Couplage Equations de Maxwell - Potentiels Retardés pour les Milieux Hétérogènes

Toufic ABBOUD*† Toni SAYAH †

Abstract

We solve the problem of the scattering of a transient electromagnetic wave by a bounded heterogeneous medium in $\mathbb{R}^3$ by the coupling of the Boundary Element Method and the Volumic Element Method. We first use the Retarded Potential Representation to reduce the PDE problem to an integro-differential problem posed in a bounded domain : the heterogeneous obstacle + the interface with the exterior domain. Then, we write this problem in a variational form that we approximate using finite elements in both time and space domains. That leads to a stable constructive numerical scheme. Finally, as a numerical example, we compare the exact and the computed RCS of a perfectly conducting sphere coated by a dielectric material.

1 Introduction

Nous nous intéressons à la diffraction d'une onde électromagnétique instationnaire par un obstacle borné de $\mathbb{R}^3$ de caractéristiques électromagnétiques ε et μ variables. La méthode des équations intégrales, très intéressante pour la résolution numérique des problèmes de diffraction pour sa robustesse et sa grande précision, ne peut pas être utilisée ici. Néanmoins, nous pouvons toujours utiliser la formule de représentation intégrale dite des "potentiels retardés" pour décrire les champs dans le milieu extérieur qui est homogène! Cette dernière utilise uniquement les traces tangentielles des champs électrique et magnétique sur l'interface milieu hétérogène - milieu extérieur, au cours du temps. Dans le milieu hétérogène, nous traduisons localement les équations de Maxwell. Le couplage entre les inconnues surfaciques et volumiques se fait en traduisant la continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique à la traversée de l'interface diélectrique - extérieur. Nous obtenons ainsi un problème intégro-différentiel avec conditions aux limites (sur les éventuels conducteurs parfaits) et conditions initiales. Ce problème est alors mis sous forme variationnelle espace-temps. L'existence, unicité et continuité par rapport aux données de la solution seront présentées dans un prochain article. Nous proposons ici une méthode numérique basée sur l'approximation de cette formulation. Il s'agit d'un couplage éléments finis de volume (dans le milieu hétérogène) - éléments finis de frontière (sur l'interface avec le milieu extérieur). Signalons que dans

*Centre de Mathématiques Appliquées - CNRS URA 756 Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

†IMACS - Ingénierie Mathématiques et Calcul Scientifique -Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

le cas de coefficients constants par morceaux, l'utilisation de la méthode des potentiels retardés seule donne des résultats plus précis. Nous présenterons cette méthode ainsi que des exemples numériques dans un prochain article.

L'utilisation de la méthode des équations intégrales sous forme variationnelle espace-temps a été d'abord étudiée par A. Bamberger et T. Ha-Duong [2] en 1996, pour résoudre le problème de diffraction d'onde acoustique. Plusieurs auteurs ont par la suite utilisé cette méthode pour résoudre différents problèmes d'ondes. Nous citons les travaux de Y. Ding [6] pour les ondes acoustiques, de E. Bécache [3] pour les ondes élastiques. A. Pujols [5] a suivi la même démarche et a effectué une expérimentation numérique en dimension 2, pour résoudre le problème de diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle parfaitement conducteur. I. Terrasse [13] a poursuivi les travaux en 3D toujours pour un obstacle parfaitement conducteur. Elle a introduit un nouveau cadre fonctionnel et a présenté des résultats numériques 3D. En 1995, V. Lange [8] a traité le problème de diffraction d'onde par un obstacle dissipatif tridimensionnel. Elle a présenté un schéma numérique constructif inconditionnellement stable.

La méthode de couplage entre les formules de représentation intégrale sur une surface Γ et des calculs à l'intérieur du domaine hétérogène délimité par Γ n'est pas nouvelle. Elle a d'abord été introduite dans le cas du Laplacien par Johnson et Nédélec [9]. Ces travaux ont été repris par Costabel et Stephan [7] qui ont exhibé une formulation symétrique qui a de meilleures propriétés numériques. Vincent Levillain [11], a traité, dans le domaine fréquentiel, le problème de diffraction d'onde par un obstacle fermé parfaitement conducteur recouvert d'une couche diélectrique. Il a entre autres testé numériquement un schéma non-symétrique et deux autres symétriques. Notre démarche dans le domaine temporel s'appuie fortement sur son travail. Signalons pour finir que V. Lubet [10] a développé une méthode de couplage potentiels retardés - éléments finis pour résoudre le problème de diffraction d'une onde acoustique par un obstacle hétérogène.

Le plan du papier est le suivant : Après une rapide présentation du problème et définition des notations et conventions utilisées dans la suite, nous énonçons un théorème qui introduit les potentiels retardés et qui permet de représenter les champs extérieurs en fonction des courants surfaciques. Ces courants servent dans un deuxième temps de conditions aux limites à un problème dans le milieu diélectrique. La continuité tangentielle des champs à travers l'interface nous permet de coupler les deux problèmes. Une formulation variationnelle symétrique est proposée. Nous présentons un premier schéma numérique qui semble inconditionnellement stable mais pas très précis. Une modification du schéma temporel "à la Newmark" permet d'obtenir de meilleurs résultats. Enfin, nous présentons quelques résultats numériques. Nous comparons la SER numérique d'une sphère conductrice recouverte d'une couche de diélectrique avec la solution de Mie.

2 Présentation du problème

Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^3$ et nous considérons un obstacle borné régulier constitué d'un conducteur parfait noté Ω^c de frontière $\Gamma^c = \partial\Omega^c$ et/ou d'un diélectrique hétérogène noté Ω. L'ouvert extérieur Ω^{ext} est le complémentaire de l'obstacle $\overline{\Omega^c \cup \Omega}$ dans $\mathbb{R}^3$, $\Gamma = \partial\Omega^{ext}$ est sa frontière. Pour la simplicité de l'exposé, nous supposons le milieu non-dispersif. La permittivité électrique $\varepsilon(x)$ et la perméabilité magnétique $\mu(x)$ sont des fonctions dans L^∞ vérifiant : $\varepsilon(x) \geq \varepsilon_{min} > 0$ et $\mu(x) \geq \mu_{min} > 0$ pour $x \in \Omega$, $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 > 0$ et $\mu(x) = \mu_0 > 0$ pour $x \in \Omega^{ext}$. La normale unitaire $\vec{n}$ est orientée vers l'intérieur de Ω^{ext} sur Γ et vers l'extérieur du conducteur sur Γ^c.

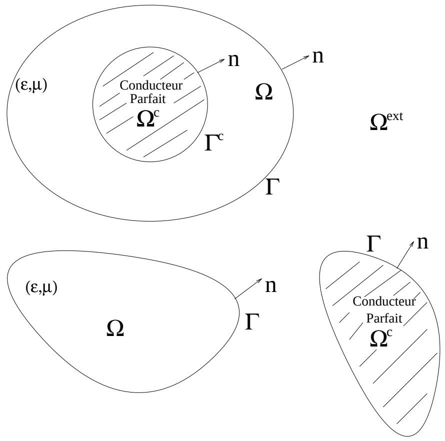


Figure 1: *L'obstacle*

Résumé de la situation :

$$
\begin{array}{llllll}
\Omega^c & : & \text{conducteur parfait} & \rightarrow & \Gamma^c & = & \partial\Omega^c \\
\Omega & : & \text{diélectrique} & \rightarrow & \Gamma^d & = & \partial\Omega \setminus \Gamma^c \\
\Omega^{ext} & : & \text{extérieur} & \rightarrow & \Gamma & = & \partial\Omega^{ext}
\end{array}
$$

Cet obstacle est éclairé par une onde incidente transitoire. On note $\vec{E}^i$ et $\vec{H}^i$ les champs électriques et magnétiques incidents qui vérifient les équations de Maxwell :

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl}
\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}^i}{\partial t}(t,x) + \vec{rot}\vec{E}^i(t,x) & = & \vec{0} \\
\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}^i}{\partial t}(t,x) - \vec{rot}\vec{H}^i(t,x) & = & -\vec{j}_s(t,x) \\
div\ \varepsilon_0 \vec{E}^i(t,x) & = & \rho_s \\
div\ \mu_0 \vec{H}^i(t,x) & = & 0
\end{array} \right. \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times\ \mathbb{R}^3
$$

où $\vec{j}_s$ et ρ_s sont les courants et charges sources. Ils vérifient l'équation de continuité (ou équation de conservation de la charge) :

$$
(2) \qquad \frac{\partial \rho_s}{\partial t}(t,x) + div\vec{j}_s(t,x) = 0 \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times\ \mathbb{R}^3
$$

et les conditions :

$$\vec{j}_s(t,x) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \rho_s(t,x) = 0 \qquad \text{pour} \ \ (t,x) \in \mathbb{R}_- \times (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^{ext}}) \tag{3}$$

On suppose qu'au temps $t = 0$, l'onde incidente n'a pas encore atteint l'obstacle :

$$\vec{E}^i(t,x) = \vec{0} \quad \text{pour} \ \ (t,x) \in \mathbb{R}_- \times (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^{ext}}) \tag{4}$$

idem pour $\vec{H}^i$.

On note $\vec{E}^d$ et $\vec{H}^d$ les champs diffractés et $\vec{E}$ et $\vec{H}$ les champs totaux :

$$\vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^d \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^d \tag{5}$$

Le déplacement électrique et l'induction magnétique sont donnés par :

$$\vec{D}(t,x) = \varepsilon(x)\vec{E}(t,x) \quad \text{et} \quad \vec{B}(t,x) = \mu(x)\vec{H}(t,x) \tag{6}$$

Le champ électromagnétique total vérifie les équations de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t,x) + r\vec{o}t\vec{E}(t,x) & = & \vec{0} \\ \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}(t,x) - r\vec{o}t\vec{H}(t,x) & = & -\vec{j}_s(t,x) \\ div\vec{D}(t,x) & = & \rho_s \\ div\vec{B}(t,x) & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{pour} \ (t,x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^c}) \tag{7}$$

avec

$$\vec{E}^d(t,x) = \vec{0} \quad \text{pour} \ (t,x) \in \mathbb{R}_- \times (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^c}) \tag{8}$$

idem pour $\vec{D}^d(t,x)$, $\vec{H}^d(t,x)$ et $\vec{B}^d(t,x)$. Ceci exprime la causalité.

Nous avons également les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x) & = & \vec{0} \\ \vec{H}(t,x).\vec{n}(x) & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{pour} \ \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^c. \tag{9}$$

Les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) et (9) définissent notre problème. Ce problème noté (P), admet une solution unique dans les espaces *ad hoc*.

Les champs vérifient également les conditions de transmissions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [\vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x)] & = & \vec{0} \\ [\vec{H}(t,x) \wedge \vec{n}(x)] & = & \vec{0} \\ [\varepsilon(x)\vec{E}(t,x).\vec{n}(x)] & = & 0 \\ [\mu(x)\vec{H}(t,x).\vec{n}(x)] & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{pour} \ \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^d. \tag{10}$$

où [.] désigne le saut à travers la frontière

$$[\Phi] = \Phi^{int} - \Phi^{ext}$$

Φ^{int} et Φ^{ext} étant les traces intérieure et extérieure respectivement. Ces conditions sont une conséquence directe des équations (6) et (7).

Pour clore cette section, remarquons que dans (7), les équations en divergence sont une conséquence directe des équations en rotationnel, de la relation de conservation de la charge et des conditions (3), (4), (8).

3 Théorème de représentation intégrale

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la représentation intégrale d'un champ électromagnétique causal.

Soient Ω^{int} un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$, Ω^{ext} l'ouvert extérieur, $\Omega^{ext} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^{int}}$ et Γ leur frontière. $\vec{n}$ est la normale unitaire sur Γ, orientée vers l'extérieur de Ω^{int}.
Soit $\vec{E}$ et $\vec{H}$ deux champs de vecteurs dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\Omega^{int}}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\Omega^{ext}})$. On leur impose une condition de causalité :

$$\vec{E}(t,x) = \vec{H}(t,x) = \vec{0} \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^3$$

On suppose que $\vec{E}$ et $\vec{H}$ vérifient les équations de Maxwell homogènes dans l'intérieur et l'extérieur :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t,x) + r\vec{o}t \vec{E}(t,x) & = & \vec{0} \\[2ex] \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x) - r\vec{o}t \vec{H}(t,x) & = & \vec{0} \end{array} \right. \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times (\Omega^{int} \cup \Omega^{ext})$$

Alors $\vec{E}$ et $\vec{H}$ admettent la représentation intégrale suivante :

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{E}(t,x) & = & gr\vec{a}d_x \displaystyle\int_\Gamma \frac{\rho_E(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\ & & - r\vec{o}t \displaystyle\int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y \end{array} \right.$$

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{H}(t,x) & = & gr\vec{a}d_x \displaystyle\int_\Gamma \frac{\rho_M(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\ & & + r\vec{o}t \displaystyle\int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y \end{array} \right.$$

pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times (\Omega^{int} \cup \Omega^{ext})$, et

(14) $$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\Pi_x \vec{E}^{ext}(t,x) + \Pi_x \vec{E}^{int}(t,x)\right) = \\ \nabla_\Gamma \int_\Gamma \dfrac{\rho_E(t-r/c)}{4\pi r} d\Gamma_y - \mu_0 \Pi_x \dfrac{\partial}{\partial t} \int_\Gamma \dfrac{\vec{j}(y,t-r/c)}{4\pi r} d\Gamma_y \\ -\Pi_x \int_\Gamma \nabla_x \left(\dfrac{1}{r}\right) \wedge \left(\vec{m}(t-r/c,y) + \dfrac{r}{c}\dfrac{\partial \vec{m}}{\partial t}(t-r/c,y) \right) d\Gamma_y \end{cases}$$

(15) $$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\Pi_x \vec{H}^{ext}(t,x) + \Pi_x \vec{H}^{int}(t,x)\right) = \\ \nabla_\Gamma \int_\Gamma \dfrac{\rho_M(t-r/c)}{4\pi r} d\Gamma_y - \varepsilon_0 \Pi_x \dfrac{\partial}{\partial t} \int_\Gamma \dfrac{\vec{m}(y,t-r/c)}{4\pi r} d\Gamma_y \\ +\Pi_x \int_\Gamma \nabla_x \left(\dfrac{1}{r}\right) \wedge \left(\vec{j}(t-r/c,y) + \dfrac{r}{c}\dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t}(t-r/c,y) \right) d\Gamma_y \end{cases}$$

pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma$;
où

$$\vec{j}(t,x) = [\vec{H}(t,x) \wedge \vec{n}]$$
$$\vec{m}(t,x) = [\vec{n} \wedge \vec{E}(t,x)]$$

sont respectivement les courants électrique et magnétique. $\rho_E(t,x)$ et $\rho_M(t,x)$ sont respectivement les charges électrique et magnétique. Ils vérifient les relations de continuité suivantes :

(16) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_E}{\partial t}(t,x) + div\, \vec{j}(t,x) &= 0 \\ \dfrac{\partial \rho_M}{\partial t}(t,x) + div\, \vec{m}(t,x) &= 0 \end{cases} \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

L'opérateur Π_x est la trace tangentielle sur l'interface Γ

$$\Pi_x(.) = -\vec{n}(x) \wedge (\vec{n}(x) \wedge .)$$

$r = |x-y|$ et $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ est la célérité de la lumière. Enfin, $\Pi_x \vec{E}^{ext}$ représente la trace tangentielle de $\vec{E}$ sur Γ en venant de Ω^{ext} et $\Pi_x \vec{E}^{int}$ la trace tangentielle de $\vec{E}$ sur Γ en venant de Ω^{int}

Preuve :

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ vérifient (11). En manipulant ce dernier système et en prenant en considération les relations suivantes

$$-\Delta(.) = r\vec{o}tr\vec{o}t(.) - \vec{\nabla} div(.)$$
$$div(r\vec{o}t(.)) = 0$$

nous aboutissons à l'équation

(17) $$\begin{aligned} \Delta \vec{E}(t,x) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(t,x)}{\partial t^2} &= -r\vec{o}t(\vec{m}(t,x)\delta_\Gamma) - \mu_0 \frac{\partial \vec{j}(t,x)}{\partial t}\delta_\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} div(\int_{-\infty}^{t} \vec{j}(\tau,x) d\tau \delta_\Gamma) \end{aligned}$$

Nous remarquons que le champs $\vec{E}$ vérifie l'équation des ondes. Nous rappelons les solutions élémentaires

$$G^+(t,x) = \frac{\delta(t-|x|/c)}{4\pi|x|} \qquad ; \qquad G^-(t,x) = \frac{\delta(t+|x|/c)}{4\pi|x|}$$

où $G^+(t,x)$ est la solution causale. La convolution en temps et en espace de G^+ avec le second membre de (17) donne l'expression (12). De la même manière, on peut obtenir l'expression (13).
La théorie du potentiel (Van-Bladel [4], Müller [12]) nous permet d'écrire la propriété

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_{\Gamma^\pm}} \vec{n}(x)\wedge r\vec{o}t\displaystyle\int_\Gamma \frac{\vec{\Phi}(t-r/c,y)}{4\pi r}dy = \mp\frac{\vec{\Phi}(x)}{2} \\ +\vec{n}(x)\wedge \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\Gamma \nabla_x(\frac{1}{r})\wedge\left(\vec{\Phi}(t-r/c,y)+(r/c)\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial t}(t-r/c,y)\right)d\Gamma_y \end{cases}$$

où Γ^+ est la face extérieur de Γ, *i.e.* côté d'où sort la normale. On en déduit les expressions (14) et (15) à partir des traces tangentielles extérieures et intérieures des expressions (12) et (13).

4 Couplage et formulation variationnelle

Dans ce paragraphe, nous couplons les équations de Maxwell dans le milieu hétérogène avec les représentations intégrales dans le milieu extérieur. Les équations de Maxwell dans Ω^{ext} seront remplacées par des représentations en fonction des charges et des courants sur Γ grâce au théorème précédent. Ensuite, on traduit la continuité des composantes tangentielles des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ pour coupler ces représentations avec les équations de Maxwell dans Ω. On aboutit enfin à deux formulations variationnelles posées dans des espaces fonctionnelles couplant espace et temps.

4.1 Couplage

Le problème (P) formé des équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) et (9) est du premier ordre. Il est équivalent à

$$(P1)\begin{cases} \dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}(t,x)+\dfrac{1}{\mu(x)}r\vec{o}t\vec{E}(t,x) = \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times(\Omega\cup\Omega^{ext}) \\ \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t,x)-\dfrac{1}{\varepsilon(x)}r\vec{o}t\vec{H}(t,x) = -\dfrac{\vec{j}_s(t,x)}{\varepsilon(x)} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times(\Omega\cup\Omega^{ext}) \\ [\vec{E}(t,x)\wedge\vec{n}(x)] = \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma^d \\ [\vec{H}(t,x)\wedge\vec{n}(x)] = \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma^d \\ \vec{E}(t,x)\wedge\vec{n}(x) = \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma^c \\ \vec{H}(t,x).\vec{n}(x) = 0 & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma^c \\ +\textit{ les conditions } (1), (2), (3), (4) \text{ et } (8) \end{cases}$$

Dans le milieu extérieur, les champs diffractés $\vec{E}^d$ et $\vec{H}^d$ vérifient le système (11). On applique le théorème précédent avec le cas particulier $\vec{E}^{d,int} = -\vec{E}^{inc}$ à l'intérieur. Compte tenu de la relation (5), le problème (P1) est équivalent à (P2) :

$$
(P2)\left\{
\begin{array}{l}
\begin{array}{rcll}
\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t,x) + \dfrac{1}{\mu(x)} r\vec{o}t \vec{E}(t,x) & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\
\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x) - \dfrac{1}{\varepsilon(x)} r\vec{o}t \vec{H}(t,x) & = & -\dfrac{\vec{j}_s(t,x)}{\varepsilon(x)} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega
\end{array} \\
\\
\begin{array}{rcl}
\vec{E}(t,x) & = & \vec{E}^{inc}(t,x) + gr\vec{a}d_x \displaystyle\int_\Gamma \frac{\rho_E(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|} d\Gamma_y \\
& & -\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|} d\Gamma_y - r\vec{o}t \int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|} d\Gamma_y \\
\vec{H}(t,x) & = & \vec{H}^{inc}(t,x) + gr\vec{a}d_x \displaystyle\int_\Gamma \frac{\rho_M(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|} d\Gamma_y \\
& & -\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|} d\Gamma_y + r\vec{o}t \int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|} d\Gamma_y
\end{array} \\
\text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega^{ext} \\
\\
\begin{array}{rcll}
[\vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x)] & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^d \\
[\vec{H}(t,x) \wedge \vec{n}(x)] & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^d \\
\vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x) & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^c \\
\vec{H}(t,x).\vec{n}(x) & = & 0 & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^c
\end{array} \\
\\
\begin{array}{rcll}
\vec{j}(t,x) & = & -\vec{H}(t,x) \wedge \vec{n}(x) & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma \\
\vec{m}(t,x) & = & -\vec{n}(x) \wedge \vec{E}(t,x) & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma
\end{array} \\
+ \textit{ les conditions } (1), (3), (4), (8) \text{ et } (16)
\end{array}
\right.
$$

Par une simple manipulation des deux premières équations du problème (P2), nous éliminons le champs $\vec{H}$. Le champs $\vec{E}$ vérifie alors une équation d'ordre deux (équation des ondes) de la forme

$$
(18) \qquad \varepsilon(x) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(t,x) + r\vec{o}t \frac{1}{\mu(x)} r\vec{o}t \vec{E}(t,x) = -\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t}(t,x) \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega
$$

Le champs $\vec{H}$ se déduit alors en intégrant en temps la première équation de (P2). On obtient

$$
\vec{H}(t,x) - \vec{H}^{inc}(0,x) = -\frac{1}{\mu(x)} r\vec{o}t (\int_0^t \vec{E}(\tau,x) d\tau)
$$

De la même manière, on peut éliminer le champs $\vec{E}$. Le champs $\vec{H}$ vérifie l'équation d'onde suivante

$$(19) \qquad \mu(x)\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}(t,x) + r\vec{o}t\frac{1}{\varepsilon(x)}r\vec{o}t\vec{H}(t,x) = r\vec{o}t\frac{\vec{j}_s(t,x)}{\varepsilon(x)} \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$$

Le champs $\vec{E}$ se déduit alors en intégrant en temps la deuxième équation de (P2). On obtient

$$\vec{E}(t,x) - \vec{E}^{inc}(0,x) = \frac{1}{\varepsilon(x)}r\vec{o}t(\int_0^t \vec{H}(\tau,x)d\tau) - \frac{1}{\varepsilon(x)}\int_0^t \vec{j}_s(\tau,x)d\tau$$

4.2 Formulation variationnelle

Vincent Levillain, dans sa thèse [11], a étudié le problème de couplage dans le domaine fréquentiel. Il a introduit deux formulations variationnelles symétriques qu'il a noté (S) et (C). Numériquement, elles ont données des résultats meilleurs qu'une formulation non symétrique. Nous allons adopter la même démarche suivie dans sa thèse. Nous aboutissons à deux formulations variationnelles dans le domaine temporel. On les note de nouveau (S) et (C).

Le champs $\vec{E}(t,x)$ vérifie l'équation (18) dans le domaine Ω. Multiplions cette équation par une fonction test $\vec{E}^t(t,x)$ de trace tangentielle nulle sur le conducteur et nous intégrons en espace sur Ω puis en temps sur $\mathbb{R}$. En se servant de la formule de Green, nous couplons l'équation obtenue avec les traces tangentielles des représentations des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dans le milieu extérieur Ω^{ext}. Nous obtenons la formulation (S).
D'autre part, nous considérons les équations (18) et (19). Nous multiplions la première par $\vec{E}^t(t,x)$ et la deuxième par $\vec{H}^t(t,x)$ puis Nous intégrons en espace sur Ω puis en temps sur $\mathbb{R}$. En se servant de la formule de Green, Nous couplons les expressions obtenues avec les traces tangentielles des représentations des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dans le milieu extérieur Ω^{ext}. Nous obtenons la formulation (C).

D'après Isabelle Terrasse [13], nous introduisons les espaces fonctionnels

$$(20) \qquad \begin{cases} H = H^1_{w_I}(\mathbb{R}_+, H(rot,\Omega)) \\ V = H^{\frac{1}{2}}_{w_I}(\mathbb{R}_+, H^{-\frac{1}{2}}(div,\Gamma)) \end{cases}$$

où w_I est une constante arbitraire positive.
Pour plus de détails voir la thèse d'Isabelle Terrasse [13].

Dans ces espaces déjà définis, la formulation (S) sera

$$
(S)\left\{
\begin{array}{l}
\textit{pour tout } \vec{E}^{inc}(t,x)\Big|_{\Gamma},\ \ \vec{H}^{inc}(t,x)\Big|_{\Gamma} \in V',\ \ \vec{j}_s(t,x)\Big|_{\Gamma} \in H',\\
\textit{chercher}\ \ (\vec{E}(t,x),\vec{j}(t,x))\ \in H \times V\ \ \textit{telque}\\
\forall\ (\vec{E}^t(t,x),\vec{j}^t(t,x))\ \in H \times V\\
\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma} \vec{E}^i(t,x).\vec{j}^t(t,x)dx\ dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma} \vec{E}_{\Gamma}(t,x).\vec{j}^t(t,x)dx\ dt\\
\displaystyle +\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge(\vec{E}(t-|x-y|/c,y)\wedge\vec{n})\right).\vec{j}^t(t,x)d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt\\
\displaystyle +\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{|x-y|}{c}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)\wedge\vec{n})\right).\vec{j}^t(t,x)d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt\\
\displaystyle +\mu_0\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|}\vec{j}^t(t,x)d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt\\
\displaystyle +\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{div_{\Gamma}\int_0^{t-|x-y|/c}\vec{j}(\tau,y)d\tau}{4\pi|x-y|}div_{\Gamma}\vec{j}^t(t,x)d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt\\
\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma}\vec{H}^i(t,x).(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})dx\ dt - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega}\vec{j}_s(t,x).\vec{E}^t(t,x)dx\ dt =\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega}\varepsilon(x)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t,x).\vec{E}^t(t,x)dx\ dt + \int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega}\frac{1}{\mu(x)}r\vec{o}t(\int_{\mathbb{R}}\vec{E}(t,x)dt).r\vec{o}t\vec{E}^t(t,x)dx\ dt\\
\displaystyle -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma}(\vec{j}(t,x)\times\vec{n}).(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})dx\ dt\\
\displaystyle -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge\vec{j}(t-|x-y|/c,y)\right).(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt\\
\displaystyle -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{|x-y|}{c}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)\right).(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt\\
\displaystyle +\varepsilon_0\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma}(\frac{\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)\wedge\vec{n}}{4\pi|x-y|}.(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt\\
\displaystyle +\frac{1}{\mu_0}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{div_{\Gamma}\int_0^{t-|x-y|/c}(\vec{E}(\tau,y)\wedge\vec{n})d\tau}{4\pi|x-y|}div_{\Gamma}(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt
\end{array}
\right.
$$

Cette formulation est symétrique. Elle consiste à calculer les courants surfaciques $\vec{j}$ sur Γ et les champs électriques $\vec{E}$ dans Ω. D'où l'avantage numérique de cette formulation :

moins d'inconnus à calculer et moins de mémoire à réserver que la formulation (C) :

$$
(\mathrm{C}) \left\{
\begin{array}{l}
\textit{pour tout } \vec{E}^{inc}(t,x)\Big|_{\Gamma}, \quad \vec{H}^{inc}(t,x)\Big|_{\Gamma} \in V',, \quad \vec{j}_s(t,x)\Big|_{\Gamma} \in H', \\
\textit{chercher} \quad (\vec{E}(t,x), \vec{H}(t,x)) \ \in H \times H \quad \textit{telque} \\
\forall \ (\vec{E}^t(t,x), \vec{H}^t(t,x)) \ \in H \times H \\
\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma} \vec{E}^i(t,x).(\vec{n} \wedge \vec{H}^t(t,x))dx\ dt - \int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \frac{r\vec{o}t\vec{j}_s(t,x)}{2\varepsilon(x)}.\vec{E}^t(t,x)dx\ dt = \\
\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \mu(x)\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t,x).\vec{H}^t(t,x)dx\ dt + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon(x)} r\vec{o}t(\int_{\mathbb{R}} \vec{H}(t,x)dt).r\vec{o}t\vec{H}^t(t,x)dx\ dt \\
\displaystyle+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma} \left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|}) \wedge (\vec{E}(t-|x-y|/c,y) \wedge \vec{n})\right).(\vec{n} \wedge \vec{H}^t(t,x))d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt \\
\displaystyle+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|x-y|}{c}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|}) \wedge (\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y) \wedge \vec{n})\right).(\vec{n} \wedge \vec{H}^t(t,x))d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt \\
\displaystyle+\mu_0\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{\vec{n} \wedge \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|}(\vec{n} \wedge \vec{H}^t(t,x))d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt \\
\displaystyle+\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{div_{\Gamma}\displaystyle\int_0^{t-|x-y|/c}(\vec{n} \wedge \vec{H}(\tau,y))d\tau}{4\pi|x-y|} div_{\Gamma}(\vec{n} \wedge \vec{H}^t(t,x))d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt \\
\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma} \vec{H}^i(t,x).(\vec{E}^t(t,x) \wedge \vec{n})dx\ dt - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \vec{j}_s(t,x).\vec{E}^t(t,x)dx\ dt = \\
\displaystyle\tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \varepsilon(x)\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x).\vec{E}^t(t,x)dx\ dt + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega} \frac{1}{\mu(x)} r\vec{o}t(\int_{\mathbb{R}} \vec{E}(t,x)dt).r\vec{o}t\vec{E}^t(t,x)dx\ dt \\
\displaystyle-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma} \left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|}) \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}(t-|x-y|/c,y))\right).(\vec{E}^t(t,x) \wedge \vec{n})d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt \\
\displaystyle-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|x-y|}{c}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|}) \wedge (\vec{n} \wedge \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y))\right).(\vec{E}^t(t,x) \wedge \vec{n})d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt \\
\displaystyle+\varepsilon_0\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma}(\frac{\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y) \wedge \vec{n}}{4\pi|x-y|}.(\vec{E}^t(t,x) \wedge \vec{n})d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt \\
\displaystyle+\frac{1}{\mu_0}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{div_{\Gamma}\displaystyle\int_0^{t-|x-y|/c}(\vec{E}(\tau,y) \wedge \vec{n})d\tau}{4\pi|x-y|} div_{\Gamma}(\vec{E}^t(t,x) \wedge \vec{n})d\Gamma_x\, d\Gamma_y\, dt
\end{array}
\right.
$$

cette formulation (C) est symétrique. Elle consiste à calculer les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dans Ω.

L'étude mathématique de ces deux formulations sera publiée dans un prochain article.

Nous démontrerons l'existence et l'unicité ainsi que la continuité de la solution dans les espaces fonctionnelles déjà définis.

5 Discrétisation

Dans toute la suite $w_I = 0$. On discrétise le domaine Ω par des tétraèdres. On note τ_{eh} la tétraédrisation obtenue et τ_h l'ensemble des triangles (faces des tétraèdres) qui appartiennent à la surface Γ. On découpe la demi-droite temps positifs en des intervalles $[n\Delta t,(n+1)\Delta t]$ où Δt est déterminé à partir du cfl=$\frac{\Delta t}{\Delta x}$ où Δx est la longueur de la plus grande arête du maillage. Les cellules élémentaires parcourent :

- l'ensemble $K \times [n\Delta t,(n+1)\Delta t]_{K\in\tau_h}$ pour les courants surfaciques $\vec{m}$ et $\vec{j}$.
- l'ensemble $Q \times [n\Delta t,(n+1)\Delta t]_{Q\in\tau_{eh}}$ pour les champs volumiques $\vec{E}$.

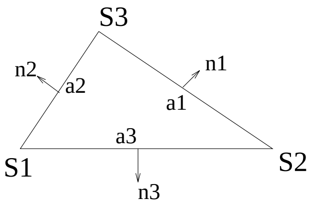
Dans ce qui suit, 1_T désignera la fonction caractéristique d'un élément T de la triangulation τ_h ou de la tétraèdrisation τ_{eh}. On note $|T|$ sa mesure. de même $1_{[t_n,t_{n+1}]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle de temps $[t_n,t_{n+1}]$.

5.1 Eléments finis surfaciques ($\vec{j}$)

On prend des courants surfaciques $\vec{j}$ dans H(div) de degré 1 (Raviart-Thomas) en espace, polynômes de degrés 1 en temps. Les courants peuvent s'écrire sous la forme : $\vec{j}(t,x) = \sum_{n\geq 0}\vec{j}(t_n,x) = \sum_{n\geq 0}\vec{j}^n(x)\beta^n(t)$
où $\vec{j}^n(x)$ est le courant au temps t_n et $\beta^n(t)$ la fonction de base temps

$$\beta^n(t) = \begin{cases} t-t_n & pour\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ 0 & pour\ t < t_{n-1} \\ \Delta t & pour\ t \geq t_{n+1} \end{cases}$$

Localement dans chaque triangle, on note n_i la normal sortante sur a_i.



On désigne par $\lambda^n_{i,T} = \int_{a_i}\vec{j}^n(x).\vec{n}_{i,T}dl_i$ (i=1,2,3) Le flux à travers l'arête a_i au temps $t_n = n\Delta t$. $\lambda^n_{i,T}$ est le le degrés de liberté associé a a_i. On note $\vec{W}_{i,T}(M) = \frac{\vec{S_iM}}{2|T|}1_T$ la fonction de base espace associée à a_i où S_i est le sommet opposé à cette arête; on aura $div_T\vec{W}_{i,T} = \frac{1_T}{|T|}$. Le courant $\vec{j}(t,x)$ peut alors s'écrire :

$$\vec{j}(t,x) = \sum_{n\geq 1}\vec{j}^n(x)\beta^n(t) = \sum_{n\geq 1}\beta^n(t)\sum_{T\in\tau_h}\sum_{i=1}^{3}\lambda^n_{i,T}\vec{W}_{i,T}(x)$$

les fonctions tests $\vec{j}^t(t,x)$ sont définies pour chaque pas de temps $t = t_n$

$$\vec{j}^t(t_n,x) = \vec{j}^t(x)\beta_0^n(t_n)$$

avec

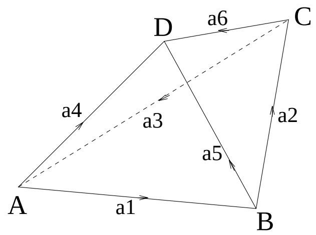
$$\beta_0^n(t_n) = \begin{cases} 1 & pour\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

5.2 Eléments finis volumiques ($\vec{E}$)

On prend des champs électriques E, H(rot) de degré 1 (Nédélec) en espace et des polynômes de degrés 1 en temps. Ces champs peuvent s'écrire sous la forme

$$E(t,x) = \sum_{n\geq 0} E(t_n,x) = \sum_{n\geq 0} E^n(x)\beta^n(t)$$

où $E^n(x)$ est le champs au temps t_n et β^n la fonction de base du temps déjà définie. Localement dans chaque tétraèdre Q, on note $\tau_{i,Q}$ le vecteur unitaire porté par l'arête a_i. On désigne par $C_{i,Q}^n = \int_{a_i} j^n(x).\tau_{i,Q}dl_i$ la circulation à travers cette arête dans le tétraèdre Q au pas de temps $t_n = n\Delta t$. $C_{i,Q}^n$ est le degrés de liberté associé à l'arête a_i.



On note

$$W_{AB,Q}(M) = \frac{\vec{MC} \times \vec{DC}}{(\vec{AC},\vec{DC},\vec{AB})}1_Q$$

la fonction de base espace associée à l'arête a_i. On aura

$$rotW_{i,Q} = \frac{3\vec{DC}}{(\vec{AC},\vec{DC},\vec{AB})}1_Q.$$

On peut alors écrire:

$$E(t,x) = \sum_{n\geq 1} E^n(x)\beta^n(t) = \sum_{n\geq 1} \beta^n(t) \sum_{Q\in\tau_{eh}} \sum_{i=1}^{6} C_{i,Q}^n W_{i,Q}(x)$$

Avec ce choix du champs $E(t,x)$, on peut déduire la forme des courants surfaciques $m(t,x)$. Pour chaque tétraèdre qui possède une face T (triangle) dans τ_h et Pour tout x $\in$ T, on a :

$$m(t,x) = E(t,x) \times n = \sum_{n\geq 1}(E^n(x) \times n)\beta^n(t) = \sum_{n\geq 1} \beta^n(t) \sum_{T\in Q\in\tau_{eh}} \sum_{i=1}^{6} C_{i,T}^n(W_{i,Q}(x) \times n)$$

$$m(t,x) = \sum_{n\geq 1} \beta^n(t) \sum_{T\in Q\in\tau_{eh}} \sum_{i=1}^{3} C_{i,T}^n \frac{\vec{S_i X}}{2|T|}$$

où S_i est le sommet opposé à l'arête a_i dans le triangle T. On remarque bien que, cette forme de $m(t,x)$ est identique à celle de $j(t,x)$. Donc on va la discrétiser de la même manière que le courant surfacique j(t,x). Le flux du courants m(t,x) à travers une arête correspond à la circulation du champs électriques $E(t,x)$ à travers la même arête.

6 Schéma numérique

Le système matriciel équivalent à la formulation variationnelle (S) discrète est de la forme

$$\sum_{k=0}^{N} A^k \lambda^{n-k} + \sum_{k=0}^{N} C^k \nu^{n-k} - D\nu^n = {b_1}^n$$

$$\sum_{k=0}^{N} A^k \nu^{n-k} + \sum_{k=0}^{N} C^k \lambda^{n-k} + E(S^n - 2S^{n-1} + S^{n-2}) + FS^n - D(\lambda^n - \lambda^{n-1}) = {b_2}^n$$

où

- N est le nombre des matrices A^i déterminé par la taille de l'objet étudié et le pas de temps Δt.
- λ^n le vecteur flux $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, ...)$ qui correspond au flux du courant surfacique j^n au temps t_n.
- ν^n le vecteur flux $(\nu^1, \nu^2, \nu^3, ...)$ qui correspond au flux du courant surfacique m^n au temps t_n.
- S^n le vecteur circulation $(S^1, S^2, S^3, ...)$ qui correspond aux circulations à travers les arêtes du champs électrique E^n au temps t_n.
- A^i sont des matrices de dimension (nds, nds) où nds : nombre de degrés de liberté surfaciques du maillage.
- C^i sont des matrices de dimension (nds, nds).
- E est de dimension (ndv, ndv) où ndv : nombre de degrés de liberté volumiques du maillage.
- F est de dimension (ndv, ndv).

On a remarqué que ce schéma est convergent et inconditionnellement stable. On résout le système par la méthode du gradient conjugué qui converge très vite (une dizaine d'itérations). Les matrices sont très creuses. D'où l'avantage du stockage morse.

7 Résultats numériques

Les champs incidents choisis sont des gaussiennes

$$\vec{E}^{inc}(t,x) = f(t - t_0 + \vec{u}.\vec{x})\ \vec{E}_0$$
$$\vec{H}^{inc}(t,x) = f(t - t_0 + \vec{u}.\vec{x})\ \vec{H}_0$$

où $f(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}$, t_0 est choisi de sorte que l'onde arrive à l'objet à $t = 0$. $\vec{u}$ est la direction de propagation.

On calcule la SER monostatique après FFT. Rappelons que

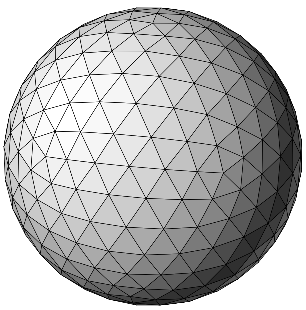
$$SERmono = 20log_{10}(\frac{|\hat{\vec{E}}^d|}{|\hat{\vec{E}}^i|})$$

$$\hat{\vec{E}}^d(k,x) = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\nabla\int_\Gamma G(x,y)div_\Gamma\hat{\vec{j}}(y)dyi\omega\mu_0\int_\Gamma G(x,y)\hat{\vec{j}}(y)dy + \int_\Gamma \nabla_x G(x,y)\times\hat{\vec{m}}(y)dy$$

où $G(x,y)$ est la solution élémentaire de l'équation de Helmholtz :

$$G(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\ ,$$

Les résultats numériques sont calculés pour une sphère de rayon 1 mètre maillée en 320 triangles, recouverte d'une couche diélectrique d'épaisseur 20cm ($\varepsilon = 2.$ et $\mu = 1.$)



La (fig.2) montre une comparaison entre la SER monostatique exacte et celle calculée pour un cfl = 0.5

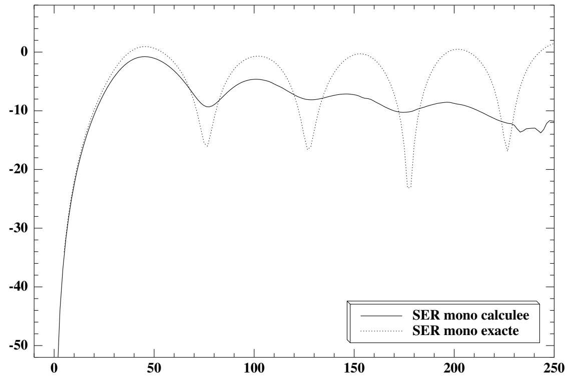


fig.2

La fréquence correspondant à la longueur d'onde $\lambda = 5\Delta x$ est $f_{5pts} = 130MHz$. On voit bien que ce résultat n'est pas précis. la méthode des potentiels retardés pour la diffraction des ondes électromagnétiques par un obstacle conducteur parfait est très précises. La (fig.3) montre une comparaison entre la SER monostatique exacte et celle calculée pour la même sphère considérée comme un conducteur parfait et pour cfl = 0.5.

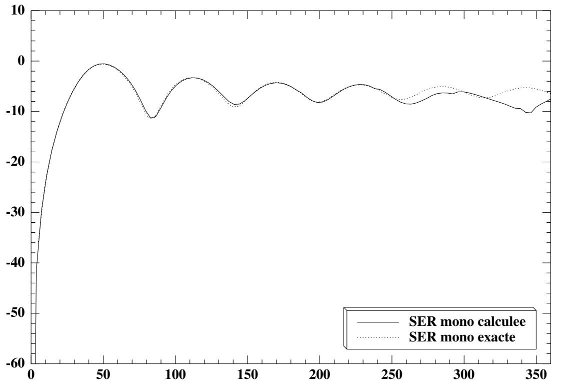


fig.3

Cela nous conduit à penser que le manque de précision provient du traitement numérique de la partie volumique. On modifie le schéma en s'inspirant de l'approximation de Newmark pour les équations des ondes.

NEWMARK :

On reprend l'équation (18) avec le cas particulier : $\vec{j}_s(t,x) = 0 \ \forall \, (t,x) \, \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\nVdash}$.
Pour simplifier, on considère que $\varepsilon(x)$ et $\mu(x)$ sont des constantes

$$(21) \qquad \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}(t,x) + r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{E}(t,x) = \vec{0} \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}\times(\Omega)$$

On pose

$$\vec{j}_1(t,x) = \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t,x)$$

Au temps $t = t_{n-1}$, on approche numériquement l'équation (21) par

$$r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{E}^{n-1}(x) + \varepsilon\mu\frac{\vec{E}^n(x) - 2\vec{E}^{n-1}(x) + \vec{E}^{n-2}(x)}{\Delta t^2} = \vec{0}$$

où

$$\vec{E}^n(x) = \vec{E}(t,x_n)$$

L'approximation de Newmark avec des coefficients α et β nous ramène à l'écriture suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} [\alpha r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{E}^n(x) + (\frac{1}{2}+\beta-\alpha)r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{E}^{n-1}(x) + (\frac{1}{2}-\beta)r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{E}^{n-2}(x)] \\ +\frac{\varepsilon\mu}{\Delta t^2}(\vec{E}^n(x) - 2\vec{E}^{n-1}(x) + \vec{E}^{n-2}(x)) = \vec{0} \end{array}\right.$$

On multiplie la dernière équation par une fonction test $\vec{E}^t(x)$ et on intègre sur Ω.
La formule de Green et la relation $\vec{j} = -\vec{H}\times\vec{n}$ nous permettent d'écrire

$$\int_\Omega r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{E}^n(x).\vec{E}^t(x) = \int_\Omega r\vec{o}t\vec{E}^n(x).r\vec{o}t\vec{E}^t(x) - \mu\int_{\partial\Omega}\vec{j}_1^n(x).\vec{E}^t(x)$$

Finalement, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta t\int_\Gamma \vec{j}_1^n(x)\vec{E}^t(x) = -\Delta t\frac{\frac{1}{2}+\beta-\alpha}{\alpha}\int_\Gamma \vec{j}_1^{n-1}(x)\vec{E}^t(x) - \Delta t\frac{\frac{1}{2}-\beta}{\alpha}\int_\Gamma \vec{j}_1^{n-2}(x)\vec{E}^t(x) \\ +\frac{\Delta t^2}{\alpha\mu}\int_\Omega(\alpha r\vec{o}t\vec{E}^n(x) + (\frac{1}{2}+\beta-\alpha)r\vec{o}t\vec{E}^{n-1}(x) + (\frac{1}{2}-\beta)r\vec{o}t\vec{E}^{n-2}(x))r\vec{o}t\vec{E}^t(x)dx \\ +\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_\Omega(\vec{E}^n(x) - 2\vec{E}^{n-1}(x) + \vec{E}^{n-2}(x))\vec{E}^t(x)dx \end{array}\right.$$

Les résultats numériques sont calculés pour 3 sphères de rayon 1 mètre maillées respectivement en 320, 500, 720 triangles. Ils montrent une comparaison entre la SER monostatique exacte et celle calculée pour un cfl = 0.5 (cfl est le rapport du pas de temps sur le pas du maillage), pour une couche diélectrique d'épaisseur 20cm de caractéristiques $\varepsilon = 2.$ et $\mu = 1.$ et pour $\alpha = .25$; $\beta = .25$.

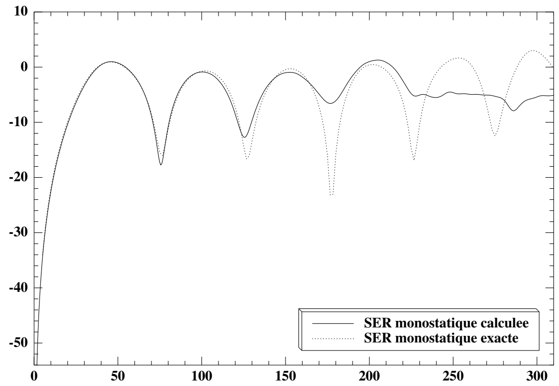


Figure 2: SER monostatique. Maillage de sphère de 320 triangles. $f_{5pts} = 130MHz$.

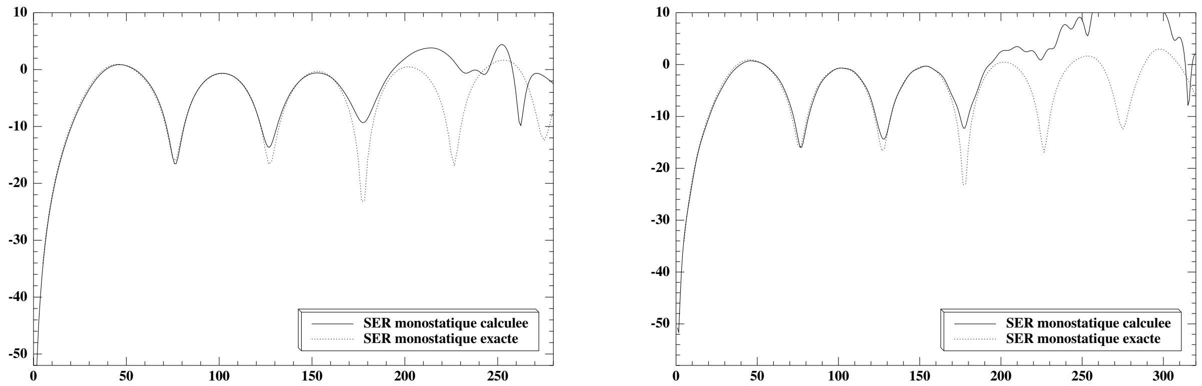


Figure 3: SER monostatique. Maillages de sphère de 500, 720 triangles. f_{5pts} vaut respectivement $163MHz$ et $196MHz$.

Remerciements : *Les auteurs tiennent à remercier le Professeur Jean-Claude Nédélec du CMAP et leurs collègues d'IMACS Joseph El Gharib et Bin Zhou pour leur aide précieuse pour la réalisation de ce travail.*

References

[1] A. Bendali, *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques,Thèse d'Etat*, Paris-VI, 1984.

[2] A. Bamberger and T. Ha-Duong, *Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé d'une onde acoustique,* Math. Meth. Appl. Sci., 8, 1986

[3] E. Becache, *Résolution par une méthode d'équations intégrales d'un broblème de diffraction d'onde élastiques transitoires par une fissure,Thèse de Doctorat*, Paris-VI, 1991.

[4] Van Bladel, *Electromagnetic fields,Mc Graw Hill*, 1964.

[5] A. Bachelot and A. Pujols, *Résolution intégrales espace-temps pour le système de Maxwell*, C.R. Acad. sci. Paris t.314, Série I, (1992), 639,644.

[6] Y. Ding, *Méthode numériques sur l'équation intégrale aux bords pour le problème des ondes acoustiques diffractées par une surface rigide en 3D,Thèse de Doctorat*, Paris-II, 1985.

[7] M. costable and E.P. Stephan, *Coupling of finite and boundary element methods for an elastoplastic interface problem,SIAM J. Numer.Anal.*, 27, 1990, 1212-1226.

[8] V. Lange, *Équations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif*, *Thèse de Doctorat*, Université de Bordeau, 1995.

[9] C. Johnson and J.C. Nedelec, *On the coupling of boundary integral and finite element methods*, *Math. of Comp.*, (152) 35, 1980, 1063-1079.

[10] A. Lubet, *Couplage Potentiels retardés-Eléments finis pour la résolution d'un problème de diffraction d'ondes par un obstacle inhomogène,Thèse de Doctorat*, Paris-VI, 1991.

[11] V. Levillain, *Couplage élements finis équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*, *Thèse de Doctorat*, Ecole polytechnique, 1991.

[12] C. Muller, *Foundations of the mathematical theory of electromagetic waves,Mc Graw Hill*, 1953.

[13] I. Terrasse, *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retadés*, *Thèse de Doctorat*, Ecole polytechnique, 1993.