Conditions aux limites approchées pour les couches minces périodiques en électromagnétisme

H. Ammari et C. Latiri-Grouz

Centre de Mathématiques Appliquées, CNRS URA 756,
École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.
(ammari@cmapx.polytechnique.fr et latiri@cmapx.polytechnique.fr)

Résumé. Nous écrivons et nous justifions des conditions aux limites approchées pour des couches minces périodiques recouvrant un objet parfaitement conducteur en polarisation transverse électrique et transverse magnétique.

Abstract. Approximate boundary conditions for the scattering problem by a penetrable obstacle coated with a thin periodic layer are derived.

Mots clés. Conditions aux limites approchées, équation de Helmholtz, couches minces périodiques, homogénéisation.

Key words. Approximate boundary conditions, Helmholtz equation, thin periodic coatings, homogenization.

AMS subject classifications. 78A45, 35B27, 35C20.

1 Introduction

Les conditions aux limites approchées permettent de représenter un objet recouvert d'une couche mince de matériau diélectrique ou magnétique. La méthode consiste à remplacer la couche mince par une condition aux limites approchée qui donne une bonne approximation du champ diffracté par l'objet à l'extérieur de la couche. La procédure permet d'accélérer ou de rendre possible les calculs numériques du champ à l'extérieur de la couche mince. Cette idée a été introduite en électromagnétisme dans les années quarante par Shukin-Léontovitch pour traiter de la diffraction par des objets diélectriques à fort indice et à pertes. Elle a été ensuite appliquée pour approcher le problème de diffraction par des couches minces par de très nombreux auteurs parmi les quels nous citons Harrington-Mautz [16], Karp-Karal [17], King-Wait [18], Senior-Volakis [19] et plus récemment, Engquist-Nédélec [15], Bendali-Vernhet [12], Bendali-Lemrabet [13] et l'un des auteurs de cet article [1]-[11]. Dans cet article nous écrivons des conditions aux limites approchées pour les couches minces périodiques à l'aide d'un développement asymptotique à deux échelles et nous démontrons des estimations d'erreur. A notre connaissance ces conditions aux limites approchées sont nouvelles. Notre approche est très différente de celle adoptée dans [1] pour l'écriture de conditions aux limites approchant l'effet d'un réseau d'inclusions parfaitement conductrices dans une couche mince de coefficients constants sur la diffraction d'une onde électromagnétique.

Le plan de cet article est le suivant. Dans la première partie, nous écrivons des conditions aux limites approchées pour une couche mince dont la perméabilité magnétique est variable. La méthode consiste à se ramener par un changement d'échelles (scaling) à un problème posé dans un domaine fixe. Ces conditions aux limites approchées généralisent celles écrites et rigoureusement justifiées dans [13] et [15] pour une couche mince de coefficients constants. La deuxième partie est consacrée aux couches minces périodiques en régime fréquentiel. Nous commençons par écrire formellement une classe de conditions aux limites approchées. Nous donnons ensuite des estimations d'erreur optimales. Ce qui nous permet de justifier l'écriture formelle de ces conditions approchées. L'idée est d'homogénéiser la couche après changement d'échelles. Ceci nous conduit à l'homogénéisation d'un problème de perturbation singulière obtenu après scaling. Les difficultés rencontrées dans notre analyse sont en nombre de trois. La première est que le problème de diffraction par la couche mince périodique est posé dans un domaine non borné. La deuxième est la question de stabilité de la solution par rapport à l'épaisseur de la couche. Les oscillations rapides de la perméabilité magnétique (ou de la permittivité électrique) de la couche mince dans la direction tangentielle nous pose la troisième difficulté.

2 Couches minces

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^2$ et (s,n) une paramétrisation locale de son bord $\partial\Omega$ supposé de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\Omega_i^\delta = \partial\Omega\times]-\delta,0[$ et Ω_e le complémentaire de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbf{R}^2$. Nous considérons le problème de transmission

$$\begin{cases} \Delta\, u_i^\delta + k^2\, q(s,\dfrac{n}{\delta})\, u_i^\delta = 0 \quad \text{dans } \Omega_i^\delta, \\ \Delta\, u_e^\delta + k^2\; u_e^\delta = 0 \quad \text{dans } \Omega_e, \\ \partial_n\, u_i^\delta = 0 \quad \text{sur } \Big\{n = -\delta\Big\}, \\ u_i^\delta|_{n\to 0^-} = u_e^\delta|_{n\to 0^+}, \partial_n u_i^\delta|_{n\to 0^-} = \partial_n u_e^\delta|_{n\to 0^+}, \\ u_e^\delta - u^{in} \text{satisfait la condition de radiation sortante,} \end{cases} \tag{1}$$

où u^{in} est une onde incidente plane, k est une constante strictement positive et $q(s,n/\delta)$ est une fonction de la variable s et n/δ. Ce problème correspond à la diffraction d'une onde électromagnétique par la couche mince Ω_i^δ en polarisation TE (transverse électrique). Notre objectif est de construire un développement asymptotique de u_e^δ lorsque δ tend vers zéro. On effectue un Ansatz dans la couche mince Ω_i^δ du type:

$$u_i^\delta(s,n) = u_i^0(s,y) + \delta u_i^1(s,y) + \delta^2 u_i^2(s,y) + \dots, \tag{2}$$

où la variable supplémentaire $y = \dfrac{n}{\delta}$. A l'extérieur de la couche Ω_i^δ, on pose (dans un voisinage de $\partial\Omega$ si Ω n'est pas convexe):

$$u_e^\delta(s,n) = u_e^0(s,n) + \delta u_e^1(s,n) + \delta^2 u_e^2(s,n) + \dots. \tag{3}$$

Appliqué à u_i^j l'opérateur Laplacien devient

$$\frac{1}{\delta^2}\partial^2_{y^2} + \frac{1}{\delta}c(s,\delta y)\partial_y + \frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s(\frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s),$$

où $c(s,n)$ est la courbure au point (s,n) et $c(s) = c(s,0)$. Ceci permet après identification des coefficients des puissances de δ d'obtenir :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_y^2 u_i^0 = 0, \\ \partial_y^2 u_i^1 + c(s)\partial_y u_i^0 = 0, \\ \partial_y^2 u_i^2 + c(s)\partial_y u_i^1 + \partial_s^2 u_i^0 + \partial_n c(s,0)\, y\, \partial_y u_i^0 + k^2\, q(s,y) u_i^0 = 0, \\ \vdots \end{array}\right. \tag{4}$$

Pour construire des conditions aux limites approchées, notre méthode consiste à chercher des relations approchées entre d'une part $\partial_n u_e^\delta|_{n\to 0^+}$ et d'autre part $u_e^\delta|_{n\to 0^+}$ et ses dérivées par rapport à la variable tangentielle s. On a d'après les conditions de transmission dans (1)

$$\left\{\begin{array}{l} u_e^\delta|_{n\to 0^+} = u_i^0(s,y)|_{y=0} + \delta u_i^1(s,y)|_{y=0} + \delta^2 u_i^2(s,y)|_{y=0} + \dots \\ \partial_n u_e^\delta|_{n\to 0^+} = \dfrac{1}{\delta}\partial_y u_i^0(s,y)|_{y=0} + \partial_y u_i^1(s,y)|_{y=0} + \dots \end{array}\right. \tag{5}$$

Les équations (4) avec les conditions aux limites $\partial_y\, u_i^j(s,y)|_{y=-1} = 0$ conduisent à

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_i^0(s,y) & = & u_i^0(s,y)|_{y=0}, \\ u_i^1(s,y) & = & u_i^1(s,y)|_{y=0}, \\ u_i^2(s,y) & = & -\dfrac{1}{2}y(y+2)\partial_s^2 u_i^0|_{y=0} - k^2\left(\displaystyle\int_{-1}^{y}\int_{-1}^{y'} q(s,y'')\,dy''\,dy'\right) u_i^0|_{y=0} \\ & & +u_i^2|_{y=0} + k^2\left(\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{y'} q(s,y'')\,dy''\,dy'\right) u_i^0|_{y=0}. \end{array}\right. \tag{6}$$

Si on définit $u_i^{\delta,j}$ (resp. $u_e^{\delta,j}$) comme le développement asymptotique tronqué à l'ordre j de celui de u_i^δ (resp. u_e^δ) donné par (2) (resp. (3)):

$$u_i^{\delta,j}(s,n) = u_i^0(s,y)|_{y=n/\delta} + \delta u_i^1(s,y)|_{y=n/\delta} + \dots + \delta^j u_i^j(s,y)|_{y=n/\delta},$$
$$u_e^{\delta,j}(s,n) = u_e^0(s,n) + \delta u_e^1(s,n) + \dots + \delta^j u_e^j(s,n),$$

les identités (6) donnent

$$\partial_n u_i^{\delta,1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{7}$$

et

$$\partial_n\, u_i^{\delta,2} + \delta\, k^2 \tilde{q}(s)\, u_i^{\delta,2} + \delta\, \partial_s^2\, u_i^{\delta,2} \;=\; 0(\delta^2) \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{8}$$

où le coefficient de perméabilité magnétique effectif est donné par

$$\tilde{q}(s) = \int_{-1}^{0} q(s,y)\; dy. \tag{9}$$

La relation précédente conduit à

$$\partial_n\, u_e^{\delta,2} + \delta\, k^2 \tilde{q}(s)\, u_e^{\delta,2} + \delta\, \partial_s^2\, u_e^{\delta,2} \;=\; 0(\delta^2) \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Maintenant, pour obtenir des conditions aux limites approchées pour Ω_i^δ, nous remplaçons le problème de transmission (1) par l'équation de Helmholtz suivante à l'extérieur de la couche

$$\begin{cases} \Delta\, \tilde{u}_e^{\delta,j} + k^2\, \tilde{u}_e^{\delta,j} = 0 \quad \text{ dans } \Omega_e, \\ \tilde{u}_e^{\delta,j} - u^{in} \text{satisfait la condition de radiation sortante,} \end{cases} \tag{10}$$

avec les conditions aux limites:

• Condition aux limites approchée d'ordre 0:

$$\partial_n\, \tilde{u}_e^{\delta,0} = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega.$$

• Condition aux limites approchée d'ordre 1:

$$\partial_n\, \tilde{u}_e^{\delta,1} + \delta\, k^2 \tilde{q}(s)\, \tilde{u}_e^{\delta,1} + \delta\, \partial_s^2\, \tilde{u}_e^{\delta,1} \;=\; 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega.$$

Notons que la fonction $\tilde{u}_e^{\delta,j}$ n'est pas exactement $u_e^{\delta,j}$. Lorsque la fonction q est constante dans Ω_i^δ, l'identité (9) donne $\tilde{q}(s) = q$. Nous retrouvons alors les conditions aux limites approchées d'ordre un écrites dans [13] et [15]. Notons enfin que le traitement d'une condition aux limites de type Dirichlet sur $\Big\{n \;=\; -\delta\Big\}$ qui correspond à une polarisation transverse magnétique de l'onde incidente est légèrement différent. Un calcul analogue permet de montrer que la perméabilité magnétique effective qui intervient dans la condition aux limites approchée d'ordre deux qui s'écrit sur $\partial\Omega$:

$$(1+\frac{\delta}{2}c(s))\, \tilde{u}_e^{\delta,2} + \delta\, \partial_n \tilde{u}_e^{\delta,2} + \frac{\delta^2}{3}\Big\{-\partial_{s^2}^2 \tilde{u}_e^{\delta,2} - \Big(\frac{1}{4}\, c^2(s) - \partial_n c(s,0) - k^2\, \tilde{q}(s)\Big)\, \tilde{u}_e^{\delta,2}\Big\} = 0,$$

est non plus la moyenne de la fonction $q(s,y)$ par rapport à la variable y mais elle est donnée par l'expression suivante (voir [6]):

$$\tilde{q}(s) = -3 \int_{-1}^{0} \Big(\int_{-1}^{y} q(s,y')(y'+1)\; dy' \Big)\; dy + 3 \int_{-1}^{0} q(s,y)(y+1)\; dy. \tag{11}$$

3 Couches minces périodiques

Dans cette section, nous allons écrire formellement des conditions aux limites approchées pour une couche mince de perméabilité magnétique périodique en la variable tangentielle s de période de l'ordre de l'épaisseur de la couche. Nous gardons les mêmes notations que dans la section précédente à savoir: Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^2$, (s,n) une paramétrisation locale de son bord $\partial\Omega$ supposé de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\Omega_i^\delta = \partial\Omega\times]-\delta, 0[$ et Ω_e le complémentaire de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbf{R}^2$. Nous considérons le problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\, u_i^\delta + k^2\, q(s, \dfrac{s}{\delta}, \dfrac{n}{\delta})\, u_i^\delta = 0 \quad \text{ dans } \Omega_i^\delta, \\ \Delta\, u_e^\delta + k^2\, u_e^\delta = 0 \quad \text{ dans } \Omega_e, \\ \partial_n\, u_i^\delta = 0 \quad \text{ sur } \Big\{n = -\delta\Big\}, \\ u_i^\delta|_{n\to 0^-} = u_e^\delta|_{n\to 0^+}, \partial_n u_i^\delta|_{n\to 0^-} = \partial_n u_e^\delta|_{n\to 0^+}, \\ u_e^\delta - u^{in} \text{satisfait la condition de radiation sortante,} \end{array}\right. \tag{12}$$

où le coefficient de perméabilité magnétique q est périodique en la variable s/δ de période un et égale à 1 à l'extérieur de la couche Ω_i^δ. Nous allons écrire des conditions aux limites approchées pour la couche mince périodique Ω_i^δ. Nous effectuons l'Ansatz

$$u_i^\delta(s,n) = u_i^0(s,x,y) + \delta u_i^1(s,x,y) + \delta^2 u_i^2(s,x,y) + \dots$$

où $x = s/\delta$, $y = n/\delta$ et u_i^j est périodique en la variable supplémentaire $x = s/\delta$ de période 1 pour tout entier naturel j et nous posons

$$u_e^\delta(s,n) = u_e^0(s,n) + \delta u_e^1(s,n) + \delta^2 u_e^2(s,n) + \dots,$$

à l'extérieur de la couche mince périodique Ω_i^δ. Nous introduisons

$$v_i^\delta(s,n) = u_i^\delta(s,n) - u_e^\delta(s,n)|_{n=0},$$

et nous effectuons de même l'Ansatz

$$v_i^\delta(s,n) = v_i^0(s,x,y) + \delta v_i^1(s,x,y) + \delta^2 v_i^2(s,x,y) + \dots,$$

où $y = n/\delta$. Appliquée à v_i^j l'opérateur ∂_s devient $\partial_s + \dfrac{1}{\delta}\partial_x$ et l'opérateur ∂_n devient $\dfrac{1}{\delta}\partial_y$. En utilisant l'Ansatz:

$$u_e^\delta(s,n)|_{n=0} = u_e^0(s,n)|_{n=0} + \delta\, u_e^1(s,n)|_{n=0} + \dots$$

et l'expression du Laplacien en coordonnées locales (s,n)

$$\Delta = \frac{1}{1+c(s)n}\,\partial_s\Big(\frac{1}{1+c(s)n}\partial_s\Big) + \partial_n^2 + c(s,n)\,\partial_n,$$

qui devient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\delta^2}\Big[\frac{1}{(1+\delta\,c(s)y)^2}\,\partial_x^2 + \partial_y^2\Big] + \frac{1}{\delta}\Big[\frac{1}{(1+\delta\,c(s)y)^2}\partial_x\partial_s \\ &\quad + \frac{1}{1+\delta\,c(s)y}\partial_s\,(\frac{1}{1+\delta\,c(s)y}\partial_x) + c(s,\delta y)\,\partial_y\Big] \\ &+ \frac{1}{1+\delta\,c(s)y}\partial_s\,(\frac{1}{1+\delta\,c(s)y}\partial_s),\end{aligned}$$

nous obtenons après identification des termes en δ^{-2} l'équation

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)v_i^0 = 0. \tag{13}$$

Ce qui donne en utilisant la périodicité de v_i^0 en x et les conditions aux limites en $y=0$ et $y=-1$ que v_i^0 est nulle. Le terme v_i^1 vérifie de même l'équation:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)v_i^1 = 0. \tag{14}$$

L'identification des termes en δ^0 donne compte tenu du fait que $v_i^0 = v_i^1 = 0$ l'équation

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)v_i^2 = -\partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} - k^2\,q(s,x,y)u_e^0(s,n)|_{n=0}, \tag{15}$$

posée dans le carré $]0,1[\times]-1,0[$. Soient $\tilde{u}_i^j(s,y)$ la moyenne par rapport à la variable supplémentaire x de la fonction $u_i^j(s,x,y)$:

$$\tilde{u}_i^j(s,y) = \int_0^1 u_i^j(s,x,y)\,dx,$$

$\tilde{u}_i^{\delta,j}$ défini par

$$\tilde{u}_i^{\delta,j}(s,y) = \tilde{u}_i^0(s,y) + \delta\tilde{u}_i^1(s,y) + \ldots + \delta^j\,\tilde{u}_i^j(s,y),$$

et

$$u_e^{\delta,j}(s,n) = u_e^0(s,n) + \delta u_e^1(s,n) + \ldots + \delta^j u_e^j(s,n).$$

Dans le cas des couches minces périodiques, pour obtenir les conditions aux limites approchées nous écrivons $\partial_y\tilde{u}_i^{\delta,j}(s,y)|_{y=0}$ en fonction de $\tilde{u}_i^{\delta,j}(s,y)|_{y=0}$

et de ses dérivées par rapport à la variable tangentielle s.
En prenant la moyenne par rapport à x dans les équations (13) et (14) et en utilisant les conditions aux limites $v_i^j = 0$ sur $y = 0$ et $\partial_y v_i^j = 0$ sur $y = -1$, on obtient

$$\partial_y \tilde{u}_i^0(s,y)|_{y=0} = 0,$$
$$\partial_y \tilde{u}_i^1(s,y)|_{y=0} = 0.$$

Ceci donne (en gardant les mêmes notations que dans la section précédente)
• Condition aux limites approchée d'ordre 0:

$$\partial_n \tilde{u}_e^{\delta,0} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{16}$$

La condition aux limites approchée d'ordre zéro pour les couches minces périodiques n'est donc pas affectée par les variations rapides de la perméabilité magnétique suivant la direction tangentielle s. Pour trouver la condition aux limites approchées d'ordre un nous prenons la moyenne dans l'équation (15) par rapport à la variable supplémentaire x. Ceci donne:

$$\partial_y^2 \tilde{v}_i^2(s,y) = -\partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} - k^2 \Big(\int_{-1}^0 q(s,x,y)\ dx \Big) u_e^0(s,n)|_{n=0}.$$

Maintenant, compte tenu des identités

$$\tilde{u}_i^0(s,y)|_{y=0} = u_e^0(s,n)|_{n=0},$$
$$\tilde{u}_i^1(s,y)|_{y=0} = u_e^1(s,n)|_{n=0},$$

on obtient
• Condition aux limites approchée d'ordre 1:

$$\partial_n \tilde{u}_e^{\delta,1} + \delta\, k^2 \tilde{q}(s)\, \tilde{u}_e^{\delta,1} + \delta\, \partial_s^2 \tilde{u}_e^{\delta,1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{17}$$

où le coefficient de perméabilité magnétique effectif est donné par l'expression suivante:

$$\tilde{q}(s) = \int_{-1}^0 \int_0^1 q(s,x,y)\ dx\ dy.$$

Il est facile de voir que l'identité précédente donne (9) si le coefficient de perméabilité magnétique $q = q(s, s/\delta, n/\delta)$ est indépendant de s/δ. Dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet sur $\big\{n = -\delta\big\}$, on peut obtenir de la même manière que le coefficient de permittivité électrique effectif est donné par

$$\tilde{q} = 3\, \Big[- \int_{-1}^0 \Big(\int_{-1}^y \int_0^1 q(s,x,y')\ dx\ (y'+1)\ dy' \Big)\ dy + \int_{-1}^0 \int_0^1 q(s,x,y)\ dx\ (y+1)\ dy \Big] \tag{18}$$

au lieu de (11).
Comme dans la première section, nous approchons dans Ω_e la solution du problème de transmission (12) par la solution de l'équation de Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta\, \tilde{u}_e^{\delta,j} + k^2\, \tilde{u}_e^{\delta,j} = 0 \quad \text{dans } \Omega_e, \\ (16) \text{ ou } (17) \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \tilde{u}_e^{\delta,j} - u^{in} \text{satisfait la condition de radiation sortante.} \end{cases} \tag{19}$$

Pour l'étude de l'existence et l'unicité d'une solution à ces équations nous renvoyons à [13]. Nous allons dans la section suivante estimer la différence entre l'unique solution $\tilde{u}_e^{\delta,j}$ de (19) et u_e^δ dans une norme appropriée.

Nous généralisons maintenant l'approche formelle développée dans cette section de type conditions aux limites approchées au régime temporel. L'équation des ondes s'écrit:

$$\begin{cases} \Delta\, u_i^\delta - q(s, \dfrac{s}{\delta}, \dfrac{n}{\delta})\, \partial^2_{t^2}\, u_i^\delta = 0 \quad \text{dans } \Omega_i^\delta \times]0, +\infty[, \\ \Delta\, u_e^\delta - \partial^2_{t^2}\, u_e^\delta = 0 \quad \text{dans } \Omega_e \times]0, +\infty[, \\ \partial_n\, u_i^\delta = 0 \quad \text{sur } \Big\{ n = -\delta \Big\} \times]0, +\infty[, \\ u_i^\delta|_{n\to 0^-} = u_e^\delta|_{n\to 0^+}, \partial_n u_i^\delta|_{n\to 0^-} = \partial_n u_e^\delta|_{n\to 0^+} \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[, \end{cases} \tag{20}$$

(plus des conditions initiales). On peut facilement vérifier en utilisant l'Ansatz

$$u_i^\delta(s, n; t) = u_i^0(s, x, y; t) + \delta u_i^1(s, x, y; t) + \delta^2 u_i^2(s, x, y; t) + \ldots$$

où $x = s/\delta$, $y = n/\delta$ et u^j est périodique en $x = s/\delta$ de période un pour tout entier naturel j que les conditions aux limites approchées pour l'équation des ondes (20) sont les transformées de Fourier en la fréquence k (la variable duale) des conditions aux limites approchées pour le problème fréquentiel. En particulier, les conditions aux limites approchées (16) et (17) en polarisation TE (transverse électrique) deviennent

- Condition aux limites approchée d'ordre 0:

$$\partial_n\, \tilde{u}_e^{\delta,0} = 0.$$

- Condition aux limites approchée d'ordre 1:

$$\partial_n\, \tilde{u}_e^{\delta,1} + \delta \partial_s^2\, \tilde{u}_e^{\delta,1} + \delta\, \tilde{q}(s)\, \partial_t^2\, \tilde{u}_e^{\delta,1} = 0.$$

Lorsque la condition aux limites sur $\Big\{n = -\delta\Big\}\times]0, +\infty[$ est de type Dirichlet (i.e. en polarization transverse magnétique), ces conditions aux limites approchées sur $\partial\Omega$ deviennent:

• Condition aux limites approchée d'ordre 0:

$$\tilde{u}_e^{\delta,0} = 0.$$

• Condition aux limites approchée d'ordre 1:

$$(1 + \frac{\delta}{2}c(s))\,\tilde{u}_e^{\delta,1} + \delta\,\partial_n\,\tilde{u}_e^{\delta,1} = 0.$$

• Condition aux limites approchée d'ordre 2:

$$(1+\frac{\delta}{2}c(s))\,\tilde{u}_e^{\delta,2}+\delta\,\partial_n\,\tilde{u}_e^{\delta,2}+\frac{\delta^2}{3}\Big\{-\partial^2_{s^2}\tilde{u}_e^{\delta,2}-\Big(\frac{1}{4}\,c^2(s)-\partial_n c(s,0)+\tilde{q}(s)\partial^2_t\,\Big)\,\tilde{u}_e^{\delta,2}\Big\} = 0,$$

où $\tilde{q}(s)$ est donné par (11).

4 Résultats de convergence pour les couches minces périodiques

Notre principal objectif dans cette section est d'estimer les quantités $u^\delta - \tilde{u}_e^{\delta,0}$ et $u^\delta - \tilde{u}_e^{\delta,1}$ dans une norme appropriée. Nous allons tout d'abord écrire à l'aide d'un changement d'échelles une formulation variationnelle du problème de transmission (12) dans un domaine fixe (indépendant de δ). Soit R un réel positif assez grand. Soit (r, θ) un système de coordonnées polaires associé à une origine $O \in \Omega_i$ où $r = |x|$ la variable radiale et θ est la variable angulaire. Nous introduisons les domaines

$$\Omega_e^R = \Omega_e \cap \Big\{|x| < R\Big\}, \quad \Omega_\delta^R = \Omega_e^R \cup \Omega_i^\delta \cup \partial\Omega$$

et le cercle $S_R = \Big\{r = R\Big\}$ de rayon R et de centre O. Nous utiliserons les notations usuelles pour les espaces de Sobolev. Dans toute la suite, nous noterons

$$u^\delta = \begin{cases} u_i^\delta & \text{dans } \Omega_i^\delta, \\ u_e^\delta & \text{dans } \Omega_e. \end{cases}$$

4.1 Formulation variationnelle

Pour toute fonction test $u^t \in H^1(\Omega_\delta^R)$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^\delta . \nabla u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^\delta u_e^t - (T_R(u_e^\delta), u_e^t) \\ + \int_{\Omega_i^\delta} \nabla u_i^\delta . \nabla u_i^t - k^2 \int_{\Omega_i^\delta} q^\delta u_i^\delta u_i^t = (f^{in}, u^t),\end{aligned} \tag{21}$$

où $q^\delta = q(s, s/\delta, n/\delta)$, $u^t = u_e^t$ dans Ω_e, $u^t = u_i^t$ dans Ω_i^δ, l'opérateur pseudo-différentiel

$$T_R : H^{1/2}(S_R) \mapsto H^{-1/2}(S_R)$$

est l'opérateur de Dirichlet-Neumann extérieur associé à l'opérateur de Helmholtz $\Delta + k^2$ (plus la condition de radiation sortante) dans le domaine extérieur $\Big\{|x| > R\Big\}$,

$$f^{in} = T_R(u^{in}) - \partial_r u^{in},$$

et $(,)$ est le crochet de dualité $H^{1/2}(S_R), H^{-1/2}(S_R)$. Pour toute fonction u_i définie dans la couche mince Ω_i^δ, nous noterons $\hat{u}_i(y) = u_i(\delta y)$, pour tout $y \in]-1, 0[$. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_i^\delta} \nabla u_i^\delta . \nabla u_i^t \quad &= \quad \delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s))^{-1}\, \partial_s \hat{u}_i^\delta\, \partial_s \hat{u}_i^t\, dy\, ds \\ &\quad + \delta^{-1} \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s))\, \partial_y \hat{u}_i^\delta\, \partial_y \hat{u}_i^t\, dy\, ds,\end{aligned} \tag{22}$$

et

$$\int_{\Omega_i^\delta} q\, u_i^\delta\, u_i^t = \delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s))\, q(s, \frac{s}{\delta}, y)\, \hat{u}_i^\delta\, \hat{u}_i^t\, dy\, ds \tag{23}$$

L'équation variationnelle (21) s'écrit alors

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^\delta . \nabla u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^\delta u_e^t - (T_R(u_e^\delta), u_e^t) \\ &+\delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s))^{-1}\, \partial_s \hat{u}_i^\delta\, \partial_s \hat{u}_i^t\, dy\, ds \\ &+\delta^{-1} \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s))\, \partial_y \hat{u}_i^\delta\, \partial_y \hat{u}_i^t \\ &-\delta\, k^2 \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s))\, q(s, \frac{s}{\delta}, y)\, \hat{u}_i^\delta\, \hat{u}_i^t = (f^{in}, u_e^t).\end{aligned} \tag{24}$$

Il facile de voir que (24) admet une unique solution $(u_e^\delta, \hat{u}_i^\delta) \in H^1(\Omega_e^R) \times H^1(]-1, 0[\times \partial\Omega)$ telle que $u_e^\delta|_{n=0} = \hat{u}_i^\delta|_{y=0}$ et $\partial_n u_e^\delta|_{n=0} = \delta\, \partial_y \hat{u}_i^\delta|_{y=0}$.

4.2 Résultats de convergence et estimation d'erreur

Soit maintenant u_e^0 défini comme l'unique solution dans $H^1(\Omega_e^R)$ de l'équation variationnelle: $\forall u_e^t \in H^1(\Omega_e^R)$,

$$\int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^0 \,.\, \nabla u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^0 \, u_e^t - (T_R(u_e^0), u_e^t) = (f^{in}, u_e^t), \tag{25}$$

et la fonction $\hat{u}_i^0$ donnée par

$$\hat{u}_i^0(s,y) = u_e^0(s,n)|_{n=0}, \quad y \in]-1,0[. \tag{26}$$

Avant de montrer la convergence de $(u_e^\delta, \hat{u}_i^\delta)$ vers $(u_e^0, \hat{u}_i^0)$ lorsque δ tend vers zéro, notons que les résultats de régularité classiques de solutions de problèmes aux limites elliptiques permettent d'avoir $u_e^0(s,n)|_{n=0} \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$ si $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cette régularité supplémentaire (au moins une régularité $H^2(\partial\Omega)$) joue un rôle très important dans les estimations d'erreur que nous allons établir. L'hypothèse d'un bord $\partial\Omega$ régulier (au moins de classe $\mathcal{C}^3$) est donc essentielle pour mener à terme notre analyse asymptotique. Dans toute la suite, nous supposons que la fonction $q(s,x,y)$ est bornée en les variables x, s et y. Nous avons le

Théorème 4.1 *Il existe deux constantes strictement positives δ_0 et C tel que pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$, nous avons l'estimation d'erreur suivante:*

$$||u_e^\delta - u_e^0||_{H^1(\Omega_e^R)} + ||\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0||_{H^1(-1,0;L^2(\partial\Omega))} \le C\, \delta^{1/2}. \tag{27}$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que ce problème de convergence est un problème de perturbation singulière à cause du terme

$$\delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} (1 + \delta y c(s))^{-1} \, \partial_s \, \hat{u}_i^\delta \, \partial_s \, \hat{u}_i^t \; dy \; ds.$$

C'est pour cette raison que dans ce théorème nous n'avons pas une estimation de la norme de $\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0$ dans $H^1(]-1,0[\times\partial\Omega)$ mais seulement dans un espace plus grand. La preuve de ce théorème est faite en deux étapes. Nous commençons par montrer la convergence de $(u_e^\delta, \hat{u}_i^\delta)$ lorsque δ tend vers zéro. Nous établirons ensuite l'estimation d'erreur (27) à l'aide d'un résultat de stabilité démontré par Bendali et Lemrabet (Théorème 5.5 de [13]). En prenant $u_e^t = \overline{u_e^\delta}$ et $\hat{u}_i^t = \overline{u_i^\delta}$ dans l'équation variationnelle (24), nous obtenons

$$\int_{\Omega_e^R} |\nabla u_e^\delta|^2 - k^2 \int_{\Omega_e^R} |u_e^\delta|^2 - (T_R(u_e^\delta), \overline{u_e^\delta}) + \delta^{-1} \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} (1+\delta y c(s))\, |\partial_y \hat{u}_i^\delta|^2$$

$$+\delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} (1+\delta y c(s))^{-1}\, |\partial_s \hat{u}_i^\delta|^2 \, dy \, ds$$

$$-\delta\, k^2 \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} (1+\delta y c(s))\, q(s, \frac{s}{\delta}, y)\, |\hat{u}_i^\delta|^2 = (f^{in}, \overline{u_e^\delta}).$$

Comme le bord $\partial\Omega$ est supposé régulier, la quantité $1 + \delta\, y\, c(s)$ est strictement positive pour tout $y \in [-1, 0]$ lorsque δ est suffisament petit. En utilisant la structure de la formulation (24) qui est coercive à des termes compacts près nous pouvons démontrer par l'absurde que d'une part on a l'estimation:

$$\int_{\Omega_e^R} |\nabla u_e^\delta|^2 + \delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} |\partial_s \hat{u}_i^\delta|^2 + \delta^{-1} \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} |\partial_y \hat{u}_i^\delta|^2 \;\leq\; C\, ||u_e^\delta||_{H^1(\Omega_R^e)},$$

où la constante C est indépendante de δ et d'autre part que la quantité

$$||u_e^\delta||_{H^1(\Omega_R^e)} + ||\hat{u}_i^\delta||_{L^2(\partial\Omega\times]-1,0[)}$$

reste bornée lorsque δ tend vers zéro. Ceci nous permet de prouver que u_e^δ converge dans $H^1(\Omega_R^e)$ faible, $\sqrt{\delta}\, \partial_s \hat{u}_i^\delta$ converge dans $L^2(\partial\Omega\times]-1,0[)$ faible et $\partial_y \hat{u}_i^\delta$ converge vers zéro dans $L^2(\partial\Omega\times]-1,0[)$ fort. Pour démontrer la convergence de u_e^δ vers u_e^0 dans $H^1(\Omega_R^e)$ faible, il suffit de prendre une fonction test $u^t = (u_e^t, \hat{u}_i^t)$ telle que u_e^t soit dans $H^1(\Omega_R^e)$ et $\hat{u}_i^t(s,y) = u_e^t(s,n)|_{n=0}$ et d'utiliser d'une part que la fonction $\sqrt{\delta}\, \partial_s \hat{u}_i^\delta$ reste bornée dans $L^2(\partial\Omega\times]-1,0[)$ et d'autre part que le problème variationnel (25) admet une unique solution dans $H^1(\Omega_R^e)$. La convergence faible de $\hat{u}_i^\delta$ vers $\hat{u}_i^0$ s'obtient en utilisant que $\hat{u}_i^\delta$ reste bornée dans $L^2(\partial\Omega\times]-1,0[)$ et que $\partial_y \hat{u}_i^\delta$ converge vers zéro dans $L^2(\partial\Omega\times]-1,0[)$ fort. Nous démontrons maintenant l'estimation (27) à l'aide de l'argument de stabilité de Bendali-Lemrabet. Nous rappelons le théorème 5.5 de [13]. Ce théorème nous dit que la norme dans l'espace $H^1(\Omega_R^e) \times H^1(-1, 0; L^2(\partial\Omega))$ de la solution $u^\delta = (u_e^\delta, \hat{u}_i^\delta)$ de la formulation variationnelle (24) avec un second membre de l'ordre de

$$C(\delta) \Big\{ \delta^{1/2} \big(\int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} |\partial_s \hat{u}_i^t|^2 \big)^{1/2} + \delta^{-1/2} \big(\int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} |\partial_y \hat{u}_i^t|^2 \big)^{1/2} + ||u_e^t||_{H^1(\Omega_R^e)} \Big\}$$

est de l'ordre de $C(\delta)$ où $C(\delta)$ est une constante qui dépend de δ. Comme la fonction $q(s, s/\delta, y)$ est uniformément bornée en δ, ce théorème s'applique directement pour nous donner l'estimation (27). Comme dans [13], le terme

$$\delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} \partial_s \, \hat{u}_i^\delta \, \partial_s \, \hat{u}_i^0$$

est celui dont le traitement nécessite une régularité supplémentaire de la fonction $\hat{u}_i^0$ définie par (26) et donc celle de u_e^0 solution du problème variationnel (25).

Nous allons maintenant établir une estimation de la norme de $u^\delta - \tilde{u}_e^{\delta,1}$ dans $H^1(-1,0;L^2(\partial\Omega))$. Nous introduisons

$$\hat{u}_i^1(s,y) = u_e^1(s,n)|_{n=0}, \quad y \in]-1,0[,$$

et $u_e^1 \in H^1(\Omega_e^R)$, l'unique solution de l'équation variationnelle suivante:

$$\int_{\Omega_e^R} \nabla \, u_e^1 \, . \, \nabla \, u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^1 \, u_e^t - (T_R(u_e^1), u_e^t) = \Big[\int_{\partial\Omega} \partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} \, u_e^t$$
$$+k^2 \int_{\partial\Omega} \Big(\int_{-1}^{0} \int_{0}^{1} q(s,x,y) \; dx \; dy \; \Big) \, u_e^0(s,n)|_{n=0} \, u_e^t \Big], \forall u_e^t \in H^1(\Omega_e^R).$$

Remarquons que pour définir le terme correcteur u_e^1 comme solution de l'équation variationnelle précédente dans $H^1(\Omega_e^R)$, nous utilisons encore une fois la régularité H^2 (supplémentaire) de la fonction u_e^0 solution du problème variationnel (25). Nous remarquons également que $\tilde{u}_e^{\delta,1} = u_e^0 + \delta \, u_e^1$ est la solution de l'équation de Helmholtz (10) avec la condition aux limites approchée d'ordre un donnée par (17).
Nous avons le

Théorème 4.2 *La paire*

$$\Big(\frac{u_e^\delta - (u_e^0 + \delta \, u_e^1)}{\delta}, \frac{\hat{u}_i^\delta - (\hat{u}_i^0 + \delta \, \hat{u}_i^1)}{\delta} \Big) \tag{28}$$

converge fortement vers $(0,0)$ *dans* $H^1(\Omega_e^R) \times H^1(-1,0;L^2(\partial\Omega))$.

Preuve. Soit

$$\hat{u}_i^t(s,y) = \hat{u}_i^t(s,y)|_{y=0},$$

une fonction test indépendante de y et $u_e^t \in H^1(\Omega_e^R)$ telle que $u_e^t|_{n=0} = \hat{u}_i^t$. Nous avons

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{\Omega_e^R} \nabla\,(u_e^\delta - u_e^0 - \delta u_e^1)\,.\,\nabla\, u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} (u_e^\delta - u_e^0 - \delta u_e^1)\, u_e^t - (T_R(u_e^\delta - u_e^0 - \delta u_e^1), u_e^t) \\
\quad \displaystyle +\delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1+\delta y c(s))^{-1}\, \partial_s\,(\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0 - \delta \hat{u}_i^1)\, \partial_s\, \hat{u}_i^t\; dy\; ds \\
\quad \displaystyle -\delta\, k^2 \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1+\delta y c(s))\, q(s, \frac{s}{\delta}, y)\, (\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0 - \delta \hat{u}_i^1)\, \hat{u}_i^t\; dy\; ds \\
\displaystyle = \delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1+\delta y c(s))^{-1}\, \partial_s\, \hat{u}_i^0\, \partial_s\, \hat{u}_i^t\; dy\; ds - \delta \int_{\partial\Omega} \partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0}\, u_e^t \\
\displaystyle -\delta\, k^2 \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1+\delta y c(s))\, q(s, \frac{s}{\delta}, y)\, \hat{u}_i^0\, \hat{u}_i^t\; dy\; ds \\
\qquad \displaystyle +\delta k^2 \int_{\partial\Omega} \Big(\int_{-1}^0 \int_0^1 q(s,x,y)\; dx\; dy\; \Big)\, u_e^0(s,n)|_{n=0}\, u_e^t \\
\displaystyle +\delta^2 \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1+\delta y c(s))^{-1}\, \partial_s\, \hat{u}_i^1\, \partial_s\, \hat{u}_i^t\; dy\; ds
\end{array}
\right.
$$

Le seul terme nouveau par rapport à la formulation de Bendali-Lemrabet pour les couches minces homogènes [13] est celui qui fait intervenir la quantité

$$Q^\delta = \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 q(s, \frac{s}{\delta}, y)\, \hat{u}_i^\delta\, \hat{u}_i^t\; dy\; ds,$$

tous les autres termes se traitent d'une manière analogue. La convergence faible de $q(s, s/\delta, y)$ vers $\displaystyle\int_0^1 q(s,x,y)\; dx$ dans L^2 et le théorème précédent, nous permettent de démontrer que la quantité

$$
\begin{array}{rcl}
R^\delta & = & \displaystyle Q^\delta - \int_{\partial\Omega} \Big[\int_{-1}^0 \int_0^1 q(s,x,y)\; dx\; dy \Big] u_e^0(s,n)|_{n=0}\, \hat{u}_i^t\; ds \\
& = & \displaystyle \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 \Big[q(s, \frac{s}{\delta}, y) - \int_0^1 q(s,x,y)\; dx\; dy \Big] u_e^0(s,n)|_{n=0}\, \hat{u}_i^t\; ds \qquad (29) \\
& & \displaystyle + \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 q(s, \frac{s}{\delta}, y)\, \Big[\hat{u}_i^\delta - u_e^0(s,n)|_{n=0} \Big]\, \hat{u}_i^t\; dy\; ds
\end{array}
$$

converge vers zéro. Grâce à ce résultat de convergence, l'argument de stabilité de Bendali-Lemrabet et le Théorème 4.1 nous conduisent à la convergence de la paire (28) vers zéro. Nous terminons cette démonstration par remarquer que lorsque la fonction q est indépendante de la variable x la situation est un peu différente. Comme la quantité

$$q(s, \frac{s}{\delta}, y) - \int_0^1 q(s,x,y)\, dx = 0,$$

on obtient que le taux de convergence vers zéro dans ce cas de la quantité (28) est de l'ordre de $\delta^{1/2}$ et donc, il existe deux constantes strictement positives δ_0 et C tel que pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$, nous avons l'estimation d'erreur suivante:

$$||u_e^\delta - (u_e^0 + \delta\, u_e^1)||_{H^1(\Omega_e^R)} + ||\hat{u}_i^\delta - (\hat{u}_i^0 + \delta\, \hat{u}_i^1)||_{H^1(-1,0;L^2(\partial\Omega))} \;\leq\; C\, \delta^{3/2}.$$

Cette estimation d'ordre deux a été déjà obtenue par une méthode très différente pour les conditions aux limites approchant une couche mince de coefficients constants contenant un réseau de petites inclusions conductrices réparties périodiquement le long de $\partial\Omega$ (voir [1]). Remarquons enfin que les conditions aux limites approchées (11) avec une permittivité électrique donnée par (18) dans le cas d'une condition aux limites de type Dirichlet sur $\Big\{n = -\delta\Big\}$ dans le problème de transmission (12) se justifient de la même manière.

Références

[1] T. Abboud et H. Ammari, Diffraction at a curved grating: TM and TE cases, Homogenization, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202, 995-1026, 1996.

[2] T. Abboud et H. Ammari, Diffraction at a curved grating: Approximation by an infinite plane grating, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202, 1076-1100, 1996.

[3] T. Abboud et H. Ammari, Diffraction par un réseau courbe bipériodique: Homogénéisation, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 320, Série I, 301-306, 1995.

[4] T. Abboud, H. Ammari et G. Lebeau, Analyse asymptotique de la diffraction par un réseau courbe, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 320, Série I, 1085-1090, 1995.

[5] H. Ammari, Scattering of waves by thin periodic layers at high frequencies using the on-surface radiation condition method, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1997, à paraître.

[6] H. Ammari et S. He, Generalized effective impedance boundary conditions for an inhomogeneous thin layer in electromagnetic scattering, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications,* 11, 1197-1212, 1997.

[7] H. Ammari et S. He, Homogenization and scattering for gratings, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 11, 1669-1683, 1997.

[8] H. Ammari et S. He, Effective impedance boundary conditions for an inhomogeneous thin layer on a curved metallic surface, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1997, à paraître.

[9] H. Ammari et J.-C. Nédélec, Sur les conditions d'impédance généralisées pour les couches minces, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 322, Série I, 995-1000, 1996.

[10] H. Ammari et J.-C. Nédélec, Time-harmonic electromagnetic fields in thin chiral layers, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29 (2), 1998.

[11] H. Ammari et J.-C. Nédélec, Generalized impedance boundary conditions for the Maxwell equations as singular perturbation problems, soumis.

[12] A. Bendali et L. Vernhet, Résolution par éléments finis de frontière d'un problème de diffraction d'onde comportant une condition aux limites d'impédance généralisées, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 321, Série I, 791-797, 1995.

[13] A. Bendali et K. Lemrabet, The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation, *SIAM Journal on Applied Mathematics,* 56, 1664-1693, 1996.

[14] A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North Holland (1978).

[15] B. Engquist et J.-C. Nédélec, Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering thin layers, *Rapport Interne du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique,* 278, 1993.

[16] R. F. Harrington et J. R. Mautz, An impedance sheet approximation for thin dielectric shells, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 531-534, 1975.

[17] S. N. Karp et F. C. Karal, Generalized impedance boundary conditions for surface wave structures, Electromagnetic Wave Theory, Part I, ed. J. Brown, 479-483, Pergamon Press, New York (1965).

[18] R. J. King et J. R. Wait, Electromagnetic groundwave propagation theory and experminent, in Symposia Mathematica, Vol.17, 107-208, Academic Press, New-York (1976).

[19] T. B. A. Senior et J. L. Volakis, Approximate boundary conditions in electromagnetics, IEE Electromagnetic Waves Series 41, IEE Publication, London (1995).