est définie par la série de Laurent* (11).
Si $A(\lambda)$ est de type Fredholm en tout point d'un domaine G, nous dirons qu'il est de type Fredholm dans G.

DEFINITION 3.5. *λ_0 est une valeur normale par rapport à la famille d'opérateurs $A(\lambda)$ si $A(\lambda)$ est méromorphe finie, de type Fredholm au point λ_0 et s'il existe un disque autour de λ_0 non réduit à λ_0 dans lequel tous les points sont des points réguliers de la famille $A(\lambda)$, sauf éventuellement λ_0 .*
Nous énonçons quelques lemmes utiles dans la suite dont on peut trouver les démonstrations dans [17].

LEMME 1. *Tout point normal de $A(\lambda)$ est un point normal de $A^{-1}(\lambda)$.*

LEMME 2. *Si λ_0 est un pôle de $A(\lambda)$ ou de $A^{-1}(\lambda)$ alors il est une valeur caractéristique de l'autre avec multiplicité finie.*

Nous donnons maintenant une définition importante :

DEFINITION 3.6. *La famille d'opérateurs $A(\lambda)$ est dite normale par rapport à la courbe Γ si $A(\lambda)$ est inversible en tout point λ de $G \cup \Gamma$ sauf pour un nombre fini de points de G qui sont des points normaux de $A(\lambda)$.*
Nous définissons la multiplicité d'une famille d'opérateurs $A(\lambda)$ par :

DEFINITION 3.7. *Soit $A(\lambda)$ une famille normale par rapport à la courbe Γ. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs caractéristiques et les pôles de $A(\lambda)$ dans G. La multiplicité de la famille $A(\lambda)$ par rapport à Γ est définie par*

$$M(A(\lambda), \Gamma) = \sum_{j=1}^{n} M(A(\lambda_j)).$$

THÉORÈME 1. *Soit $A(\lambda)$ une famille d'opérateurs normale par rapport à la courbe Γ. Soit $S(\lambda)$ une autre famille d'opérateurs méromorphe finie dans G et continue sur Γ. Si $S(\lambda)$ vérifie l'inégalité suivante*

$$||A^{-1}(\lambda)\, S(\lambda)|| < 1,$$

pour tout λ sur Γ alors la famille $B(\lambda) = A(\lambda) + S(\lambda)$ est aussi normale par rapport à Γ et elle a la même multiplicité (au sens de la définition 3.7) que la famille $A(\lambda)$.

Les familles d'opérateurs normales par rapport à une courbe simple rectifiable fermée peuvent être caractérisées par le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *La famille d'opérateurs $A(\lambda)$ est normale par rapport à Γ si et seulement si elle est méromorphe finie, de type Fredholm dans le domaine G délimité par la courbe Γ, continue sur Γ et $A(\lambda)$ est inversible pour tout λ sur Γ.*

Enfin, nous rappelons l'alternative de Fredholm analytique.

THÉORÈME 3. *Soit $A(\lambda)$ une famille d'opérateurs méromorphe finie de type Fredholm dans un domaine G. Si $A(\lambda)$ est inversible en un point de G alors $A(\lambda)$ admet une inverse bornée pour tout point λ dans G sauf au plus pour un ensemble de points isolés.*

Ce théorème dû à Gohberg et Sigal [17] est une généralisation du théorème de Steinberg [52] pour l'opérateur identité plus une famille analytique d'opérateurs compacts.

4 Opérateurs intégraux

Nous commençons par fixer ω dans l'intervalle $[0, 2\pi/d[$. Nous ramenons ainsi le système de Maxwell (1) à une famille de problèmes dépendant du paramètre ω posés dans une cellule élémentaire. Nous réécrivons les équations (4) dans la cellule élémentaire. Ce qui conduit à trois équations de Helmholtz scalaires périodiques posées dans $\mathcal{O}^h$. Les deux dernières font intervenir la première par les conditions de saut. Nous obtenons une représentation intégrale des trois composantes du champ électrique sur la fente à l'aide des noyaux de Green périodiques que nous explicitons. Nous exprimons les conditions de saut dans les équations (12), (13) et (14) à l'aide de cette représentation intégrale et nous obtenons ainsi le système d'équations intégrales (37) écrit sur la fente S_h^δ. Nous ramenons ainsi la recherche des fréquences de résonance (à γ fixé) et des nombres d'ondes longitudinaux (à k fixé) à l'étude des valeurs caractéristiques des familles d'opérateurs intégraux dont nous étudions la dépendance en k et γ dans les sections suivantes.

LEMME 3. *Les équations* (7) *avec les conditions de transmission* (8) *conduisent, aux trois équations scalaires suivantes :*

$$(12) \qquad \begin{cases} \Delta_\omega E_y + (k^2\varepsilon\mu - \gamma^2) E_y = 0, & \text{dans } \mathcal{O}^h = \mathcal{O}_1^h \cup \mathcal{O}_2^h, \\ [\, \dfrac{\partial E_y}{\partial y} \,] = 0 \text{ et } [\, \varepsilon E_y \,] = \varepsilon_1 E_y^1 - \varepsilon_2 E_y^2 = 0, & \text{sur } S_h^\delta, \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{O}_h^c, \end{cases}$$

$$(13) \qquad \begin{cases} \Delta_\omega E_x + \left(k^2\varepsilon\mu - \gamma^2\right) E_x = 0, & \text{dans } \mathcal{O}^h, \\ [\, E_x \,] = 0 \text{ et } [\, \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial E_x}{\partial y} \,] = \left(\dfrac{1}{\mu_1} - \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\mu_2}\right)\left(i\omega E_y^1 + \dfrac{\partial E_y^1}{\partial x}\right), & \text{sur } S_h^\delta, \\ E_x = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{O}_h^c, \end{cases}$$

et

$$(14) \qquad \begin{cases} \Delta_\omega E_z + \left(k^2\varepsilon\mu - \gamma^2\right) E_z = 0, & \text{dans } \mathcal{O}^h, \\ [\, E_z \,] = 0 \text{ et } [\, \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial E_z}{\partial y} \,] = i\,\gamma\left(\dfrac{1}{\mu_1} - \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\mu_2}\right)E_y^1, & \text{sur } S_h^\delta, \\ E_z = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{O}_h^c, \end{cases}$$

où l'opérateur $\Delta_\omega = (\partial_x + i\omega)^2 + \partial_y^2, E(x,y,\omega,\gamma) = \Big(E_x, E_y, E_z\Big)$ *et* E_y^1 *est la trace sur la fente* S_h^δ *de la valeur de* E_y *dans* $\mathcal{O}_1^h$.
Nous rappelons que les trois composantes du champ électrique E_x, E_y, et E_z sont périodiques en la variable x de période d.
Preuve du Lemme 3. Il est facile de voir que

$$\operatorname{div}\Big(e^{i\gamma z + i\omega x}\,E(x,y)\Big) = \Big(i\omega E_x + \partial_x E_x + \partial_y E_y + i\gamma E_z\Big)\,e^{i\gamma z + i\omega x}.$$

Ce qui conduit aux deux relations suivantes

$$-\partial_y E_y = i\omega E_x + \partial_x E_x + i\gamma E_z, \tag{15}$$

et

$$-\partial_{xy}^2 E_y = i\omega \partial_x E_x + \partial_{x^2}^2 E_x + i\gamma \partial_x E_z. \tag{16}$$

D'après (7), nous avons

$$i\omega \partial_y E_y + \partial_{xy}^2 E_y - \partial_{y^2}^2 E_x + \gamma^2 E_x - \omega\gamma E_z + i\gamma \partial_x E_z - k^2 \varepsilon\mu E_x \;=\; 0.$$

En combinant la dernière identité avec les relations (15) et (16), nous obtenons

$$\Big((\partial_x + i\omega)^2 + \partial_y^2\Big)E_x + (k^2\varepsilon\mu - \gamma^2)E_x \;=\; 0.$$

Les équations de Maxwell (7) conduisent aussi aux équations suivantes sur les composantes E_y et E_z du champ électrique E

$$i\gamma\partial_y E_z + \gamma^2 E_y + \omega^2 E_y - i\omega\partial_x E_y - \partial_{x^2}^2 E_y - i\omega\partial_x E_y + i\omega\partial_y E_x + \partial_{xy}^2 E_x - k^2\varepsilon\mu E_y \;=\; 0,$$

et

$$i\gamma\partial_x E_x - \gamma\omega E_x - i\omega\partial_x E_z + \omega^2 E_z - \partial_{x^2}^2 E_z - i\omega\partial_x E_z - \partial_{y^2}^2 E_z + i\omega\partial_y E_y - k^2\varepsilon\mu E_z \;=\; 0.$$

En utilisant encore une fois les relations (15) et (16), nous obtenons

$$\Big((\partial_x + i\omega)^2 + \partial_y^2\Big)E_y + (k^2\varepsilon\mu - \gamma^2)E_y \;=\; 0,$$

et

$$\Big((\partial_x + i\omega)^2 + \partial_y^2\Big)E_z + (k^2\varepsilon\mu - \gamma^2)E_z \;=\; 0.$$

Les conditions de saut (8) à la traversée de la fente S_h^δ et la formule (15) conduisent à

$$[\,E_x\,] \;=\; 0, [\,E_z\,] \;=\; 0, [\,\varepsilon E_y\,] \;=\; 0, \quad \text{sur } S_h^\delta,$$

$$[\,\frac{\partial E_y}{\partial y}\,] \;=\; 0, [\,\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_x}{\partial y}\,] \;=\; [\,\frac{1}{\mu}\Big(i\omega E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x}\Big)\,]\,, \quad \text{sur } S_h^\delta,$$

et

$$[\,\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial y}\,] \;=\; i\,\gamma\,[\,\frac{1}{\mu}E_y\,]\,, \quad \text{sur } S_h^\delta.$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 3.

Nous allons chercher k dans $\mathbb{C}$ tel qu' il existe une solution non triviale (E_x, E_y, E_z) aux équations $(12), (13)$ et (14). Nous avons tout d'abord le lemme suivant.

LEMME 4. *Si* $\Im m\, k^2 > 0$ *et* γ *est réel alors la solution triviale est l'unique solution du système d' équations* $(12), (13)$ *et* (14).

Preuve du Lemme 4. Nous démontrons tout d'abord que si $\Im m\, k^2 > 0$ et γ est sur l'axe réel alors la solution triviale est l'unique solution de (12). Comme E_y vérifie la condition de radiation alors

$$\partial_y E_y(x, y = h') \;=\; \sum_{l \in \mathbb{Z}} i\beta_l E_y^l \, e^{i(\omega + 2\pi l/d)x},$$

où h' est un réel strictement supérieur à h et les coefficients E_y^l sont tels que

$$E_y(x, y = h') \;=\; \sum_{l \in \mathbb{Z}} E_y^l \, e^{i(\omega + 2\pi l/d)x}.$$

. Nous en déduisons que

$$\int_{-d/2}^{d/2} \partial_y E_y(x, y = h') \, \overline{E}_y(x, y = h') \; dx \;=\; \sum_{l \in \mathbb{Z}} i\beta_l \, |E_y^l|^2,$$

et donc

$$\Im m \int_{-d/2}^{d/2} \partial_y E_y(x, y = h') \, \overline{E}_y(x, y = h') \; dx \;\geq\; 0. \tag{17}$$

La solution est régulière dans chacun des domaines $\mathcal{O}_1^h$ et $\mathcal{O}_{h'} = \mathcal{O}_2^h \cap \{y < h'\}$. En intégrant par parties dans chacun des domaines $\mathcal{O}_1^h$ et $\mathcal{O}^{h'}$, nous obtenons les deux relations suivantes

$$\int_{\mathcal{O}_1^h} |(\partial_x + i\omega)E_y|^2 + \int_{\mathcal{O}_1^h} |\partial_y E_y|^2 - \int_{\mathcal{O}_1^h} (k^2\varepsilon_1\mu_1 - \gamma^2)|E_y|^2 - \int_{S_h^\delta} \partial_y E_y \, \overline{E}_y^1 \;=\; 0,$$

et

$$\int_{\mathcal{O}_{h'}} |(\partial_x + i\omega)E_y|^2 + \int_{\mathcal{O}_{h'}} |\partial_y E_y|^2 - \int_{\mathcal{O}_{h'}} (k^2\varepsilon_2\mu_2 - \gamma^2)|E_y|^2 + \int_{S_h^\delta} \partial_y E_y \, \overline{E}_y^2$$
$$- \int_{-d/2}^{d/2} \partial_y E_y(x, y = h') \, \overline{E}_y(x, y = h') \; dx \;=\; 0.$$

En multipliant la première équation par ε_1 et la deuxième par ε_2 et en sommant les deux quantités, nous obtenons grâce à la condition de saut vérifiée par E_y la relation suivante

$$\varepsilon_1 \int_{\mathcal{O}_1^h} |(\partial_x + i\omega)E_y|^2 + \varepsilon_1 \int_{\mathcal{O}_1^h} |\partial_y E_y|^2 - \varepsilon_1 \int_{\mathcal{O}_1^h} (k^2\varepsilon_1\mu_1 - \gamma^2)|E_y|^2$$
$$+\varepsilon_2 \int_{\mathcal{O}_{h'}} |(\partial_x + i\omega)E_y|^2 + \varepsilon_2 \int_{\mathcal{O}_{h'}} |\partial_y E_y|^2 - \varepsilon_2 \int_{\mathcal{O}_{h'}} (k^2\varepsilon_2\mu_2 - \gamma^2)|E_y|^2$$
$$-\varepsilon_2 \int_{-d/2}^{d/2} \partial_y E_y(x, y = h') \, \overline{E}_y(x, y = h') \; dx \;=\; 0.$$

Il suffit de prendre la partie imaginaire de la quantité à gauche pour obtenir grâce à (17) le résultat voulu pour l'équation (12). De façon analogue, nous obtenons le même résultat pour les équations (13) et (14). En effet, si u désigne E_x ou E_z, il est facile de voir que

$$\int_{\mathcal{O}_1^h \cup \mathcal{O}_{\langle'}} \frac{1}{\mu} |(\partial_x + i\omega)u|^2 + \int_{\mathcal{O}_1^h \cup \mathcal{O}_{\langle'}} \frac{1}{\mu} |(\partial_y u|^2 - \int_{\mathcal{O}_1^h \cup \mathcal{O}_{\langle'}} (k^2\varepsilon - \frac{\gamma^2}{\mu})|u|^2$$
$$- \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{\mu} \partial_y u(x, y = h') \, \overline{u}(x, y = h') \; dx \;=\; 0.$$

Comme (17) est vérifiée par trois composantes du champ électrique E, l'identité précédente nous permet de conclure.

Nous considérons maintenant les noyaux de Green périodiques $\mathcal{G}_j^D$ et $\mathcal{G}_j^N$ définis dans $\mathcal{O}_j^h$ par les expressions suivantes :

$$\mathcal{G}_1^D(\gamma,\omega,k,x,y,x',y') \;=\; -\frac{2}{dh}\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi l(x-x')/d}\frac{\sin(j\pi y/h)\,\sin(j\pi y'/h)}{(j\pi/h)^2+(\omega-2\pi l/d)^2+\gamma^2-k^2\varepsilon_1\mu_1},$$

$$\mathcal{G}_1^N(\gamma,\omega,k,x,y,x',y') \;=\; -\frac{2}{dh}\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi l(x-x')/d}\frac{\cos(j\pi y/h)\,\cos(j\pi y'/h)}{(j\pi/h)^2+(\omega-2\pi l/d)^2+\gamma^2-k^2\varepsilon_1\mu_1},$$

$$\mathcal{G}_2^D(\gamma,\omega,k,x,y,x',y') \;=\; \frac{1}{d}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{i\beta_l}e^{i2\pi l(x-x')/d}\Big(e^{i\beta_l|y-h-(y'-h)|}-e^{i\beta_l|y-h+(y'-h)|}\Big),$$

et

$$\mathcal{G}_2^N(\gamma,\omega,k,x,y,x',y') \;=\; \frac{1}{d}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{i\beta_l}e^{i2\pi l(x-x')/d}\Big(e^{i\beta_l|y-h-(y'-h)|}+e^{i\beta_l|y-h+(y'-h)|}\Big),$$

où

$$\beta_l^2 = k^2\varepsilon_2\mu_2-(\omega-2\pi l/d)^2-\gamma^2,$$

avec $\Im m\beta_l \geq 0$, pour tout $l\in\mathbb{Z}$ (l'hypothèse $\Im m\beta_l\geq 0$ traduit la condition de radiation sortante à l'infini). Remarquons que dans les deux dernières séries infinies il n'y a qu'un nombre fini de termes oscillants si $k>0$. Les autres termes sont à décroissance exponentielle. D'autre part, si k est à partie imaginaire strictement positive, alors tous les termes sont à décroissance exponentielle. Les noyaux $\mathcal{G}_1^N$ et $\mathcal{G}_1^D$ sont de carrés sommables dans $\mathcal{O}_1^h$ et les noyaux $\mathcal{G}_2^N$ et $\mathcal{G}_2^D$ sont localement de carrés sommables dans $\mathcal{O}_2^h$.
Il est classique de vérifier que les noyaux périodiques $\mathcal{G}_j^D$ et $\mathcal{G}_j^N$ satisfont les équations $(18),(18)',(19)$ et $(19)'$ (voir [35] et [9] par exemple).

LEMME 5. *Les noyaux $\mathcal{G}_j^D$ et $\mathcal{G}_j^N$ vérifient dans $\mathcal{O}_j^h$ au sens des distributions les équations suivantes :*

$$\text{(18)}\quad \begin{cases}\Delta_{-\omega}\,\mathcal{G}_1^D+(k^2\varepsilon_1\mu_1-\gamma^2)\,\mathcal{G}_1^D \;=\; \delta_{per},\\ \mathcal{G}_1^D \;=\; 0,\quad \text{sur } y=0 \text{ et } y=h,\end{cases}\qquad (18)'\begin{cases}\Delta_{-\omega}\,\mathcal{G}_1^N+(k^2\varepsilon_1\mu_1-\gamma^2)\,\mathcal{G}_1^N \;=\; \delta_{per},\\ \partial_y\,\mathcal{G}_1^N \;=\; 0,\quad \text{sur } y=0 \text{ et } y=h,\end{cases}$$

et

$$\text{(19)}\quad \begin{cases}\Delta_{-\omega}\,\mathcal{G}_2^D+(k^2\varepsilon_2\mu_2-\gamma^2)\,\mathcal{G}_2^D \;=\; \delta_{per},\\ \mathcal{G}_2^D \;=\; 0,\quad \text{sur } y=h,\end{cases}\qquad (19)'\begin{cases}\Delta_{-\omega}\,\mathcal{G}_2^N+(k^2\varepsilon_2\mu_2-\gamma^2)\,\mathcal{G}_2^N \;=\; \delta_{per},\\ \partial_y\,\mathcal{G}_2^N \;=\; 0,\quad \text{sur } y=h,\end{cases}$$

où la masse de Dirac périodique δper est définie par

$$\delta_{per}(x-x',y-y') \;=\; \frac{1}{d}\sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{-i2\pi l/d\,(x-x')}\otimes\delta_{y-y'=0},$$

et $\Delta_{-\omega}=(\partial_x-i\omega)^2+\partial_y^2$.

D'après [35], [6] et [23], les noyaux $\mathcal{G}_2^D$ et $\mathcal{G}_2^N$ ont une singularité logarithmique. Les noyaux $\mathcal{G}_1^D$ et $\mathcal{G}_1^N$ ont aussi la même singularité. Nous avons le lemme suivant:

LEMME 6. (**singularité logarithmique**) *Il existe quatre constantes non nulles* $\left(c_j^{(i)}\right)_{i,j=1,2}$ *et quatre noyaux continûement différentiables* $\left(\mathcal{N}_j^{(i)}\right)_{i,j=1,2}$ *tels que*

$$\mathcal{G}_j^{(N)}(\gamma,\omega,k,x,y,x',y') \;=\; c_j^{(1)}\;\ln\Big(|x-x'|+|y-y'|\Big)+\mathcal{N}_j^{(1)}(\gamma,\omega,k,x,y,x',y'), \tag{20}$$

et

$$\mathcal{G}_j^{(D)}(\gamma,\omega,k,x,y,x',y') \;=\; c_j^{(2)}\;\ln\Big(|x-x'|+|y-y'|\Big)+\mathcal{N}_j^{(2)}(\gamma,\omega,k,x,y,x',y'). \tag{21}$$

Preuve du Lemme 6. La singularité logarithmique des noyaux $\mathcal{G}_j^D$ et $\mathcal{G}_j^N$ s'obtient à partir des trois formules suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{l}\cos\Big(2\pi l\frac{(x-x')}{d}\Big)\;e^{-2\pi l|y-y'|/d} \;&=\; -\frac{1}{2}\;\ln\Big(\sinh^2\pi\;\frac{|y-y'|}{d}+\sin^2\pi\frac{(x-x')}{d}\Big)\\ &\quad -\ln 2+\pi\frac{|y-y'|}{d},\end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{l}\sin\Big(2\pi l\frac{(x-x')}{d}\Big)\;e^{-2\pi l|y-y'|/d} \;=\; i\;\tan^{-1}\frac{\sin 2\pi\frac{(x-x')}{d}}{e^{2\pi\frac{|y-y'|}{d}}-\cos 2\pi\frac{(x-x')}{d}},$$

et

$$\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\cos lx}{l^2+a^2} \;=\; -\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi}{2a}\frac{\cosh\,(x-\pi)\,a}{\sinh\,\pi a}.$$

Un calcul explicite donne $c_1^{(1)}=c_2^{(1)}=1/\pi$.

Nous écrivons maintenant les équations intégrales vérifiées par E_x, E_y et E_z.

THÉORÈME 4. *E_x, E_y et E_z vérifient les équations intégrales suivantes sur S_h^δ :*

$$\int_{-\delta}^{\delta}\Big(\varepsilon_1\mathcal{G}_1^N+\varepsilon_2\mathcal{G}_2^N\Big)(\gamma,x,h,x',h)\;\frac{\partial E_y}{\partial y}(x',h)\;dx' \;=\; 0,\quad \forall\;(x,h)\in S_h^\delta, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&v.p.\;\int_{-\delta}^{\delta}\Big(\frac{1}{\mu_1}\partial^2_{yy'}\;\mathcal{G}_1^D+\frac{1}{\mu_2}\partial^2_{yy'}\;\mathcal{G}_2^D\Big)(\gamma,x,h,x',h)\;E_x(x',h)\;dx'\\ &=\Big(\frac{1}{\mu_1}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\mu_2}\Big)\Big(i\omega E_y^1(x,h)+\frac{\partial E_y^1}{\partial x}(x,h)\Big),\quad \forall\;(x,h)\in S_h^\delta,\end{aligned} \tag{23}$$

et

$$\begin{aligned}&v.p.\;\int_{-\delta}^{\delta}\Big(\frac{1}{\mu_1}\partial^2_{yy'}\;\mathcal{G}_1^D+\frac{1}{\mu_2}\partial^2_{yy'}\;\mathcal{G}_2^D\Big)(\gamma,x,h,x',h)\;E_z(x',h)\;dx'\\ &=\;i\gamma\Big(\frac{1}{\mu_1}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\mu_2}\Big)E_y^1(x,h),\quad \forall\;(x,h)\in S_h^\delta.\end{aligned} \tag{24}$$

Preuve du Théorème 4. Nous allons utiliser la formule de Green avec la fonction E_y d'une part, et les fonctions $\mathcal{G}_1^N$ et $\mathcal{G}_2^N$ d'autre part. Nous avons la représentation intégrale suivante

$$E_y(x,y) \;=\; -\int_{-\delta}^{\delta}\mathcal{G}_1^N(\gamma,x,y,x',h)\;\frac{\partial E_y}{\partial y}(x',h)\;dx',\quad y<h. \tag{25}$$

Par intégrations par parties dans le domaine $\mathcal{O}_2^h \cap \{y < h'\}$ où $h' > h$, nous obtenons

$$E_y(x,y) \;=\; \int_{-\delta}^{\delta} \mathcal{G}_2^N(\gamma,x,y,x',h)\,\frac{\partial E_y}{\partial y}(x',h)\,dx' - \int_{-d/2}^{d/2} \mathcal{G}_2^N(\gamma,x,y,x',h')\,\frac{\partial E_y}{\partial y}(x',h')\,dx'$$
$$+\int_{-d/2}^{d/2} \frac{\partial \mathcal{G}_2^N}{\partial y}(\gamma,x,y,x',h')\;E_y(x',h')\,dx'.$$

En utilisant la condition de radiation, on montre que le terme

$$\int_{-d/2}^{d/2} \mathcal{G}_2^N(\gamma,x,y,x',h')\,\frac{\partial E_y}{\partial y}(x',h')\,dx' - \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\partial \mathcal{G}_2^N}{\partial y}(\gamma,x,y,x',h')\;E_y(x',h')\,dx',$$

tend vers zéro lorsque h' tend vers l'infini (voir par exemple [35]). Nous en déduisons la représentation intégrale suivante

$$E_y(x,y) \;=\; \int_{-\delta}^{\delta} \mathcal{G}_2^N(\gamma,x,y,x',h)\,\frac{\partial E_y}{\partial y}(x',h)\,dx', \quad y > h. \tag{26}$$

De la relation de saut $[\varepsilon E_y\ ] = 0$ à la traversée de S_h^δ, nous en déduisons que $\partial_y E_y(x,h)$ vérifie l'équation intégrale (22). D'une manière analogue, nous obtenons la représentation intégrale suivante pour la composante E_x

$$E_x(x,y) \;=\; \int_{-\delta}^{\delta} \partial_{y'}\,\mathcal{G}_1^D(\gamma,x,y,x',y'=h)\;\;E_x(x',h)\,dx', \quad y < h, \tag{27}$$

et

$$E_x(x,y) \;=\; -\int_{-\delta}^{\delta} \partial_{y'}\,\mathcal{G}_2^D(\gamma,x,y,x',h)\;E_x(x',h)\,dx', \quad y > h. \tag{28}$$

En prenant la dérivée par rapport à la variable y dans (27) et (28) et en faisant tendre y vers h, nous obtenons en exprimant la condition de saut vérifiée par $\partial_y E_x$ à la traversée de la fente S_h^δ et grâce aux propriétés bien connues du potentiel de double couche, l'équation intégrale (23). L'équation (24) s'obtient d'une manière tout à fait analogue à (23).

Remarquons que les opérateurs (22), (23) et (24) ne sont pas auto-adjoints. Nous avons donc ramené notre problème initial à l'étude d'une famille d'opérateurs non-autoadjoints. Soit $\Lambda(\gamma,\omega)$ la réunion de

$$\Lambda^s \;=\Big\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}\,\sqrt{(j\pi/h)^2+(\omega-2\pi l/d)^2+\gamma^2}, j\geq 1, l\in\mathbb{Z}\Big\}, \tag{29}$$

et

$$\Lambda^r \;=\Big\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}\,\sqrt{(\omega-2\pi l/d)^2+\gamma^2}, l\in\mathbb{Z}\Big\}. \tag{30}$$

Nous avons le lemme suivant.

LEMME 7. *Si $k \notin \Lambda(\gamma,\omega)$ alors les équations de Helmholtz* (12) $-$ (13) *et* (14) *sont équivalentes au système d' équations intégrales* (22) $-$ (23) *et* (24) *écrites sur la fente S_h^δ.*

Nous ramenons la recherche des fréquences de résonances k dans $\mathbb{C}$ et des nombres d'ondes longitudinaux γ à l'étude des valeurs caractéristiques des opérateurs intégraux $\mathcal{K}_1^\delta$ et $\mathcal{K}_2^\delta$ définis par

$$\mathcal{K}_1^\delta(\gamma,\omega,k)\Phi(x) \;=\; \int_{-\delta}^{\delta}\Big(\varepsilon_1\mathcal{G}_1^N+\varepsilon_2\mathcal{G}_2^N\Big)(\gamma,\omega,k,x,h,x',h)\;\Phi(x')\,dx', \tag{31}$$

et

$$(32)\ \mathcal{K}_2^\delta(\gamma,\omega,k)\psi(x) \;=\; v.p. \int_{-\delta}^{\delta} \Big(\frac{1}{\mu_1}\partial^2_{yy'}\,\mathcal{G}_1^D + \frac{1}{\mu_2}\partial^2_{yy'}\,\mathcal{G}_2^D\Big)(\gamma,\omega,k,x,h,x',h)\ \psi(x')\ dx'.$$

Nous allons extraire dans le lemme suivant les singularités des opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta$ et $\mathcal{K}_2^\delta$ pour pouvoir appliquer dans la section suivante l'alternative de Fredholm analytique.

LEMME 8. *Les opérateurs intégraux $\mathcal{K}_1^\delta$ et $\mathcal{K}_2^\delta$ s'écrivent*

$$(33)\quad \mathcal{K}_1^\delta(\gamma,\omega,k)\Phi(x) \;=\; (\varepsilon_1 c_1^{(1)} + \varepsilon_2 c_2^{(1)}) \int_{-\delta}^{\delta} \ln|x-x'|\ \Phi(x')\ dx' + \mathcal{R}_1^\delta(\gamma,\omega,k)\ \Phi(x),$$

et

$$(34)\ \mathcal{K}_2^\delta(\gamma,\omega,k)\psi(x) \;=\; -(\frac{c_1^{(2)}}{\mu_1} + \frac{c_2^{(2)}}{\mu_2})\, v.p. \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|x-x'|^2}\ \psi(x')\ dx' + \mathcal{R}_2^\delta(\gamma,\omega,k)\ \psi(x),$$

où les noyaux des opérateurs intégraux $\mathcal{R}_1^\delta$ et $\mathcal{R}_2^\delta$ sont continûement différentiables.

Preuve du Lemme 8. L'expression (33) est une conséquence directe de la singularité logarithmique des noyaux $\mathcal{G}_1^N$ et $\mathcal{G}_2^N$ démontrée dans le Lemme 6.

Nous définissons les deux opérateurs intégraux $\mathcal{K}_3^\delta(\gamma,\omega,k)$ et $\mathcal{K}_4^\delta(\gamma,\omega,k)$ par

$$(35)\quad \begin{aligned} \mathcal{K}_3^\delta(\gamma,\omega,k)\Phi(x) \;&=\; i\omega\Big(\frac{1}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\mu_2}\Big) \int_{-\delta}^{\delta} \mathcal{G}_1^N(\gamma,\omega,k,x,h,x',h)\ \Phi(x')\ dx' \\ &\quad + \Big(\frac{1}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\mu_2}\Big) \int_{-\delta}^{\delta} \partial_x\, \mathcal{G}_1^N(\gamma,\omega,k,x,h,x',h)\ \Phi(x')\ dx', \end{aligned}$$

et

$$(36)\qquad \mathcal{K}_4^\delta(\gamma,\omega,k)\Phi(x) \;=\; i\gamma\Big(\frac{1}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\mu_2}\Big) \int_{-\delta}^{\delta} \mathcal{G}_1^N(\gamma,\omega,k,x,h,x',h)\ \Phi(x')\ dx'.$$

LEMME 9. *Les équations* (22), (23) *et* (24) *sont équivalentes au système suivant :*

$$(37)\qquad \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1^\delta(\gamma,\omega,k) & 0 & 0 \\ \mathcal{K}_3^\delta(\gamma,\omega,k) & \mathcal{K}_2^\delta(\gamma,\omega,k) & 0 \\ \mathcal{K}_4^\delta(\gamma,\omega,k) & 0 & \mathcal{K}_2^\delta(\gamma,\omega,k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ E_x \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $\Phi(x) = \dfrac{\partial E_y}{\partial y}(x, y=h)$.

Preuve du Lemme 9. Pour prouver que les équations (22), (23) et (24) sont équivalentes au système (37) il suffit de vérifier que

$$\mathcal{K}_3^\delta(\gamma,\omega,k)\Phi(x) \;= \Big(\frac{1}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\mu_2}\Big)\Big(i\omega E_y^1(x,h) + \frac{\partial E_y^1}{\partial x}(x,h)\Big),$$

et

$$\mathcal{K}_4^\delta(\gamma,\omega,k)\Phi(x) \;=\; i\gamma\Big(\frac{1}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\mu_2}\Big)E_y^1(x,h).$$

Ceci est évident d'après la formule (25) de représentation de E_y dans $\mathcal{O}_1^h$ et les propriétés de continuité du potentiel de simple couche.

C'est à partir de ce dernier système d'équations intégrales que nous allons déterminer les ondes normales de la structure périodique. Les fréquences de résonance apparaissent comme les valeurs caractéristiques des familles d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta(\gamma,\omega,k)$ et $k \mapsto \mathcal{K}_2^\delta(\gamma,\omega,k)$ où γ et ω sont fixés. Quant aux nombres d'ondes longitudinaux, ils sont les valeurs caractéristiques des familles d'opérateurs $\gamma \mapsto \mathcal{K}_1^\delta(\gamma,\omega,k)$ et $\gamma \mapsto \mathcal{K}_2^\delta(\gamma,\omega,k)$ où k et ω sont fixés.

5 Existence et localisation des fréquences de résonance

Nous allons chercher k dans le plan complexe tel que les équations (7) admettent une solution non triviale quasi-périodique. La valeur de la fréquence de résonance k est une fonction de la variable ω et de la variable γ. Nous étudions tout d'abord l'existence et la distribution des valeurs caractéristiques de la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$.

5.1 Valeurs caractéristiques de la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$

Dans cette section, nous cherchons k dans $\mathbb{C}$ tel que, pour ω et γ fixés, l' équation intégrale

$$\mathcal{K}_1^\delta(\gamma,\omega,k)\Phi \;=\; 0, \tag{38}$$

admette une solution non triviale dans l'espace de Banach $\mathcal{X}^\delta$ défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^\delta \;&=\; \Big\{\Phi(x) \text{ paire}, \Phi \in \mathcal{C}^0(\,]-\delta,\delta\,[\,), \sqrt{\delta^2-x^2}\,\Phi(x) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\,]-\delta,\delta\,[\,)\\ &\quad \text{et } \sqrt{\delta^2-x^2}\,\Phi(x) \in \mathcal{C}^0(\,[-\delta,\delta\,]\,)\Big\},\end{aligned}$$

où $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\,]-\delta,\delta\,[\,)$ est l'espace de Hölder d'indice $0<\alpha<1$ sur le segment $]-\delta,\delta\,[$.
k est alors une valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta$.
La famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta$ est définie de $\mathcal{X}^\delta$ dans l'espace de Banach $\mathcal{Y}_0^\delta$ avec

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_0^\delta \;&=\; \Big\{\psi(x) \text{ paire}, \psi(x) \in \mathcal{C}^0(\,[-\delta,\delta\,]\,) \cap \mathcal{C}^1(\,]-\delta,\delta\,[\,), \sqrt{\delta^2-x^2}\,\psi'(x) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\,]-\delta,\delta\,[\,)\\ &\quad \text{et } \sqrt{\delta^2-x^2}\,\psi'(x) \text{ est nulle en } x=\pm\delta\Big\}.\end{aligned}$$

Les espaces de Banach $\mathcal{X}^\delta$ et $\mathcal{Y}_0^\delta$ sont munis des normes usuelles suivantes :

$$||\Phi||_{\mathcal{X}^\delta} \;=\; \sup_t \sqrt{\delta^2-t^2}\,|\Phi(t)| + \sup_{s\neq t} \frac{|\sqrt{\delta^2-s^2}\,\Phi(s)-\sqrt{\delta^2-t^2}\,\Phi(t)|}{|t-s|^\alpha},$$

et

$$||\psi||_{\mathcal{Y}_0^\delta} \;=\; \sup_t |\psi(t)| + \sup_t \sqrt{\delta^2-t^2}\,|\psi'(t)| + \sup_{s\neq t} \frac{|\sqrt{\delta^2-s^2}\,\psi'(s)-\sqrt{\delta^2-t^2}\,\psi'(t)|}{|t-s|^\alpha}.$$

Soit $k_0 \in \Lambda(\gamma,\omega)$. Nous décomposons grâce au lemme 6 de singularité logarithmique la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$ dans un petit voisinage complexe de k_0 noté $\mathcal{V}(k_0)$, sous l'une des deux formes canoniques suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1^\delta(\gamma,\omega,k)\Phi(x) \;&=\; (\varepsilon_1 c_1^{(1)}+\varepsilon_2 c_2^{(1)}) \int_{-\delta}^{\delta} \ln|x-x'|\;\Phi(x')\;dx' + \frac{\mathcal{K}_{-1}^{(1,s)}(\delta,\gamma,\omega,k)\Phi(x)}{k-k_0}\\ &\quad +\mathcal{K}_0^{(1,s)}(\delta,\gamma,\omega,k)\Phi(x),\end{aligned} \tag{39}$$

si k_0 est dans Λ^s et

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1^\delta(\gamma,\omega,k)\Phi(x) \;&=\; (\varepsilon_1 c_1^{(1)}+\varepsilon_2 c_2^{(1)}) \int_{-\delta}^{\delta} \ln|x-x'|\;\Phi(x')\;dx' + \frac{\mathcal{K}_{-1}^{(1,r)}(\delta,\gamma,\omega,k)\Phi(x)}{\sqrt{k_0-k}}\\ &\quad +\mathcal{K}_0^{(1,r)}(\delta,\gamma,\omega,k)\Phi(x),\end{aligned} \tag{40}$$

si $k_0 \in \Lambda^r$, où les noyaux $\mathcal{K}_{-1}^{(1,s)}, \mathcal{K}_0^{(1,s)}, \mathcal{K}_{-1}^{(1,r)}$ et $\mathcal{K}_0^{(1,r)}$ sont holomorphes en la variable k dans $\mathcal{V}(k_0)$. La fonction $\sqrt{k_0 - k}$ est définie par la détermination suivante

$$\sqrt{k_0 - k} \;=\; e^{i|arg(k_0-k)|/2}\, |k_0 - k|^{1/2}.$$

D'après le Lemme 8, les noyaux des opérateurs intégraux $\mathcal{K}_0^{(1,s)}$ et $\mathcal{K}_0^{(1,r)}$ sont continûment différentiables. En plus, nous avons le lemme suivant.

LEMME 10. *Les deux opérateurs $\mathcal{K}_{-1}^{(1,s)}$ et $\mathcal{K}_{-1}^{(1,r)}$ sont de dimension un.*

Preuve du Lemme 10. D'après les expressions des noyaux $\mathcal{G}_1^D$ et $\mathcal{G}_2^D$, il est facile de voir que

$$\mathcal{K}_{-1}^{(1,s)}(\delta,\gamma,\omega,k)\Phi(x) \;=\; \frac{2}{dh\mu_1(k+k_0)}\Big(\int_{-\delta}^{\delta} e^{-i2\pi l x'/d}\,\Phi(x')\,dx'\Big)\,e^{i2\pi l x/d},$$

et

$$\mathcal{K}_{-1}^{(1,r)}(\delta,\gamma,\omega,k)\Phi(x) \;=\; \frac{2}{id\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\sqrt{k+k_0}}\Big(\int_{-\delta}^{\delta} e^{-i2\pi l x'/d}\,\Phi(x')\,dx'\Big)\,e^{i2\pi l x/d}.$$

Les opérateurs $\mathcal{K}_{-1}^{(1,s)}$ et $\mathcal{K}_{-1}^{(1,r)}$ sont donc de dimension un.

Pour pouvoir appliquer la théorie de Fredholm analytique à la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^{\delta}$, nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 11. *L'opérateur intégral*

$$\mathcal{L}_1 : \Phi(x) \in \mathcal{X}^{\delta} \longmapsto \mathcal{L}_1\,\Phi(x) \;=\; \int_{-\delta}^{\delta} \ln|x - x'|\;\Phi(x')\,dx' \in \mathcal{Y}_0^{\delta},$$

est inversible.

Preuve du Lemme 11. Vérifions tout d'abord que si $\Phi \in \mathcal{X}^{\delta}$ alors $\mathcal{L}_1\Phi \in \mathcal{Y}_0^{\delta}$. La fonction $f(x) = \displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \ln|x - x'|\;\Phi(x')\,dx'$ est dérivable sur le segment $]-\delta,\delta[$ et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) \;=\; \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x - x'}\;\Phi(x')\,dx'.$$

Comme $\sqrt{\delta^2 - x^2}\Phi$ reste bornée aux deux extrémités $x = \mp\delta$, alors, d'après Muskhelishvili [34] (voir le chapitre 4), la fonction $f'(x)$ se comporte aux voisinage des deux extrémités $x = \pm\delta$ comme

$$\frac{1}{|x^2 - \delta^2|^{\alpha_0}},$$

où $\alpha_0 < \dfrac{1}{2}$. Nous en déduisons que la quantité $\sqrt{\delta^2 - x^2}f'(x)$ tend vers zéro aux deux extrémités $x = \pm\delta$. Finalement, il est facile de voir que $f(x)$ est paire si $\Phi(x)$ est paire. Ce qui permet d'affirmer que $f \in \mathcal{Y}_0^{\delta}$.

On veut maintenant résoudre l'équation intégrale

$$\mathcal{L}_1\,\Phi(x) \;=\; f(x), \quad \forall\, x \in \;]-\delta,\delta\,[, \tag{41}$$

où $f \in \mathcal{Y}_0^{\delta}$. Si on dérive l'équation (41) par rapport à la variable x on trouve l'opérateur de Cauchy sur le segment $]-\delta,\delta[$. Nous sommes donc ramenés à résoudre le problème de Hilbert suivant

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x - x'}\,\Phi(x')\,dx' \;=\; f'(x). \tag{42}$$

D'après [34] p.250, la solution générale de l'équation (42) est donnée par

$$\Phi_\lambda(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\delta^2-x^2}} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}\,f'(x')}{x-x'}\,dx' + \frac{\lambda}{\sqrt{\delta^2-x^2}}, \tag{43}$$

avec λ une constante. Comme $\sqrt{\delta^2-(x')^2}f'(x')$ est nulle aux deux extrémités $x=\pm\delta$, alors $\sqrt{\delta^2-x^2}\Phi_\lambda(x)$ est bornée aux deux extrémités pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. D'après les propriétés du noyau de Cauchy (voir Muskhelishvili [34] p. 49), cette fonction est dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\,]-\delta,\delta\,[)$ puisque

$$\sqrt{\delta^2-(x')^2}f'(x') \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\,]-\delta,\delta\,[).$$

La solution Φ dans $\mathcal{X}^\delta$ de l'équation intégrale (41) est forcément l'une des Φ_λ puisqu'elle doit vérifier l'équation dérivée (42). Soit a_0 la constante définie par

$$a_0 \;=\; \mathcal{L}_1\,\Phi_{\lambda=0}(x) - f(x).$$

Comme

$$\mathcal{L}_1\Big(\frac{1}{\sqrt{\delta^2-x^2}}\Big) \;=\; \pi^2 \ln\frac{\delta}{2},$$

il suffit donc de prendre

$$\lambda \;=\; -\frac{a_0}{\pi^2\ln\frac{\delta}{2}},$$

pour que $\Phi = \Phi_\lambda$ soit solution dans $\mathcal{X}^\delta$ de l'équation (41). L'unicité d'une solution à l'équation (41) est triviale dans notre cas puisque comme δ est petit, la quantité $\ln|x-x'|$ garde un signe constant lorsque x et x' décrivent l'intervalle $]-\delta,\delta[$. Notons que l'hypothèse de parité n'intervient pas pour inverser l'opérateur $\mathcal{L}_1$ mais qu'elle est commode dans la suite.

Nous allons montrer que l'ensemble de valeurs caractéristiques de la famille d'opérateurs $k\mapsto\mathcal{K}_1^\delta$ est un ensemble discret. De l'uniforme continuité des opérateurs $\dfrac{\mathcal{K}_{-1}^{(1,s)}}{k-k_0}+\mathcal{K}_0^{(1,s)}$ et $\dfrac{\mathcal{K}_{-1}^{(1,r)}}{\sqrt{k_0-k}}+\mathcal{K}_0^{(1,r)}$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{X}^\delta$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{Y}_0^\delta$, nous avons, d'après la théorie de Fredholm analytique, le résultat suivant.

LEMME 12. *Il existe $\delta_0>0$ t.q. pour tout $0<\delta<\delta_0$, l'ensemble des valeurs caractéristiques de la famille d'opérateurs intégraux $\mathcal{K}_1^\delta$ est discret.*

Preuve du Lemme 12. D'après le Théorème 3, il suffit de vérifier que la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta$ est inversible en un point. Soit k dans le plan complexe en dehors de l'ensemble Λ. Nous allons montrer que la famille d'opérateurs $\mathcal{L}_1+\Big(\mathcal{K}_1^\delta-\mathcal{L}_1\Big)$ est inversible au point k pour δ suffisamment petit. Comme l'opérateur $\mathcal{L}_1$ est inversible, il nous suffira de vérifier que la norme de l'opérateur $\mathcal{L}_1^{-1}\Big(\mathcal{K}_1^\delta-\mathcal{L}_1\Big)$ est strictement inférieure à un pour δ suffisamment petit. Ce qui nous permettra d'inverser $\mathcal{K}_1^\delta$ au point k à l'aide d'une série de Neumann. Nous avons le résultat général suivant :

LEMME 13. *Soit $\mathcal{R}$ l'opérateur intégral de $\mathcal{X}^\delta$ dans $\mathcal{Y}_0^\delta$ défini par*

$$\mathcal{R}\,\Phi(x) \;=\; \int_{-\delta}^{\delta} R(x,x')\,\Phi(x')\,dx',$$

où le noyau $R(x,x')$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et indépendant de δ. Supposons que $0<\alpha<1/2$ alors la quantité

$$||\mathcal{L}_1^{-1}\,\mathcal{R}||_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^\delta,\mathcal{X}^\delta)} \;=\; \sup_{\Phi\in\mathcal{X}^\delta,||\Phi||_{\mathcal{X}^\delta}=1} ||\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{R}\Phi||_{\mathcal{X}^\delta}.$$

tend vers zéro lorsque δ tend vers zéro.

Preuve du Lemme 13. D'après la formule d'inversion de Hilbert (43), nous avons

$$\mathcal{L}_1^{-1}\,(\mathcal{R}\,\Phi)(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\delta^2-x^2}}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x')}{x-x'}\,dx' + \frac{1}{\sqrt{\delta^2-x^2}}\Big(\mathcal{L}_1\,\Phi_{\lambda=0}-\mathcal{R}\,\Phi\Big)(x),$$

où

$$\Phi_{\lambda=0}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\delta^2-x^2}}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}}{x-x'}(\mathcal{R}\Phi)'(x')\,dx'.$$

En utilisant l'identité (voir par exemple [34] p.46)

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{x-x'}\,dx' \;=\; \ln\Big(\frac{\delta-x}{\delta+x}\Big), \quad x\in\;]-\delta,\delta\,[,$$

nous obtenons

$$(44)\qquad \begin{aligned}\sqrt{\delta^2-x^2}\,\mathcal{L}_1^{-1}\,(\mathcal{R}\,\Phi)(x) \;&=\; \int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x')-\sqrt{\delta^2-x^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x)}{x-x'}\,dx'\\ &\quad+\sqrt{\delta^2-x^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x)\,\ln\Big(\frac{\delta-x}{\delta+x}\Big)\\ &\quad+\Big(\mathcal{L}_1\,\Phi_{\lambda=0}-\mathcal{R}\,\Phi\Big)(x).\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{\delta^2-(x')^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x') \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ pour tout $\alpha < 1/2$ et tend vers zéro aux deux extrémités $x=\pm\delta$, nous avons

$$\begin{aligned}\Big|\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x')-\sqrt{\delta^2-x^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x)}{x-x'}\,dx'\Big| \;&\le\; C\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{|x-x'|^{1-\alpha}}\,dx'\;||\Phi||_{\mathcal{X}^\delta}\\ &\le\; C\,\delta^{\alpha}\;||\Phi||_{\mathcal{X}^\delta}.\end{aligned}$$

D'autre part, nous majorons la dernière quantité à droite dans (44) par

$$|\mathcal{L}_1\,\Phi_{\lambda=0}-\mathcal{R}\,\Phi(x)| \le C\,\sup_x\Big|\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}}{x-x'}(\mathcal{R}\Phi)'(x')\,dx'\Big|\,\Big|\mathcal{L}_1\Big(\frac{1}{\sqrt{\delta^2-x^2}}\Big)\Big| + |\mathcal{R}\,\Phi(x)|.$$

Mais comme

$$\Big|\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}}{x-x'}(\mathcal{R}\Phi)'(x')\,dx'\Big| \;\le\; C\,\delta\ln\delta\;||\Phi||_{\mathcal{X}^\delta},$$

$$\Big|\mathcal{L}_1\Big(\frac{1}{\sqrt{\delta^2-x^2}}\Big)\Big| \;\le\; C\,|\ln\delta|,$$

et

$$|\mathcal{R}\,\Phi(x)| \;\le\; C\,\delta\,||\Phi||_{\mathcal{X}^\delta},$$

nous obtenons

$$|\mathcal{L}_1\,\Phi_{\lambda=0}-\mathcal{R}\,\Phi(x)| \le\; C\,\delta^{1/2}\,||\Phi||_{\mathcal{X}^\delta},$$

pour δ suffisamment petit. La quantité

$$\Big|\sqrt{\delta^2-x^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x)\,\ln\Big(\frac{\delta-x}{\delta+x}\Big)\Big| \;\le\; C\,\delta^{1/2}\,||\Phi||_{\mathcal{X}^\delta},$$

puisque $R\,\Phi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\delta, \delta]$. Ceci montre qu'il existe une constante C indépendante de δ telle que

$$|\sqrt{\delta^2 - x^2}\, \mathcal{L}_1^{-1}\,(\mathcal{R}\,\Phi)(x)| \;\leq\; C\,\delta^{\alpha}\,||\Phi||_{\mathcal{X}^\delta},$$

pour δ suffisamment petit.
Il nous reste à estimer la quantité

$$\mathcal{Q}(t,u) \;=\; \frac{1}{|u-t|^{\alpha}}\,|\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x')}{u-x'}\,dx' - \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x')}{t-x'}\,dx'|,$$

pour $u \neq t$. Il est facile de vérifier que

$$\mathcal{Q}(t,u) \;\leq\; |u-t|^{1-\alpha}|\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x')}{(t-x')(u-x')}|, \quad u \neq t.$$

Par changement de variables dans l'intégrale

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}(\mathcal{R}\Phi)'(x')}{(t-x')(u-x')}$$

nous obtenons

$$\mathcal{Q}(t,u) \;\leq\; C\,\delta^{1-\alpha}\,||\Phi||_{\mathcal{X}^\delta},$$

où C est une constante strictement positive indépendante de δ. Ce qui termine la preuve du Lemme 13.

Revenons maintenant au Lemme 12. L'alternative de Fredholm analytique permet grâce au Lemme précédent de conclure.

Maintenant, pour δ suffisamment petit, pour tout $k_0 \in \Lambda^s(\gamma,\omega)$ (resp. dans $\Lambda^r(\gamma,\omega)$), il existe un petit voisinage complexe $\mathcal{V}(k_0)$ dans lequel les familles d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta$ et $\mathcal{K}_1^\delta - \mathcal{K}_0^{(1,s)}$ (resp. $\mathcal{K}_1^\delta$ et $\mathcal{K}_1^\delta - \mathcal{K}_0^{(1,r)}$) ont la même multiplicité définie au sens de la définition 3.7. Comme l'image de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_{-1}^{(1,s)}$ et $\mathcal{K}_{-1}^{(1,r)}$ est de dimension égale à un, alors d'après [46], la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta - \mathcal{K}_0^{(1,s)}$ et la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta - \mathcal{K}_0^{(1,r)}$ sont de multiplicité nulle dans $\mathcal{V}(k_0)$. Plus précisément, nous avons

LEMME 14. *Les familles d'opérateurs définis par*

$$\mathcal{N}^{(1,s)} \;: \Phi(x) \longmapsto (\varepsilon_1 c_1^{(1)} + \varepsilon_2 c_2^{(1)}) \int_{-\delta}^{\delta} \ln|x-x'|\;\Phi(x')\;dx' + \frac{\mathcal{K}_{-1}^{(1,s)}(\delta,\gamma,\omega,k)\Phi(x)}{k-k_0},$$

et

$$\mathcal{N}^{(1,r)} \;: \Phi(x) \longmapsto (\varepsilon_1 c_1^{(1)} + \varepsilon_2 c_2^{(1)}) \int_{-\delta}^{\delta} \ln|x-x'|\;\Phi(x')\;dx' + \frac{\mathcal{K}_{-1}^{(1,r)}(\delta,\gamma,\omega,k)\Phi(x)}{\sqrt{k_0-k}},$$

sont de multiplicité nulle dans $\mathcal{V}(k_0)$.

Preuve du Lemme 14. Soit $k_0 \in \Lambda$. k_0 est donc de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}\sqrt{(j_0\pi/h)^2 + (\omega - 2\pi l_0/d)^2 + \gamma^2},$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}\sqrt{(\omega - 2\pi l_0/d)^2 + \gamma^2},$$

où $l_0 \in \mathbb{Z}$ et $j_0 \geq 1$. Notons par

$$\psi_{l_0}(x) \;=\; e^{i2\pi l_0 x/d},$$

et

$$c \;=\; \frac{2}{dh\mu_1(\varepsilon_1 c_1^{(1)} + \varepsilon_2 c_2^{(1)})}.$$

Commençons par choisir k_0 dans Λ^s. Nous cherchons k dans $\mathcal{V}(k_0)$ tel que l'équation

$$\mathcal{N}^{(1,s)}\,\Phi \;=\; 0,$$

admette une solution non triviale dans $\mathcal{X}^\delta$. L'équation précédente est équivalente à

$$\mathcal{L}_1\,\Phi + \frac{c}{k^2 - k_0^2}\,(\Phi, \psi_{l_0})\,\psi_{l_0} \;=\; 0. \tag{45}$$

Comme l'opérateur $\mathcal{L}_1$ est inversible, nous avons

$$\Phi + \frac{c}{k^2 - k_0^2}\,(\Phi, \psi_{l_0})\,\mathcal{L}_1^{-1}\,\psi_{l_0} \;=\; 0. \tag{46}$$

En multipliant la dernière équation (46) par ψ_{l_0}, nous obtenons

$$(\Phi, \psi_{l_0})\left(1 + \frac{c}{k^2 - k_0^2}\,(\mathcal{L}_1^{-1}\,\psi_{l_0}, \psi_{l_0})\right) \;=\; 0.$$

Ce qui donne

$$k^2 \;=\; k_0^2 - c(\mathcal{L}_1^{-1}\,\psi_{l_0}, \psi_{l_0}), \tag{47}$$

puisque $(\Phi, \psi_{l_0}) \;=\; 0$ conduit d'après (45) à $\Phi \;=\; 0$. Il existe donc une unique valeur caractéristique donnée par la formule (47) de la famille d'opérateurs $\mathcal{N}^{(1,s)}$ dans $\mathcal{V}(k_0)$ dont le vecteur propre associé est donné par

$$\Phi \;=\; \frac{\mathcal{L}_1^{-1}\,\psi_{l_0}}{(\mathcal{L}_1^{-1}\,\psi_{l_0}, \psi_{l_0})}.$$

La quantité $(\mathcal{L}_1^{-1}\,\psi_{l_0}, \psi_{l_0})$ est non nulle. Comme k_0 est l'unique pôle de cette famille dans $\mathcal{V}(k_0)$ alors la multiplicité de la famille d'opérateurs $\mathcal{N}^{(1,s)}$ dans $\mathcal{V}(k_0)$ est nulle. Le résultat pour la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{N}^{(1,r)}$ dans un petit voisinage d'un k_0 dans Λ^r se démontre de la même manière.

Nous avons donc d'après le théorème de Rouché généralisé rappelé dans la deuxième section, les résultats suivants qui localisent les fréquences de résonance obtenues comme valeurs caractéristiques de la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$.

THÉORÈME 5. *Il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \delta < \delta_0$, et pour tout $k_0 \in \Lambda^s(\gamma, \omega)$, il existe un petit voisinage $\mathcal{V}(k_0)$ de k_0 dans lequel il existe exactement une valeur caractéristique $k_1(\gamma, \omega, \delta)$ de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta$. Pour tout $k_0 \in \Lambda^r(\gamma, \omega)$, il existe une unique valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta$ dans l'image inverse dans le plan $k-$complexe d'un petit voisinage de 0 en la variable $\xi = \sqrt{k_0 - k}$.*

Preuve du Théorème 5. Soit $k_0 \in \Lambda^s$. Dans un petit voisinage de k_0, noté $\mathcal{V}(k_0)$, nous pouvons décomposer la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$ sous la forme

$$\mathcal{K}_1^\delta \;=\; \mathcal{N}^{(1,s)} + (\mathcal{K}_1^\delta - \mathcal{N}^{(1,s)}).$$

La famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta - \mathcal{N}^{(1,s)}$ est analytique en la variable k dans $\mathcal{V}(k_0)$. En plus, d'après le Lemme 12, la quantité

$$||(\mathcal{N}^{(1,s)})^{-1}(\mathcal{K}_1^\delta - \mathcal{N}^{(1,s)})||_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^\delta,\mathcal{X}^\delta)}$$

tend vers zéro lorsque δ tend vers zéro. La famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$ a donc d'après le théorème de Rouché généralisé la même multiplicité dans $\mathcal{V}(k_0)$ que la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{N}^{(1,s)}$ qui est nulle d'après le Lemme 14. Comme la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$ a un seul pôle dans $\mathcal{V}(k_0)$, alors elle admet exactement une valeur caractéristique dans ce voisinage. Si $k_0 \in \Lambda^r$, nous avons le même résultat puisque la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{N}^{(1,r)}$ a les mêmes propriétés que la famille $k \mapsto \mathcal{N}^{(1,s)}$.

5.2 Valeurs caractéristiques de la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_2^\delta$

Dans cette section, nous cherchons k dans $\mathbb{C}$ tel que, pour ω et γ fixés, l' équation intégrale

$$\mathcal{K}_2^\delta(\gamma,\omega,k)\psi \;=\; 0, \tag{48}$$

admette une solution non triviale dans l'espace de Banach $\mathcal{Y}^\delta$ défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^\delta \;&=\; \Big\{\psi(x) \text{ paire}, \psi(x) \in \mathcal{C}^0(\,[\,-\delta,\delta\,]\,) \cap \mathcal{C}^1(\,]\,-\delta,\delta\,[\,), \sqrt{\delta^2-x^2}\,\psi'(x) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\,]\,-\delta,\delta\,[\,)\\ &\quad \text{et } \sqrt{\delta^2-x^2}\,\psi'(x) \text{ est continue en } x=\pm\delta\Big\}.\end{aligned}$$

Nous allons procéder de la même manière que pour la famille $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$ discutée en détail dans la section précédente. Seuls les résultats dont les démonstrations ne sont pas exactement les mêmes que pour la famille $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$ seront prouvés.
Nous décomposons d'une manière analogue à $\mathcal{K}_1^\delta$ la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_2^\delta$ sous l'une des deux formes canoniques suivantes

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2^\delta(\gamma,\omega,k)\psi(x) \;&=\; -(\frac{c_1^{(2)}}{\mu_1}+\frac{c_2^{(2)}}{\mu_2})\,v.p.\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{|x-x'|^2}\,\psi(x')\,dx' + \frac{\mathcal{K}_{-1}^{(2,s)}(\delta,\gamma,\omega,k)\psi(x)}{k-k_0}\\ &\quad +\mathcal{K}_0^{(2,s)}(\delta,\gamma,\omega,k)\psi(x),\end{aligned} \tag{49}$$

si k_0 est dans Λ^s et

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2^\delta(\gamma,\omega,k)\psi(x) \;&=\; -(\frac{c_1^{(2)}}{\mu_1}+\frac{c_2^{(2)}}{\mu_2})\,v.p.\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{|x-x'|^2}\,\psi(x')\,dx' + \frac{\mathcal{K}_{-1}^{(2,r)}(\delta,\gamma,\omega,k)\psi(x)}{\sqrt{k_0-k}}\\ &\quad +\mathcal{K}_0^{(2,r)}(\delta,\gamma,\omega,k)\psi(x),\end{aligned} \tag{50}$$

si $k_0 \in \Lambda^r$, où les noyaux $\mathcal{K}_{-1}^{(2,s)}, \mathcal{K}_0^{(2,s)}, \mathcal{K}_{-1}^{(2,r)}$ et $\mathcal{K}_0^{(2,r)}$ sont holomorphes en la variable k dans $\mathcal{V}(k_0)$.
D'une manière analogue à $\mathcal{K}_{-1}^{(1,s)}$ et $\mathcal{K}_{-1}^{(1,r)}$, les opérateurs $\mathcal{K}_{-1}^{(2,s)}$ et $\mathcal{K}_{-1}^{(2,r)}$ sont de dimension un.
Soit $\mathcal{X}_0^\delta$ défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_0^\delta \;&=\; \Big\{\Phi \text{ paire}, \Phi \in \mathcal{C}^0(\,]\,-\delta,\delta\,[\,), \sqrt{\delta^2-x^2}\,\Phi(x) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\,]\,-\delta,\delta\,[\,)\\ &\quad \text{et } \sqrt{\delta^2-x^2}\,\Phi(x) \text{ est nulle en } x=\pm\delta\Big\}.\end{aligned}$$

Nous avons le résultat suivant.

LEMME 15. *L'opérateur intégral*

$$\mathcal{L}_2 : \psi(x) \in \mathcal{Y}^\delta \longmapsto \mathcal{L}_2\, \psi(x) \;=\; v.p. \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|x-x'|^2}\, \psi(x')\, dx' \in \mathcal{X}_0^\delta,$$

est inversible.

Preuve du Lemme 15. Nous avons (voir par exemple [34])

$$\mathcal{L}_2\psi(x) \;=\; -\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x-x'}\, \psi'(x')\, dx'.$$

Vérifions tout d'abord que $\mathcal{L}_2\psi \in \mathcal{X}_0^\delta$ pour tout $\psi \in \mathcal{Y}^\delta$. Soit $\psi \in \mathcal{Y}^\delta$. Nous écrivons ψ sous la forme

$$\psi(x) \;=\; \frac{\psi^*(x)}{\sqrt{\delta^2 - x^2}}, \quad \text{pour tout } -\delta < x < \delta,$$

où $\psi^* \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]-\delta,\delta[)$ et nulle aux deux extrémités $x = \pm\delta$.

$$\sqrt{\delta^2 - x^2} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x-x'} \frac{\psi^*(x')}{\sqrt{\delta^2-(x')^2}}\, dx'$$

est donc nulle en $x = \pm\delta$ et elle est dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}(]-\delta,\delta[)$.

Nous utilisons la formule (43) pour inverser l'opérateur $\mathcal{K}_2^\delta$. Nous cherchons $\psi \in \mathcal{Y}^\delta$ solution de l'équation intégrale

$$\mathcal{L}_2\psi(x) \;=\; g(x), \tag{51}$$

où $g \in \mathcal{X}_0^\delta$. La formule d'inversion de Hilbert donne

$$\psi'_\lambda(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\delta^2-x^2}} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sqrt{\delta^2-(x')^2}g(x')}{x-x'}\, dx' + \frac{\lambda}{\sqrt{\delta^2-x^2}}, \tag{52}$$

avec λ une constante. Comme $\sqrt{\delta^2-x^2}g(x)$ est nulle aux deux extrémités alors la fonction $\sqrt{\delta^2-x^2}\psi'_\lambda(x)$ est bornée aux deux extrémités. On veut qu'elle soit impaire. Comme g est paire, il faut et il suffit de choisir $\lambda = 0$. Pour trouver la solution de (51), il suffit d'intégrer l'équation (52). Nous obtenons

$$\psi_{\lambda=0,\beta}(x) \;=\; \int_{-\delta}^{x} \frac{1}{\sqrt{\delta^2-t^2}} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sqrt{\delta^2-s^2}g(s)}{t-s}\, ds\, dt + \beta, \tag{53}$$

où β est une constante à déterminer. Pour que ψ soit une fonction paire, il nous faut et il nous suffit de choisir β égale à la quantité

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\delta^2-t^2}} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sqrt{\delta^2-s^2}g(s)}{t-s}\, ds\, dt.$$

L'opérateur $\mathcal{L}_2$ est donc inversible de $\mathcal{Y}^\delta$ dans $\mathcal{X}_0^\delta$ et nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^{-1}\, g(x) \;&=\; \int_{-\delta}^{x} \frac{1}{\sqrt{\delta^2-t^2}} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sqrt{\delta^2-s^2}g(s)}{t-s}\, ds\, dt \\ &\quad + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\delta^2-t^2}} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sqrt{\delta^2-s^2}g(s)}{t-s}\, ds\, dt, \quad \text{pour tout } g \in \mathcal{X}_0^\delta.\end{aligned} \tag{54}$$

Notons qu'on peut définir l'inverse de l'opérateur $\mathcal{L}_2$ pour une fonction g vérifiant toutes les propriétés imposées aux fonctions de $\mathcal{X}_0^\delta$ à part la parité

$$\mathcal{L}_2^{-1} g(x) \;=\; \frac{1}{2}\mathcal{L}_2^{-1}(g(x)+g(-x)) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_2^{-1}(g(x)-g(-x)),$$

où $g(x)+g(-x)$ est une fonction dans $\mathcal{X}_0^\delta$. L'inverse de $\mathcal{L}_2$ pour les fonctions impaires est définie de la même manière que pour les fonctions paires mais en imposant à la fonction $\mathcal{L}_2^{-1} g$ de vérifier $\sqrt{\delta^2-x^2}(\mathcal{L}_2^{-1}g)'(x)$ nulle aux deux extrémités $x=\pm\delta$, ce qui impose le choix de λ et on choisit après β pour que $\mathcal{L}_2^{-1}g$ soit impaire.

L'alternative de Fredholm analytique permet d'avoir le résultat suivant pour la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_2^\delta$.

LEMME 16. *Il existe $\delta_0 > 0$ t.q. pour tout $0<\delta<\delta_0$, l'ensemble des valeurs caractéristiques de la famille d'opérateurs intégraux $\mathcal{K}_2^\delta$ est discret.*

Preuve du Lemme 16. Soit $\mathcal{R}$ un opérateur intégral de $\mathcal{Y}^\delta$ dans $\mathcal{X}_0^\delta$ de noyau de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\delta,\delta]$. Pour démontrer le Lemme 16, il suffit de prouver que $||\mathcal{L}_2^{-1}\mathcal{R}||_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^\delta,\mathcal{Y}^\delta)}$ tend vers zéro lorsque δ tend vers zéro. Ceci s'obtient facilement à partir de la formule d'inversion (54) et les estimations démontrées dans le lemme 13.

Les deux familles d'opérateurs intégraux

$$\mathcal{N}^{(2,s)} \;:\psi(x) \longmapsto (\varepsilon_1 c_1^{(2)} + \varepsilon_2 c_2^{(2)}) \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x-x'}\,\psi'(x')\,dx' + \frac{\mathcal{K}_{-1}^{(2,s)}(\delta,\gamma,\omega,k)\psi(x)}{k-k_0},$$

et

$$\mathcal{N}^{(2,r)} \;:\Phi(x) \longmapsto (\varepsilon_1 c_1^{(2)} + \varepsilon_2 c_2^{(2)}) \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x-x'}\,\psi'(x')\,dx' + \frac{\mathcal{K}_{-1}^{(2,r)}(\delta,\gamma,\omega,k)\psi(x)}{\sqrt{k_0-k}},$$

sont de multiplicité nulle dans un voisinage $\mathcal{V}(k_0)$ de k_0.

THÉORÈME 6. *Il existe $\delta_0>0$ tel que pour tout $0<\delta<\delta_0$, et pour tout $k_0 \in \Lambda^s(\gamma,\omega)$, il existe un petit voisinage $\mathcal{V}(k_0)$ de k_0 dans lequel il existe exactement une valeur caractéristique $k_2(\gamma,\omega,\delta)$ de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_2^\delta$. Pour tout $k_0 \in \Lambda^r(\gamma,\omega)$, il existe une unique valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_2^\delta$ dans l'image inverse dans le plan $k-$complexe d'un petit voisinage de 0 en la variable $\xi=\sqrt{k_0-k}$.*

Preuve du Théorème 6. Ce théorème se démontre de la même manière que le Théorème 5.

5.3 Détermination des ondes normales

Soit $k_0 \in \Lambda^s$ (le cas d'un $k_0 \in \Lambda^r$ est tout à fait analogue, nous faisons donc ce choix pour fixer les notations). Dans un petit voisinage $\mathcal{V}(k_0)$ de k_0 nous avons déjà vu que nous pouvons décomposer les opérateurs $\mathcal{K}_j^\delta$ pour $j=1,2$ sous la forme

$$c_j\,\mathcal{K}_j^\delta \;=\; \mathcal{L}_j + \frac{(.,\psi_j)\,\psi_j}{k-k_0} + \mathcal{R}_j(k),$$

où $(c_j)_{j=1,2}$ sont deux constantes non nulles et les noyaux des opérateurs $\mathcal{R}_j$, pour $j=1,2$ sont réguliers. Soit $(k_j)_{j=1,2}$ les valeurs caractéristiques des familles d'opérateurs $k\mapsto\mathcal{K}_j^\delta$ et k_j^* celles des familles d'opérateurs

$$k \mapsto \mathcal{L}_j + \frac{(.,\psi_j)\,\psi_j}{k-k_0}.$$

Soit Φ_j une solution non triviale de l'équation

$$\mathcal{K}_j^\delta(\gamma, \omega, k_j)\,\Phi_j \;=\; 0. \tag{55}$$

Nous avons le lemme suivant.

LEMME 17. *Nous avons*

$$k_j^* \;=\; k_0 - (\mathcal{L}_j^{-1}\psi_j, \psi_j), \tag{56}$$

et

$$k_j \;=\; k_j^* + (k_j - k_0)(k_j^* - k_0)\frac{(\mathcal{L}_j^{-1}\mathcal{R}_j(k_j)\Phi_j, \psi_j)}{(\Phi_j, \psi_j)(\mathcal{L}_j^{-1}\psi_j, \psi_j)}. \tag{57}$$

Notons que k_j est bien évidement indépendant du choix de Φ_j puisque comme nous l'avons déjà vu, l'espace des Φ_j solutions de l'équation (55) est de dimension un et ici c'est la quantité $\Phi_j/(\Phi_j, \psi_j)$ qui intervient.

Le lemme précédent permet d'avoir le théorème suivant.

THÉORÈME 7. *Pour tout $k_0 \in \Lambda(\gamma, \omega)$, les deux valeurs caractéristiques k_1 et k_2 des familles $\mathcal{K}_1^\delta$ et $\mathcal{K}_2^\delta$, déterminées par les deux théorèmes précédents, sont distinctes.*

Preuve du Théorème 7. En fait, nous avons $\psi_j = e^{i2\pi l x/d}$, pour un certain entier l et $\Big((\mathcal{L}_1^{-1} - \mathcal{L}_2^{-1})\psi_j, \psi_j\Big)$ est de l'ordre de δ. Le théorème 7 se déduit alors de (56) et (57) puisque la distance entre k_j et k_j^* est de l'ordre de δ^2 tandis que celle entre les deux k_j^* est de l'ordre de δ.

THÉORÈME 8. *Le système* (37) *détermine les ondes normales.*

Preuve du Théorème 8. Il est facile de voir que $\mathcal{K}_3^\delta\Phi$ et $\mathcal{K}_4^\delta\Phi$ sont dans $\mathcal{Y}_0^\delta$ pour tout Φ dans $\mathcal{X}^\delta$. Si on choisit $k = k_0$ valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$ alors comme k_0 ne peut pas être valeur caractéristique de la famille $k \mapsto \mathcal{K}_2^\delta$, les deux équations

$$\mathcal{K}_2^\delta(\gamma, \omega, k_0)E_x \;=\; \mathcal{K}_3^\delta(\gamma, \omega, k_0)\,\Phi \text{ et } \mathcal{K}_2^\delta(\gamma, \omega, k_0)E_z \;=\; \mathcal{K}_4^\delta(\gamma, \omega, k_0)\,\Phi,$$

où $\Phi = \partial_y E_y$ sont inversibles. Si on choisit $k = k_0$ valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_2^\delta$ alors comme k_0 ne peut pas être valeur caractéristique de la famille $k \mapsto \mathcal{K}_2^\delta$, l'équation $\mathcal{K}_1^\delta(\gamma, \omega, k_0)\Phi = 0$ implique que $\Phi = 0$. Comme les valeurs caractéristiques de $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$ et $k \mapsto \mathcal{K}_2^\delta$ sont distinctes, on sait toujours résoudre le système (37) d'une manière unique. Ce qui détermine les ondes normales.

Nous avons démontré que pour tout ω dans $[0, 2\pi/d[$, γ sur l'axe réel, et $k(\gamma, \omega)$ dans l'une des familles des fréquences de résonance associée à la quasi-périodicité ω, il existe une solution quasi-périodique non triviale aux équations de Maxwell (4). Elle est donc une onde normale du système (4) associée au nombre d'ondes longitudinal γ. Il existe deux types d'ondes normales : les ondes pour lesquelles $E_y \neq 0$ et les ondes pour les quelles $E_y = 0$. Les premières sont dites de type LSE. Lorsque $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2$ les ondes normales pour lesquelles $E_y \neq 0$ sont telles que $E_x = E_z = 0$ et donc $H_y = 0$. Ces ondes normales sont dites de type LSM. Nous renvoyons à R. E. Collin [9] pour un exposé complet sur les modes LSE et LSM.

5.4 Position des fréquences de résonance par rapport à l'axe réel

Nous précisons maintenant la position des fréquences de résonance par rapport à la demi-droite réelle positive. Nous montrons qu'il existe un nombre infini de fréquences à partie imaginaire strictement négative correspondant aux modes propagatifs de la structure et que toutes les autres qui correspondent à la structure de référence sont sur l'axe réel si

$\varepsilon_2\mu_2 \geq \varepsilon_1\mu_1$. Dans le cas contraire, nous caractérisons les fréquences de réference dont les résonances associées sont à partie imaginaire strictement négative.
Soit $\Phi \in \mathcal{X}^\delta$, on construit $\tilde{\Phi}$ périodique sur $\mathbf{R}$ de période d telle que sa restriction à la période $[-d/2, d/2]$ soit donnée par

$$\tilde{\Phi} = \begin{cases} \Phi & \text{si } -\delta/2 < x < \delta/2, \\ 0 & \text{si } -d/2 < x < -\delta/2 \text{ ou } \delta/2 < x < d/2. \end{cases}$$

Nous pouvons décomposer la fonction $\tilde{\Phi}$ en série de Fourier

$$\tilde{\Phi}(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \tilde{\Phi}_l \, e^{i2\pi l x/d},$$

où la somme $\sum_{l \in \mathbf{Z}} |\tilde{\Phi}_l|^2$ est finie grâce à la régularité de $\tilde{\Phi}$.
En utilisant les expressions des noyaux de Green périodiques $\mathcal{G}_1^N$ et $\mathcal{G}_2^N$, nous obtenons le lemme suivant.

LEMME 18. *Pour tout $\Phi \in \mathcal{X}^\delta$, nous avons l'identité suivante.*

$$(58) \quad \int_{-\delta}^{\delta} \Big(\varepsilon_1 \mathcal{G}_1^N + \varepsilon_2 \mathcal{G}_2^N\Big)(\gamma, \omega, k, x, h, x', h) \, \Phi(x') \, \overline{\Phi}(x) \, dx' \, dx = d \sum_{l \in \mathbf{Z}} \alpha_l(\gamma, k) \, |\tilde{\Phi}_l|^2,$$

où les coefficients $\alpha_l(\gamma, k)$ sont donnés par

$$(59) \qquad \alpha_l(\gamma, k) = \frac{2\varepsilon_2}{id\beta_l(\gamma, k)} - \frac{2\varepsilon_1}{dh} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j\pi/h)^2 + (\omega - 2\pi l/d)^2 + \gamma^2 - k^2 \varepsilon_1 \mu_1}.$$

Notons que les coefficients $\alpha_l(\gamma, k)$ sont méromorphes en tout point de Λ et que la série $\sum_{l \in \mathbf{Z}} \alpha_l(\gamma, k) \, |\tilde{\Phi}_l|^2$ est convergente.
D'après l'identité précédente, nous obtenons

LEMME 19. *Soit $\Phi \in \mathcal{X}^\delta$ vérifiant*

$$(60) \qquad \int_{-\delta}^{\delta} \Big(\varepsilon_1 \mathcal{G}_1^N + \varepsilon_2 \mathcal{G}_2^N\Big)(\gamma, \omega, k, x, h, x', h) \, \Phi(x') \, dx' = 0,$$

alors nous avons $\tilde{\Phi}_l = 0$ pour tous les modes l propagatifs (i.e pour tous les entiers tels que β_l est réel).

Preuve du Lemme 19. Si $\Phi \in \mathcal{X}^\delta$ vérifie l'équation (60) alors nous obtenons d'après (58) que

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \alpha_l(\gamma, k) \, |\tilde{\Phi}_l|^2$$

est nulle. Donc sa partie imaginaire est nulle. Ce qui donne $\tilde{\Phi}_l = 0$ pour tout l tel que $|l| \leq M$ où M est le nombre de modes propagatifs de la structure éclairée à la fréquence k. M est le sup de tous les entiers l tels que β_l est réel.
Soient

$$k_{l,j} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \sqrt{(j\pi/h)^2 + (\omega - 2\pi l/d)^2 + \gamma^2},$$

$$k_l = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \sqrt{(\omega - 2\pi l/d)^2 + \gamma^2},$$

et

$$\psi_l(x) \;=\; e^{i2\pi lx/d}.$$

Remarquons que nous avons $\Big\{k_l\Big\}_{l\in\mathbb{Z}} = \Lambda^r$ et $\Big\{k_{l,j}\Big\}_{l\in\mathbb{Z},j\geq 1} = \Lambda^s$.
D'après le théorème 5, pour tout $j \geq 1$ et $l \in \mathbb{Z}$, il existe une valeur de k (à γ et ω fixés) dans un petit voisinage de $k_{l,j}$ et une autre valeur de k dans un petit voisinage de k_l pour lesquelles l'équation intégrale (60) admet une solution non triviale Φ dans $\mathcal{X}^\delta$. Nous allons montrer que les valeurs de k associées à $\{k_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ sont à partie imaginaire strictement négative et celles associées à $\{k_{l,j}\}_{l\in\mathbb{Z},j\geq 1}$ sont sur la droite réelle. Nous avons tout d'abord le lemme suivant.

LEMME 20. *Il n'existe pas de valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$ sur l'axe réel inférieure à la fréquence de seuil $\inf\limits_{l\in\mathbb{Z}} k_{l,j=1}$.*

Preuve du Lemme 20. Soit k entre 0 et $\inf_{l\in\mathbb{Z}} k_{l,j=1}$. Soit Φ dans $\mathcal{X}^\delta$ solution de l'équation (60). D'après le lemme précédent $\tilde{\Phi}_l = 0$ pour tout l tel que $|l| \leq M$. Comme la fonction $\alpha_l(\gamma,k)$ est réelle et de signe constant pour tout l tel que son module est supérieur à M alors nous avons $\tilde{\Phi}_l = 0$ pour tout l dans $\mathbb{Z}$. Ce qui conduit à $\Phi = 0$. Il n'existe donc pas de valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta$ sur l'axe réel inférieure à la fréquence de seuil $\inf_{l\in\mathbb{Z}} k_{l,j=1}$.

Pour tout $l_0 \geq 1$, l'opérateur $\mathcal{K}_1^\delta$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{K}_1^\delta \;=\; \alpha_{l_0}(\gamma,k)\,(.,\psi_{l_0})\,\psi_{l_0} + \sum_{l\neq l_0} \alpha_l(\gamma,k)\,(.,\psi_l)\,\psi_l. \tag{61}$$

Dans cette décomposition, la fonction $k \mapsto \alpha_{l_0}(\gamma,k)$ décrit toute la droite réelle lorsque k décrit l'intervalle $]k_{l_0,j_0}, k_{l_0,j_0+1}[$ si $\varepsilon_2\mu_2 \geq \varepsilon_1\mu_1$. Ce qui nous permet d'obtenir le résultat suivant.

LEMME 21. *Supposons que $\varepsilon_2\mu_2 \geq \varepsilon_1\mu_1$. Alors il existe une valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta$ dans l'intervalle $]k_{l_0,j_0}, k_{l_0,j_0+1}[$, pour tout $j_0 \geq 1$ et $l_0 \in \mathbb{Z}$.*

Preuve du Lemme 21. Remarquons que si $\varepsilon_2\mu_2 \geq \varepsilon_1\mu_1$ alors nous avons

$$k_l \leq k_{l,j}, \quad \forall\, l \in \mathbb{Z}, \forall\, j \geq 1.$$

Soit maintenant une fonction Φ dans $\mathcal{X}^\delta$ telle que $\mathcal{K}_1^\delta\,\Phi = 0$. De la décomposition (61) de $\mathcal{K}_1^\delta$ nous obtenons

$$\alpha_{l_0}(\gamma,k)\,(\Phi,\psi_{l_0})\,\psi_{l_0} + \sum_{l\neq l_0} \alpha_l(\gamma,k)\,(\Phi,\psi_l)\,\psi_l \;=\; 0. \tag{62}$$

Dans l'identité (62) nous savons que les fonctions $\alpha_l(\gamma,k)$ sont à valeurs réelles puisque, comme nous l'avons déjà vu dans le lemme 19, $\mathcal{K}_1^\delta\,\Phi = 0$ implique que $\tilde{\Phi}_l = 0$ pour les l correspondant aux modes propagatifs et donc les fonctions $\alpha_l(\gamma,k)$ à partie imaginaire non nulle n'interviennent pas. Il est facile de voir que la fonction $k \mapsto \alpha_{l_0}(k)$ décrit toute la droite réelle lorsque k décrit l'intervalle $]k_{l_0,j_0}, k_{l_0,j_0+1}[$. Maintenant, s'il existe une fonction non nulle Φ dans $\mathcal{X}^\delta$ orthogonale à tous les ψ_l pour $l \neq l_0$ (i.e. $(\Phi,\psi_l) = 0$, pour tout $l \neq l_0$) alors il suffit de prendre k racine de l'équation $\alpha_{l_0}(\gamma,k) = 0$ dans l'intervalle $]k_{l_0,j_0}, k_{l_0,j_0+1}[$ et Φ vérifie alors l'équation intégrale (60). Dans le cas contraire, l'opérateur

$$\mathcal{L} \;=\; \Phi \longmapsto \sum_{l\neq l_0} (\Phi,\psi_l)\,\psi_l,$$

est inversible de $\mathcal{X}^\delta$ dans $\mathcal{Y}_0^\delta$. Il suffit de prendre dans ce cas k racine de l'équation

$$\alpha_{l_0}(\gamma, k) \;=\; -\frac{(\mathcal{L}^{-1}\,\psi_{l_0}, \psi_{l_0})}{(\psi_{l_0}, \psi_{l_0})},$$

dans l'intervalle $]k_{l_0,j_0}, k_{l_0,j_0+1}[$ et

$$\Phi \;=\; \frac{(\mathcal{L}^{-1}\,\psi_{l_0}, \psi_{l_0})}{(\psi_{l_0}, \psi_{l_0})}\,\mathcal{L}^{-1}\,\psi_{l_0}.$$

La fonction Φ est non nulle et vérifie l'équation intégrale (60).
Nous avons le lemme suivant.

LEMME 22. *Suppossons que $\varepsilon_2\mu_2 \geq \varepsilon_1\mu_1$. Pour tout $l \in \mathbb{Z}$, pour tout $j \geq 1$ et pour δ suffisamment petit, il existe une valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$ dans un petit voisinage réel de $k_{l,j}$ et une valeur caractéristique dont la partie imaginaire est strictement négative dans un petit voisinage de k_l.*

Preuve du Lemme 22. Nous avons d'une part démontré qu'il existe une seule valeur caractéristique dans un voisinage de chacun des $k_{l,j}$ et d'autre part que dans le segment $]k_{l,j}, k_{l,j+1}[$ il existe une valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $k \mapsto \mathcal{K}_1^\delta$. Ce qui prouve que les valeurs caractéristiques associées aux $k_{l,j}$ sont sur l'axe réel. Il reste à démontrer que celles associées à la famille $(k_l)_{l\in\mathbb{Z}}$ sont à parties imaginaires strictement négatives. Ceci se démontre de la même manière que le Lemme 20. En effet, pour l_0 fixé, $\tilde{\Phi}_l = 0$ pour tout $|l| \leq l_0$ d'après le Lemme 19. Comme tous les α_l sont négatifs pour tout $|l| > l_0$, nous en déduisons que $\Phi = 0$. Ce qui termine la démonstration de ce lemme.

Nous allons maintenant préciser la position des valeurs caractéristiques de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_2^\delta$ par rapport à l'axe réel. Nous commençons par établir le lemme suivant.

LEMME 23. *Pour tout $\psi \in \mathcal{Y}^\delta$, nous avons :*

$$(\mathcal{K}_2^\delta\,\psi, \psi) \;=\; d\sum_{l\in\mathbb{Z}} \lambda_l(\gamma, k)\,|\tilde{\Phi}_l|^2, \tag{63}$$

avec

$$\lambda_l(\gamma, k) \;=\; -\frac{2i\beta_l(\gamma, k)}{d\mu_2} + \frac{2}{dh\mu_1}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(\omega - 2\pi l/d)^2 + \gamma^2 - k^2\varepsilon_1\mu_1}{(j\pi/h)^2 + (\omega - 2\pi l/d)^2 + \gamma^2 - k^2\varepsilon_1\mu_1}. \tag{64}$$

Ce lemme se démontre facilement à partir des expréssions des noyaux $\mathcal{G}_1^D$ et $\mathcal{G}_2^D$ et en utilisant le fait que $\tilde{\Phi}$ est nulle aux deux extrémités $x = \pm d/2$.

Nous décomposons $\mathcal{K}_2^\delta$ sous la forme

$$\mathcal{K}_2^\delta \;=\; \lambda_{l_0}(\gamma, k)\,(., \psi_{l_0})\,\psi_{l_0} + \sum_{l\neq l_0}\lambda_l(\gamma, k)\,(., \psi_l)\,\psi_l. \tag{65}$$

Nous avons le lemme suivant.

LEMME 24. *Supposons que $\varepsilon_2\mu_2 \geq \varepsilon_1\mu_1$. Pour tout $l \in \mathbb{Z}$, pour tout $j \geq 1$ et pour δ suffisamment petit, il existe une valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_2^\delta$ dans un petit voisinage réel de $k_{l,j}$ et une valeur caractéristique dont la partie imaginaire est strictement négative dans un petit voisinage complexe de k_l.*

Maintenant, si $\varepsilon_2\mu_2 < \varepsilon_1\mu_1$ alors il est clair que si pour un $l \in \mathbb{Z}$ donné, nous avons

$$k_l \leq k_{l,j}, \quad \forall\, j \geq 1,$$

alors nous obtenons les mêmes conclusions que dans le cas $\varepsilon_2\mu_2 \geq \varepsilon_1\mu_1$: il existe une fréquence de résonance autour de chacune des valeurs $\{k_{l,j}\}_{j\geq 1}$ sur l'axe réel. Dans le cas où il existe j_0 tel que

$$k_{l,j_0} \leq k_l \leq k_{l,j_0+1},$$

alors les résonances associées aux $k_{l,j}$ pour les $j \leq j_0$ sont à partie imaginaire strictement négative et celles associées aux $k_{l,j}$ pour $j \geq j_0 + 1$ sont sur l'axe réel. Nous résumons les résultats de cette section dans le théorème suivant

THÉORÈME 9. *Les valeurs de k pour lesquelles les équations de Maxwell* (4) *admettent une solution non triviale sont :*
soit autour de $\{k_l\}_{l\in\mathbf{Z}}$, à partie imaginaire strictement négative
soit autour de $\{k_{l,j}\}_{l\in\mathbf{Z},j\geq 1}$ sur l'axe réel si $k_{l,j} \geq k_l$ et à partie imaginaire strictement négative sinon.

Nous faisons les commentaires suivants :
si nous considérons notre structure périodique comme une perturbation de la structure de référence obtenue en remplaçant les lames conductrices par un plan parfaitement conducteur considéré comme un obstacle périodique de période d, alors les résultats résumés dans le théorème précédent s'interpretent de la manière suivante. Ouvrir des petites fentes dans le plan conducteur modifie la position des fréquences de résonance $\{k_{l,j}\}_{l\in\mathbf{Z},j\geq 1}$ de la structure de référence sur l'axe réel et ajoute une fréquence de résonance à partie imaginaire strictement négative autour de chacun des k_l.
Le nombre de fréquences de résonance dont la partie imaginaire est strictement négative et dont la partie réelle est inférieure ou égale à k_{l_0,j_0} correspond au nombre de modes propagatifs de la structure périodique éclairée à la fréquence k_{l_0,j_0}.

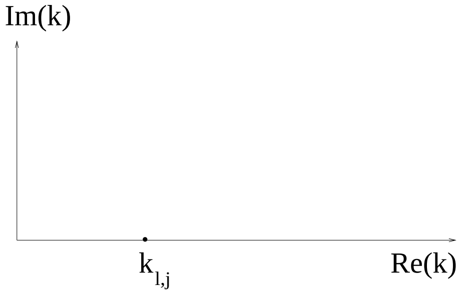

Figure 4 : *La structure de référence*

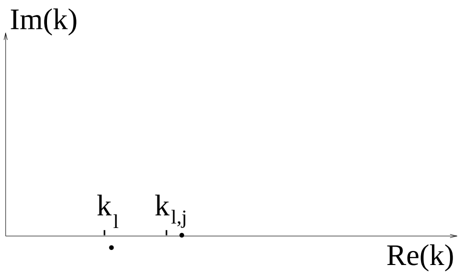

Figure 5 : *La structure périodique*

6 Existence et localisation des nombres d'ondes longitudinaux

Dans cette section nous nous fixons ω et k et nous cherchons les nombres d'ondes longitudinaux γ tels que les équations de Maxwell (4) admettent une solution non triviale. Comme nous l'avons déjà indiqué, ce problème qui intéresse traditionnellement les physiciens est non linéaire en γ et en γ^2. Il ne s'agit donc pas de problème de résonance (ou de valeurs propres) classique. La méthode des opérateurs intégraux permet de montrer l'existence des nombres d'ondes longitudinaux et de les localiser dans le plan complexe.

Nous définissons $\Sigma^s(k,\omega)$ comme l'ensemble de valeurs de γ dans $\mathbb{C}$ pour lesquels il existe $j \geq 1, l \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$(j\pi/h)^2 + (\omega - 2\pi l/d)^2 + \gamma^2 - k^2\varepsilon_1\mu_1 = 0.$$

Nous introduisons $\Sigma^r(k,\omega)$ comme l'ensemble de valeurs de γ dans $\mathbb{C}$ pour lesquels il existe l dans $\mathbb{Z}$ tel que $\beta_l = 0$ et nous notons par $\Sigma(k,\omega)$ la réunion de $\Sigma^s(k,\omega)$ et de $\Sigma^r(k,\omega)$. L'ensemble $\left\{l \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } \beta_l = 0\right\}$ est l'ensemble de modes de Bragg tangents de la structure périodique.

Soient

$$\gamma_{l,j} = \sqrt{k^2\varepsilon_1\mu_1 - (j\pi/h)^2 - (\omega - 2\pi l/d)^2}, \tag{66}$$

pour $l \in \mathbb{Z}$ et $j \geq 1$ tels que $k^2\varepsilon_1\mu_1 \geq (j\pi/h)^2 + (\omega - 2\pi l/d)^2$ et

$$\gamma_l = \sqrt{k^2\varepsilon_2\mu_2 - (\omega - 2\pi l/d)^2}, \tag{67}$$

pour $l \in \mathbb{Z}$ tel que $k^2\varepsilon_2\mu_2 \geq (\omega - 2\pi l/d)^2$.

Soit $\gamma_0 \in \Sigma(k,\omega)$. Il est facile de voir que γ_0 est soit sur l'axe réel, soit sur l'axe imaginaire et qu'il existe un nombre fini de valeurs de $\gamma_0 \in \Sigma(k,\omega)$ sur l'axe réel. Ces valeurs sont liées aux modes de Bragg de la structure périodique.

Dans un petit voisinage complexe de γ_0 noté $\mathcal{V}(\gamma_0)$ nous écrivons d'une manière similaire à (39) et (40) l'opérateur intégral $\mathcal{K}_1^\delta$ sous l'une des deux formes canoniques suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1^\delta(\gamma,\omega,k)\Phi(x) &= (\varepsilon_1 c_1^{(1)} + \varepsilon_2 c_2^{(1)}) \int_{-\delta}^{\delta} \ln|x-x'|\, \Phi(x')\, dx' + \frac{\mathcal{L}_{-1}^{(1,s)}(\delta,k,\omega,\gamma)\Phi(x)}{\gamma-\gamma_0} \\ &\quad + \mathcal{L}_0^{(1,s)}(\delta,\gamma,\omega,k)\Phi(x), \end{aligned} \tag{68}$$

si γ_0 est dans Σ^s et

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1^\delta(\gamma,\omega,k)\Phi(x) &= (\varepsilon_1 c_1^{(1)} + \varepsilon_2 c_2^{(1)}) \int_{-\delta}^{\delta} \ln|x-x'|\, \Phi(x')\, dx' + \frac{\mathcal{L}_{-1}^{(1,r)}(\delta,k,\omega,\gamma)\Phi(x)}{\sqrt{\gamma_0-\gamma}} \\ &\quad + \mathcal{L}_0^{(1,r)}(\delta,\gamma,\omega,k)\Phi(x), \end{aligned} \tag{69}$$

si $\gamma_0 \in \Sigma^r$, où les noyaux $\mathcal{L}_{-1}^{(1,s)}, \mathcal{L}_0^{(1,s)}, \mathcal{L}_{-1}^{(1,r)}$ et $\mathcal{L}_0^{(1,r)}$ sont holomorphes en la variable γ dans $\mathcal{V}(\gamma_0)$.

Nous décomposons d'une manière analogue la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_2^\delta$ sous l'une des deux formes canoniques suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2^\delta(\gamma,\omega,k)\psi(x) &= -(\frac{c_1^{(2)}}{\mu_1} + \frac{c_2^{(2)}}{\mu_2})\, v.p. \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|x-x'|^2}\, \psi(x')\, dx' + \frac{\mathcal{L}_{-1}^{(2,s)}(\delta,\gamma,\omega,k)\psi(x)}{\gamma-\gamma_0} \\ &\quad + \mathcal{L}_0^{(2,s)}(\delta,\gamma,\omega,k)\psi(x), \end{aligned}$$

(70)

si γ_0 est dans Σ^s et

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2^\delta(\gamma,\omega,k)\psi(x) &= -(\frac{c_1^{(2)}}{\mu_1}+\frac{c_2^{(2)}}{\mu_2})\, v.p. \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|x-x'|^2}\,\psi(x')\,dx' + \frac{\mathcal{L}_{-1}^{(2,r)}(\delta,\gamma,\omega,k)\psi(x)}{\sqrt{\gamma_0-\gamma}} \\ &\quad +\mathcal{L}_0^{(2,r)}(\delta,\gamma,\omega,k)\psi(x),\end{aligned} \tag{71}$$

si $\gamma_0 \in \Sigma^r$, où les noyaux $\mathcal{L}_{-1}^{(2,s)}, \mathcal{L}_0^{(2,s)}, \mathcal{L}_{-1}^{(2,r)}$ et $\mathcal{L}_0^{(2,r)}$ sont holomorphes en la variable γ dans $\mathcal{V}(\gamma_0)$.

LEMME 25. *Les quatre opérateurs $\mathcal{L}_{-1}^{(1,s)}, \mathcal{L}_{-1}^{(1,r)}, \mathcal{L}_{-1}^{(2,s)}$ et $\mathcal{L}_{-1}^{(2,r)}$ sont de dimension un.*
Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 10. (**Localisation des nombres d'ondes longitudinaux**) *Il existe $\delta_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < \delta < \delta_0$, et pour tout $\gamma_0 \in \Sigma^s(k,\omega)$, il existe un petit voisinage $\mathcal{V}(\gamma_0)$ de γ_0 dans lequel il existe exactement une valeur caractéristique $\gamma_1(k,\omega,\delta)$ de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta$ et une valeur caractéristique $\gamma_2(k,\omega,\delta)$, distincte de $\gamma_1(k,\omega,\delta)$ pour δ suffisamment petit, de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_2^\delta$. Si $\gamma_0 \in \Sigma^r(k,\omega)$, alors il existe une unique valeur caractéristique de la famille d'opérateurs $\mathcal{K}_1^\delta$ dans l'image inverse dans le plan $\gamma-$complexe d'un petit voisinage de 0 en la variable $\xi = \sqrt{\gamma_0-\gamma}$. On a le même résultat pour la famille $\mathcal{K}_2^\delta$ et comme les deux valeurs caractéristiques dans $\mathcal{V}(\gamma_0)$ (pour tout $\gamma_0 \in \Sigma(k,\omega)$) des familles $\mathcal{K}_1^\delta$ et $\mathcal{K}_2^\delta$ sont distinctes, le système* (37) *détermine comme dans le théorème précédent les ondes normales.*

Comme pour les fréquences de résonance, nous précisons la position par rapport à l'axe réel des nombres d'ondes longitudinaux qui sont proches de γ_l et $\gamma_{l,j}$ donnés par les formules (67) et (66). Nous utilisons la même technique que pour les fréquences de résonance. Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 11. *Supposons qu'il existe l_0 et j_0 tels que γ_{l_0+1} et γ_{l_0,j_0+1} soient sur l'axe réel et que $\gamma_{l_0+1} < \gamma_{l_0,j_0+1}$ alors il existe un nombre d'ondes longitudinal réel sur le segment $]\gamma_{l_0,j_0+1}, \gamma_{l_0,j_0}[$.*

Preuve du Théorème 11. Nous considérons dans la formule (58) les coefficients $\alpha_l(\gamma,k)$ comme fonction de la variable γ. Nous réécrivons ces coefficients sous la forme

$$\alpha_l(\gamma,k) = \frac{2\varepsilon_2}{id\sqrt{\gamma_l^2-\gamma^2}} - \frac{2\varepsilon_1}{dh}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{\gamma^2-\gamma_{l,j}^2}. \tag{72}$$

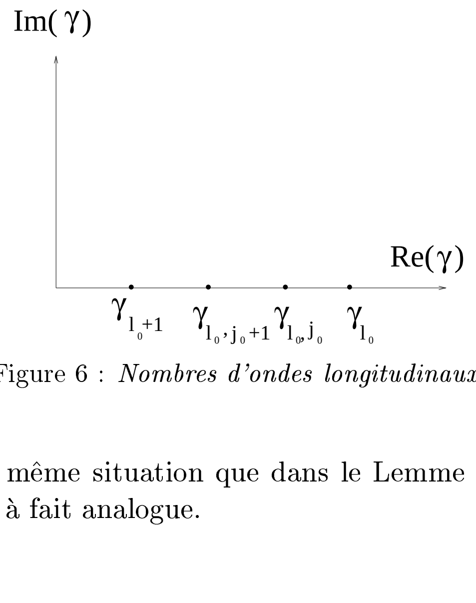

Figure 6 : *Nombres d'ondes longitudinaux*

Nous sommes donc dans la même situation que dans le Lemme 21. La démonstration se termine d'une manière tout à fait analogue.

7 Fréquences de résonances pour une antenne de microstrip

Dans cette section, nous considérons le problème d'existence et de distribution de fréquences de résonance pour une structure périodique duale à celle étudiée jusqu'à ici. Elle est constituée par des lames conductrices infiniment minces de largeur 2δ déposées périodiquement avec une période d sur une couche de diélectrique (voir figure 3). La largeur de la fente de diélectrique entre deux lames conductrices consécutives est $d-2\delta$. Nous ramenenons notre problème comme dans les deux dernières sections à l'étude des valeurs caractéristiques d'une famille d'opérateurs intégraux et nous donnons sans démonstration le résultat d'existence et de distribution de fréquences de résonance pour une antenne de microstrip. Ce résultat se démontre d'une manière tout à fait analogue au Théorème 5. Pour la simplicité de l'exposé, nous supposons que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ et $\mu_1 = \mu_2$.
Soient les noyaux de Green périodiques définis dans $]-d/2, d/2[\ \times\ ]0, +\infty[$ par les expressions suivantes

$$\mathcal{G}^D(\gamma,\omega,k,x,y,x',y') \ = \ \frac{1}{d}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\frac{1}{i\beta_l}e^{i2\pi l(x-x')/d}\Big(e^{i\beta_l|y-y'|} - e^{i\beta_l|y+y'|}\Big),$$

et

$$\mathcal{G}^N(\gamma,\omega,k,x,y,x',y') \ = \ \frac{1}{d}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\frac{1}{i\beta_l}e^{i2\pi l(x-x')/d}\Big(e^{i\beta_l|y-y'|} + e^{i\beta_l|y+y'|}\Big).$$

Il est facile de voir que les noyaux de Green périodiques $\mathcal{G}^D$ et $\mathcal{G}^N$ satisfont au sens des distributions les équations suivantes :

$$(73) \qquad \begin{cases} \Delta_{-\omega}\,\mathcal{G}^D + (k^2\varepsilon\mu - \gamma^2)\,\mathcal{G}^D \ = \ \delta_{per}, \\ \mathcal{G}^D \ = \ 0, \quad \text{sur } y = 0, \end{cases}$$

et

$$(74) \qquad \begin{cases} \Delta_{-\omega}\,\mathcal{G}^N + (k^2\varepsilon\mu - \gamma^2)\,\mathcal{G}^N \ = \ \delta_{per}, \\ \partial_y\,\mathcal{G}^N \ = \ 0, \quad \text{sur } y = 0. \end{cases}$$

Nous écrivons maintenant des équations intégrales vérifiées par les composantes E_x, E_y et E_z du champ électrique E.

THÉORÈME 12. *E_x, E_y et E_z vérifient les équations intégrales suivantes :*

$$(75) \qquad v.p.\int_{-\delta}^{\delta}\partial_{yy'}\,\mathcal{G}^N(\gamma,\omega,k,x,x',h,h)\,\Big(E_y^1 - E_y^2\Big)(x',h)\,dx' \ = \ 0.$$

$$(76) \qquad \int_{-\delta}^{\delta}\mathcal{G}^D(\gamma,\omega,k,x,x',h,h)\,\Big(\,\partial_y\,E_x^1 - \partial_y\,E_x^2\Big)(x')\,dx' \ = \ \mathcal{L}_3^\delta(E_y^1),$$

et

$$(77) \qquad \int_{-\delta}^{\delta}\mathcal{G}^D(\gamma,\omega,k,x,x',h,h)\,\Big(\,\partial_y\,E_z^1 - \partial_y\,E_z^2\Big)(x')\,dx' \ = \ \mathcal{L}_4^\delta(E_y^1),$$

où les opérateurs $\mathcal{L}_3^\delta$ et $\mathcal{L}_4^\delta$ sont deux opérateurs intégraux sur $]-d/2,-\delta[\,\cup\,]\delta, d/2[$.

Soit $\mathcal{L}_1^\delta$ et $\mathcal{L}_2^\delta$ les deux opérateurs intervenant dans (75) et (76)

$$\mathcal{L}_1^\delta\,\Phi(x) \ = \ v.p.\int_{-\delta}^{\delta}\partial_{yy'}\,\mathcal{G}^N(\gamma,\omega,k,x,x',h,h)\,\Phi(x')\,dx',$$

et

$$\mathcal{L}_2^\delta\, \psi(x) \;=\; \int_{-\delta}^{\delta} \mathcal{G}^D(\gamma, \omega, k, x, x', h, h)\, \psi(x')\; dx'.$$

Rappelons que

$$\Big(E_y^1 \,-\, E_y^2\Big)(x', h),$$

pour x' dans l'intervalle $]-\delta, \delta[$ est la densité de charge électrique sur les lames conductrices et que les quantités

$$\Big(\,\partial_y\, E_x^1 \,-\, \partial_y\, E_x^2\Big)(x', h)$$

et

$$\Big(\,\partial_y\, E_z^1 \,-\, \partial_y\, E_z^2\Big)(x', h)$$

pour x' dans l'intervalle $]-\delta, \delta[$, sont les densités de courant surfaciques sur les lames. Nous dirons que k est une fréquence de résonance pour l'antenne de microstrip si la densité de charge ou les densités de courant surfaciques sont non nulles sur les lames conductrices. Ceci correspond à un phénomène de transmission d'énergie par les lignes conductrices.

Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 13. *Les fréquences de résonance pour les équations de Maxwell* (4) *dans les lignes de transmission périodiques sont les valeurs caractéristiques des opérateurs intégraux* $\mathcal{L}_1^\delta$ *et* $\mathcal{L}_2^\delta$ *et elles sont dans des voisinages des pôles des noyaux de Green périodiques* $\mathcal{G}^D$ *et* $\mathcal{G}^N$ *qui sont les éléments de l'ensemble* Λ^r *donné par* (30).

8 Commentaires sur la méthode des opérateurs intégraux

Nous avons montré comment la méthode des opérateurs intégraux permet de déterminer à la fois les fréquences de résonance et les nombres d'ondes longitudinaux pour deux structures périodiques différentes. Pour que cette analyse soit possible on doit disposer d'un petit paramètre et être capable d'expliciter les noyaux de Green qui interviennent dans les opérateurs intégraux.

References

[1] A.I. Adorina et V.P. Shestopalov, *Diffraction of electromagnetic waves obliquely incident on a metallic grating with a dielectric layer,* Sov. Phys. Tech. Phys., 8, pp.479-486, 1963.

[2] A. S. Bonnet-Bendhia, *Analyse modale des guides d'ondes ouverts,* Habilitation à diriger les recherches de l'Université de Paris VI, 1995.

[3] A. S. Bonnet-Bendhia et F. Starling, *Guided waves by electromagnetic gratings and non-uniqueness examples for the diffraction problem,* Math. Meth. Appl. Sci., Vol.17, 305-338 (1994).

[4] L. Brillouin, *Wave propagation in periodic structures,* Dover, New York, 1953.

[5] C. M. Bulter, *Current induced on a conducting strip which resides on the planar interface between two semi-infinite half-spaces,* IEEE, Trans. Microwave Theory and tech., Vol.32, 226-231 (1984).

[6] X. Chen et A. Friedman, *Maxwell's equations in a periodic structure,* Trans. Amer. Math. Soc., Vol.323, 465-507 (1991).

[7] E. V. Chernokozhim et Yu. V. Shestopolov, *Fredholm nature of an integral operator with a kernel having a weak singularity,* Vestnik Moshovshago Universiteta Seiya 15, No.1, 23-28 (1982).

[8] W. C. Chew et J. A. Kong, *Resonance of the axial-symmetric modes in microstrip disk resonators,* J. Math. Phys., Vol. 21, 582-591 (1979).

[9] R. E. Collin, Field theory of guided waves, Second Edition, IEEE Press, New York (1991).

[10] N. K. Das et D. M. Pozar, *A generalized spectral domain Grenn's function for multilayer dielectric substrates with application to multilayer transmission lines,* IEEE, Trans. Microwave Theory and tech., Vol.35, 326-335 (1987).

[11] R. Dautray et J. L. Lions, Analyse mathématiques et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Volume 6, Chapitre XIII, Méthodes intégrales et numériques, Masson (1988).

[12] E. J. Denlinger, *A frequency dependent solution microstrip transmission lines,* IEEE, Trans. Microwave Theory and tech., Vol.19, 30-39 (1971).

[13] B. Ducomet, *Analytic properties of the resolvent for the Helmholtz operator outside a periodic surface,* Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.61, No.3, 293-314 (1994).

[14] C. Eckart, *A general derivation of the formula for the diffraction by a perfect grating,* Phys. Rev., 44, 12-14 (1933).

[15] V. M. Fomin, *The steady antiplane dynamic contact problem of a periodic structure for an elastic half-space,* Appl. Maths Mechs, Vol.60, No.1, 135-144 (1996).

[16] C. Gerard, *Resonance theory in atom-surface scattering,* Commun. Math. Phys., Vol.126, 263-290 (1989).

[17] I. TS. Gohberg et E. I. Sigal, *Operator extension of the logarithmic residue theorem and Rouche's theorem,* Math. USSR Sbornik, 84, No.4, (1971) 607-642.

[18] H. E. Green, *The numerical solution of some important transmission line problems,* IEEE, Trans. Microwave Theory and tech., Vol.13, 676-692 (1965).

[19] J. M. Grimm et D. P. Nyquist, *Spectral analysis considerations relevant to radiation and leaky modes of open-boundary microstrip transmission line,* IEEE, Trans. Microwave Theory and tech., Vol.41, 150-153 (1993).

[20] A.E. Heins, *The Green's function for periodic structures in diffraction theory with an application to parallel plate media, I,* J. Math. Mech., 6, (1957), pp.401-426.

[21] R.L. Holford, *Scattering of sound waves at a periodic, pressure-release surface: an exact solution,* J. Acous. Soc. Am., Vol 70, 1116-1128, (1981).

[22] J. S. Hornsby et A. Gopinakh,*Fourier analysis of a dielectric-loaded waveguide with a microstrip line,* Electron. Lett., Vol.5, 265-267 (1969).

[23] A. Kirsch, *Diffraction by periodic structures,* Inverse Problems in Mathematical Physics, Lecture Notes in Physics 422 (1993), Springer-Verlag.

[24] M. Kobayashi, *Longitudinal and transverse current distributions on microstrip lines and their closed-form expressions,* IEEE, Trans. Microwave Theory and tech.,Vol.33, 952-959 (1985).

[25] R. Kress, Linear integral equations, Applied Mathematical Sciences 82, Springer-Verlag (1989).

[26] A. S. Il'inskii, *Justification of a method for calculating normal waves of microstrip lines,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol.17, No.10, 1868-1874 (1981).

[27] A. S. Il'inskii et M. M. Mutallimov, *An investigation of the dispertion equations in the spectral methods,* Soviet. Math. Dokl., Vol. 28, No.1, 153-155 (1983).

[28] A. S. Il'inskii et Yu. V. Shestopalov, *Applications of the methods of spectral theory in the problems of wave propagation,* Press de l'Université de Moscou (1989).

[29] V. V. Lozhechko et Yu. V. Shestopalov, *Problems of excitation of open cylindrical resonators with irregular boundary,* Comp. Maths. Math. Phys., Vol.35, No.1, 53-61 (1995).

[30] R.F. Millar, *On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface, II*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 69, 217-225, (1971).

[31] R. Mittra et T. Itoh, *A new technique for the analysis of the dispersion characteristics of microstrip lines,* IEEE, Trans. Microwave Theory and tech., Vol.19, 47-56 (1971).

[32] J. R. Mosig et F. E. Gardiol, *Analytical and numerical techniques in the Green's function treatement of microstrip antennas and scatters,* Proc. Inst. Elec. Eng., Vol.130, No.2, 175-182 (1983).

[33] L. A. Muravei, *Analytic continuation with respect to a parameter of the Green's functions of exterior boundary value problems for the two-dimensional Helmholtz equations III*, Math. USSR Sbornik, Vol.34, No.1, 55-98 (1978).

[34] N. I. Muskhelishviki, Singular Integral Equations, Noordhoff International Publishing (1977).

[35] J.C. Nédélec et F. Starling, *Integral equation methods in a quasi-periodic diffraction problem for the time-harmonic Maxwell equations,* SIAM J. Math. Anal., 22 (1991), pp. 1679-1701.

[36] Lord Rayleigh, *On the dynamical theory of gratings*, Proc. Roy. Soc., Ser.A, 79, 399-416 (1907).
[37] Lord Rayleigh, *The theory of sound*, deuxième ed. vol. 2, 89-96, Dover, 1945.
[38] M. Reed et B. Simon, Methods of Modern Physics, IV, Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1980.
[39] V. M. Repin, *Diffraction of electromagnetic waves by a system of slots,* Compt. Methods and Programming, Moscow University Press, 16, 35-47 (1971).
[40] W. P. Richards, Y. T. Lo et D. D. Harrison, *An improved theory for microstrip antennas and applications,* IEEE, Trans. Microwave Theory and tech., Vol.29, 38-46 (1981).
[41] T. Rozzi et G. Cerri, *Radiation modes of open microstrip with applications,* IEEE, Trans. Microwave Theory and tech.,Vol.43, No.6, 1364-1369 (1995).
[42] V.H. Rumsey, *Propagation over a sheet of sinusoidal wires and its application to frequency independent antennas,* in Electromagnetic Theory and Antennas pt.2, E.C. Jordan, Ed., New-York, Pergamon, 1963, pp.1011-1030.
[43] G. V. Rozenblum, M. A. Shubin et M. Z. Solomyak, Spectral theory of differential operators, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 64, (1989).
[44] D. I. Sherman, *On the inversion of singular integral equations to which certain particular problems of potential theory reduce,* PMM USSR, Vol.51, No.6, 793-797 (1987).
[45] Yu. V. Shestopalov, *On the spectrum of a family of non-self-adjoint boundary value problems for systems of Helmholtz equations,* U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. Vol.21, No.6, (1981) 97-108
[46] Yu. V. Shestopalov, *On the theory of cylindrical resonators*, Math. Meth. Appl. Sci., 14, (1991) 355-375.
[47] Yu. V. Shestopalov, *Spectral properties of a class of non-self-adjoint boundary-value problems for systems of Helmholtz equations*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 252, 1108-111 (1980).
[48] Yu. V. Shestopalov, *Justification of the spectral method of calculating characteristic waves of microband lines*, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 16, No. 8, 1504-1512 (1980).
[49] Yu. V. Shestopalov, *Calculation of open slotted structures with layered dielectric filling,* Press de l"Université de Moscou (1994).
[50] Yu. K. Sirenko et V. P. Shestopalov, *Existence of free quasistationary vibrations of an electromagnetic field in one-dimensional periodic gratings,* Sov. Dokl. Vol.32, No.3, 207-208 (1987).
[51] Yu. G. Smirnov, *Completeness of the system of natural waves and augmented waves of a particular filled waveguide with an irregular boundary,* Sov. Phys. Dokl. 32, 829-832 (1987).
[52] S. Steinberg, *Meromorphic families of compact operators,* Arch. Rat. Mech. Anal., Vol.31, 372-380 (1968).
[53] G.W. Stroke, *Diffraction Gratings*, Handbuch der Physik XXIX, Springer-Verlag, 1967.
[54] V. Twersky, *On the scattering of waves by an infinite grating,* IRE Trans. AP-4, 330-335, 1956.
[55] B. R. Vainberg, *On eigenfunctions of an operator corresponding to the poles of the analytic continuation of the resolvent through the continuous spectrum,* Math. USSR Sbornik, Vol.16, No.2, (1972), 307-322.
[56] J. M. Van Splunter et P. M. Van der Berg, *Spectral theory of diffraction of electromagnetic waves by a strip in the plane interface of two semi-infinite media,* Can. J. Phys., Vol.57, 1148-1156 (1979).
[57] J.L. Uretsky, *The scattering of plane waves from periodic surfaces,* Ann. Phys. (Leipzig), 33, 400-427, (1965).
[58] I.A. Urusovskii, *Diffraction by a periodic surface,* Soviet. Physics Acoustic, Vol 10, n 3, 287-293, (1965).
[59] P.C. Waterman, *Scattering by periodic surfaces*, J. Acous. Soc. Am., Vol 57, n 4, 701-802, (1975).
[60] C. Wei, R. F. Harrington, J. R. Mautz et T. K. Sarkar, *Multiconductor transmission lines in multilayered dielectric media,* IEEE, Trans. Microwave Theory and tech., Vol.32, 439-450 (1984).
[61] K. J. Witsch, *Examples of embedded eigenvalues for the Dirichlet Laplacien in perturbed waveguides,* Math. Meth. Appl. Sci., Vol.12, 91-93 (1990).

[62] T. T. Wu, *Theory of the microstrip,* J. Appl. Phys., Vol.28, No.3, 299-301 (1957).
[63] Y. Xu, *Radiation condition and scattering problem for time-harmonic acoustic waves in a stratified medium with a nonstratified inhomogeneity,* IMA J. Appl. Math., 54, 9-29 (1995).