Propagation d'ondes électromagnétiques à basses fréquences

Habib Ammari et Jean-Claude Nédélec

Centre de Mathématiques Appliquées, CNRS URA 756,
Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France
(ammari@cmapx.polytechnique.fr et nedelec@cmapx.polytechnique.fr).

Résumé. Nous construisons les asymptotiques par rapport à la fréquence des champs électriques et magnétiques solutions des équations de Maxwell à coefficients variables à n'importe quel ordre et nous caractérisons complètement leur dépendance par rapport à la topologie de l'objet.

Mots clés. basses fréquences, équations de Maxwell.

AMS subject classifications. 35C20, 35B40, 35Q60.

1 FORMULATION DU PROBLÈME

L'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques à basses fréquences a été largement traitée par de très nombreux auteurs parmi les quels nous citons Werner [10], Kress [4], Kleinmann [5], Picard [7] et [8], Ramm, Weaver, Weck et Witsch [9]. Malheureusement, à notre connaissance, le calcul d'une asymptotique complète et la caractérisation de sa dépendance par rapport aux propriétés topologiques du domaine ainsi qu'une estimation d'erreur sont restées des questions ouvertes. L'une des principales difficultés réside dans la condition de radiation qui dépend de la fréquence. Une deuxième difficulté est que la structure des équations de Maxwell n'est pas coercive lorsque le milieu est non dissipatif.
L'objet de cet article est de construire l'asymptotique complète à basses fréquences des champs électriques et magnétiques solutions des équations de Maxwell à coefficients variables et de démontrer leur dépendance par rapport à la topologie du bord parfaitement conducteur. Le cas d'un milieu homogène a été étudié à l'aide de la méthode des équations intégrales dans [2] et le cas d'un objet diélectrique sans inclusion parfaitement conductrice a été considéré dans [1].
Soit Ω^i un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^3$ et Ω^e le complémentaire de $\overline{\Omega^i}$ dans $\mathbf{R}^3$. Considérons la propagation d'ondes électromagnétiques dans le milieu diélectrique Ω^i isotrope caractérisé par sa permittivité électrique ε et sa perméabilité magnétique μ. Les fonctions ε et μ sont complexes et vérifient $\Re e\, \varepsilon > 0$ et $\Re e\, \mu > 0$. Nous supposons de plus que ces coefficients sont de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux et discontinues le long de surfaces régulières et nous notons ε_0, μ_0 la permittivité et la perméabilité du domaine extérieur Ω^e. L'objet diélectrique Ω^i contient un noyau parfaitement conducteur Ω^c, de bord Γ. Soit Ω le complémentaire de $\overline{\Omega^c}$ dans $\mathbf{R}^3$. Nous supposons que le noyau parfaitement conducteur est *connexe* et nous notons N *le premier nombre de Betti* de son bord Γ. Il existe alors N coupures de classe $\mathcal{C}^2$, disjointes, non-tangentes à Γ: $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ tel que $\Omega \setminus \tilde{\Sigma}$ est simplement connexe et Lipschitzien où $\tilde{\Sigma} = \bigcup_{i=1}^N \Sigma_i$. Notons $\mathbf{n}$ la normale sortante à Γ, $\mathbf{u}_\Gamma$ la composante tangentielle du champ de vecteur $\mathbf{u}$ sur Γ et $\Omega^d = \Omega^i \setminus \overline{\Omega^c}$. Nous introduisons une boule de rayon R assez grand pour contenir la surface Γ et la zone Ω^d où les coefficients ε et μ varient. Nous notons S_R la sphère correspondante, B_R la boule intérieure à S_R, $\hat{\mathbf{x}}$ la normale sortante à S_R et $\Omega_R = \Omega \cap B_R$. Nous introduisons les opérateurs différentiels du premier ordre suivants: div_{S_R} (la divergence surfacique), $\mathbf{rot}_{S_R}$ (le rotationnel vectoriel surfacique), rot_{S_R} (le rotationnel scalaire sur-

facique) et $\mathbf{grad}_{S_R}$ (le gradient surfacique) et la forme $((\,,\,))$ définie par $((\mathbf{u},\mathbf{v})) = \displaystyle\int_{\Omega_R} \mathbf{rot}\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \int_{\Omega_R} \mu\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}$. Nous notons enfin les espaces:
$L^2(\Omega_R), H^s(\Omega_R)$ et $H^s(S_R)$ les espaces de Sobolev usuels.
$H(\mathrm{rot},\Omega_R) = \Big\{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega_R))^3, \mathbf{rot}\,\mathbf{u} \in (L^2(\Omega_R))^3\Big\}$,
$TH^s(S_R) = \Big\{\mathbf{u} \in (H^s(S_R))^3, \mathbf{u}\,.\,\mathbf{n} = 0\Big\}$,
$TH^s(\mathrm{div}, S_R) = \Big\{\mathbf{u} \in TH^s(S_R), \mathrm{div}_{S_R}\,\mathbf{u} \in H^s(S_R)\Big\}$,
$TH^s(\mathrm{rot}, S_R) = \Big\{\mathbf{u} \in TH^s(S_R), \mathrm{rot}_{S_R}\,\mathbf{u} \in H^s(S_R)\Big\}$,
$\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R) = \Big\{\mathbf{u} \in H(\mathrm{rot},\Omega_R), \displaystyle\int_{\Omega_R} \mu\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{grad}\,q = 0, \forall\, q \in H^1(\Omega_R)\Big\}$.

2 DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Nous allons étudier le comportement asymptotique des solutions $\mathbf{E}^\omega$ et $\mathbf{H}^\omega$ des équations de Maxwell:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}^\omega \;=\; i\omega\,\mu\,\mathbf{H}^\omega, \quad \mathbf{rot}\ \mathbf{H}^\omega \;=\; -i\omega\,\varepsilon\,\mathbf{E}^\omega \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}^\omega_\Gamma \;=\; 0 \quad \text{sur } \Gamma, \tag{2}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} \Big(\sqrt{\mu_0}\,(\mathbf{H}^\omega - \mathbf{H}^{in}_\omega) \wedge \hat{\mathbf{x}} - \sqrt{\varepsilon_0}\,(\mathbf{E}^\omega - \mathbf{E}^{in}_\omega)\Big) \;=\; 0, \tag{3}$$

où $(\mathbf{E}^{in}_\omega, \mathbf{H}^{in}_\omega)$ est une onde incidente plane.
Soit l'opérateur électromagnétique extérieur $\mathcal{G}^e_\omega$ défini par (voir [1] et l'annexe pour son expression explicite)

$$\mathcal{G}^e_\omega(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{H}|_{S_R}) = \hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{E}|_{S_R}$$

où $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont solutions sortantes des équations de Maxwell à l'extérieur de la boule B_R. D'après [1], nous avons le

Théorème 2.1 *L'opérateur électromagnétique extérieur*

$$\mathcal{G}^e_\omega : TH^{-1/2}(\mathrm{div}, S_R) \mapsto TH^{-1/2}(\mathrm{div}, S_R)$$

admet le développement asymptotique suivant par rapport à la fréquence ω:

$$\mathcal{G}^e_\omega = \frac{1}{\omega}\,\mathcal{G}^e_{-1} + \mathcal{G}^e_0 + \omega\,\mathcal{G}^e_1 + \ldots, \tag{4}$$

où les opérateurs $\mathcal{G}_j^e, j \geq -1$ sont continus de $TH^{-1/2}(\mathrm{div}, S_R)$ dans lui même. De plus, nous avons d'une part

$$\mathrm{div}_{S_R} \mathcal{G}_{-1}^e \,\mathbf{rot}_{S_R} = \mathrm{div}_{S_R} \mathcal{G}_0^e \,\mathbf{rot}_{S_R} = 0.$$

et d'autre part, l'opérateur surfacique $i\,\mathrm{div}_{S_R} \mathcal{G}_1^e \,\mathbf{rot}_{S_R}$ est l'opérateur de Dirichlet-Neumann sur la sphère S_R associée à l'équation de Laplace scalaire dans $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{B_R}$.

Nous renvoyons à l'annexe pour une expression explicite de l'opérateur électromagnétique extérieur $\mathcal{G}_\omega^e$ ainsi qu'à la démonstration de ces résultats.

Nous rappelons aussi le

Lemme 2.1 La décomposition de Hodge *suivante de l'espace $H(\mathrm{rot}, \Omega_R)$:*

$$H(\mathrm{rot}, \Omega_R) = \mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R) \,\oplus\, \mathbf{grad}\, H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}\,,$$

est orthogonale au sens du produit $((,))$.

Démonstration. Nous renvoyons à Kirsch et Monk [3] pour une démonstration de cette décomposition de Hodge.

En utilisant maintenant *la décomposition de Hodge* précédente de l'espace $H(\mathrm{rot}, \Omega_R)$, nous démontrons le

Théorème 2.2 *La formulation variationnelle mixte, dont les inconnues sont $\mathbf{u}^\omega \in \mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R)$ et $p^\omega \in H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}$, suivante:*

$$\left\{\begin{array}{l} a^\omega(\mathbf{u}^\omega, \mathbf{u}^t) = \omega\, (\mathbf{g}^\omega, \mathbf{u}^t_{S_R}), \quad \forall\, \mathbf{u}^t \in \mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R), \\ \hat{a}^\omega(p^\omega, p^t) = \dfrac{1}{\omega}\, (\mathbf{g}^\omega, \mathbf{grad}_{S_R} p^t), \quad \forall\, p^t \in H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}\,, \end{array}\right. \tag{5}$$

où $(,)$ est le crochet de dualité $TH^{-1/2}(\mathrm{div}, S_R), TH^{-1/2}(\mathrm{rot}, S_R)$ et

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^\omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}^t) & = & \displaystyle\int_{\Omega_R} \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\,.\mathbf{rot}\,\mathbf{u}^t - \omega^2 \int_{\Omega_R} \mu\, \mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}^t \\ & & +i\omega\Big(\mathcal{G}_\omega^e(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{u}), (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{u}^t) \,\wedge\, \hat{\mathbf{x}}\Big), \\ \hat{a}^\omega(p, p^t) & = & -\displaystyle\int_{\Omega_R} \mu\, \mathbf{grad}\, p\,.\,\mathbf{grad}\, p^t \\ & & +\dfrac{i}{\omega}\Big(\mathcal{G}_\omega^e(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{grad}\, p), (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{grad}\, p^t) \,\wedge\, \hat{\mathbf{x}}\Big), \\ \mathbf{g}^\omega & = & i\,\Big(\mathcal{G}_\omega^e(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{H}_\omega^{in}) - \hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{E}_\omega^{in}\Big), \end{array}\right.$$

est telle que $\mathbf{H}^\omega = \mathbf{u}^\omega + \mathbf{grad}\, p^\omega$ *et* $\mathbf{E}^\omega = \dfrac{i}{\omega\varepsilon}\mathbf{rot}\,\mathbf{H}^\omega$ *sont solutions dans* $H(\mathrm{rot}, \Omega_R) \times H(\mathrm{rot}, \Omega_R)$ *des équations de Maxwell* $(1) - (3)$. *De plus, le système des équations variationnelles* (5) *admet une unique solution dans* $\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R) \times H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}$. *La réciproque est aussi vraie.*

Démonstration. Soit $(\mathbf{E}^\omega, \mathbf{H}^\omega)$ une solution localement dans $H(\mathrm{rot})$ des équations de Maxwell $(1)-(3)$. Le Lemme précédent nous permet de décomposer le champ $\mathbf{H}^\omega$ en $\mathbf{u}^\omega + \mathbf{grad}\, p^\omega$ où $\mathbf{u}^\omega \in \mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R)$ et $p^\omega \in H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}$. En utilisant les propriétés suivantes de l'opérateur électromagnétique extérieur, démontrées par Kirsch et Monk dans [3] et Nédélec dans [6],

$$\Big(\mathcal{G}^e_\omega(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{grad}\, p), (\hat{\mathbf{x}} \wedge u^t) \ \wedge\ \hat{\mathbf{x}}\Big) = \Big(\mathcal{G}^e_\omega(\hat{\mathbf{x}} \wedge u), (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{grad}\, p^t) \ \wedge\ \hat{\mathbf{x}}\Big) = 0,$$

nous obtenons en intégrant par parties que le couple $(\mathbf{u}^\omega, p^\omega)$ vérifie la formulation variationnelle (5). Réciproquement, soit $(\mathbf{u}^\omega, p^\omega)$ une solution dans $\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R) \times H^1(\Omega_R)/\mathbf{R}$ de (5). En sommant les deux équations dans (5) et en utilisant encore une fois la décomposition de Hodge de l'espace $H(\mathrm{rot}, \Omega_R)$ et les propriétés de $\mathcal{G}^e_\omega$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_R} \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{rot}\,(\mathbf{u}^\omega + \mathbf{grad}\, p^\omega)\,.\mathbf{rot}\,\mathbf{v}^t - \omega^2 \int_{\Omega_R} \mu\,(\mathbf{u}^\omega + \mathbf{grad}\, p^\omega)\,.\,\mathbf{v}^t \\
&\quad + i\omega\Big(\mathcal{G}^e_\omega(\hat{\mathbf{x}} \wedge (\mathbf{u}^\omega + \mathbf{grad}\, p^\omega)), (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{v}^t) \ \wedge\ \hat{\mathbf{x}}\Big) = \omega\,(\mathbf{g}^\omega, \mathbf{v}^t), \forall\ \mathbf{v}^t \in H(\mathrm{rot}, \Omega_R).
\end{aligned}$$

L'interprétation de cette équation conduit à $\mathbf{H}^\omega = \mathbf{u}^\omega + \mathbf{grad}\, p^\omega$ est solution de

$$\mathbf{rot}\,\frac{1}{\varepsilon}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{H}^\omega - \omega^2\,\mu\,\mathbf{H}^\omega = 0 \text{ dans } \Omega_R, \mathbf{H}^\omega\,.\,\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

et vérifiant la condition de radiation (3) où $\mathbf{E}^\omega = \dfrac{i}{\omega\varepsilon}\mathbf{rot}\,\mathbf{H}^\omega$. Il nous reste à vérifier l'existence et l'unicité d'une solution $(\mathbf{u}^\omega, p^\omega) \in \mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R) \times H^1(\Omega_R)/\mathbf{R}$ de la formulation variationnelle (5). Les inégalités (voir encore une fois [3] et [6])

$$\begin{aligned}
&-\Im m\,\Big(\mathcal{G}^e_\omega(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{u}), (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{u}) \ \wedge\ \hat{\mathbf{x}}\Big) \geq C\,||\mathrm{rot}_{S_R}\,[(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{u}) \ \wedge\ \hat{\mathbf{x}}]||^2_{H^{-1/2}(S_R)} \\
&\qquad - C'\,||\mathrm{rot}_{S_R}\,[(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{u}) \ \wedge\ \hat{\mathbf{x}}]||^2_{H^{-1}(S_R)}, \\
&\Im m\,\Big(\mathcal{G}^e_\omega(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{grad}\, p), (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{grad}\, p) \ \wedge\ \hat{\mathbf{x}}\Big) \geq C\,||p||^2_{H^{1/2}(S_R)} - C'\,||p||^2_{H^{-1/2}(S_R)},
\end{aligned}$$

où C et C' sont deux constantes strictement positives (fonctions de la fréquence ω), montrent avec l'injection compacte de $\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R)$ dans $(L^2(\Omega_R))^3$

que le problème variationnel (5) vérifie l'alternative de Fredholm. L'unicité d'une solution aux équations de Maxwell $(1)-(3)$ sous les hypothèses faites sur les coefficients ε et μ nous conduit au résultat.

Nous allons exploiter les résultats précédents et en particulier, la formulation variationnelle (5) pour étudier la limite des champs $\mathbf{E}^\omega$ et $\mathbf{H}^\omega$ quand la fréquence ω tend vers zéro. Afin de déterminer les équations variationnelles limites, nous allons développer en fonction du petit paramètre ω la formulation (5). Le Théorème 2.1 nous permet d'écrire

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^\omega(\mathbf{u},\mathbf{u}^t) & = & a^0(\mathbf{u},\mathbf{u}^t)+\omega\, a^1(\mathbf{u},\mathbf{u}^t)+\omega^2\, a^2(\mathbf{u},\mathbf{u}^t)+\ldots, \\ \hat{a}^\omega(p,p^t) & = & \hat{a}^0(p,p^t)+\omega\,\hat{a}^1(p,p^t)+\omega^2\,\hat{a}^2(p,p^t)+\ldots, \end{array}\right.$$

où les formes bilinéaires a^j (resp. $\hat{a}^j$) sont continues sur $\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R)\times\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R)$ (resp. $H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}\,\times \mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R})/\mathbb{C}\,$) et

$$\left\{\begin{array}{l} a^0(\mathbf{u},\mathbf{u}^t) \;=\; \displaystyle\int_{\Omega_R}\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\,.\mathbf{rot}\,\mathbf{u}^t+i\Big(\mathcal{G}^e_{-1}(\hat{\mathbf{x}}\wedge\mathbf{u}),(\hat{\mathbf{x}}\wedge\mathbf{u}^t)\,\wedge\,\hat{\mathbf{x}}\Big), \\ \hat{a}^0(p,p^t) \;=\; -\displaystyle\int_{\Omega_R}\mu\,\mathbf{grad}\,p\,.\,\mathbf{grad}\,p^t+i\Big(\mathcal{G}^e_1(\hat{\mathbf{x}}\wedge\mathbf{grad}\,p),(\hat{\mathbf{x}}\wedge\mathbf{grad}\,p^t)\,\wedge\,\hat{\mathbf{x}}\Big). \end{array}\right.$$

Nous posons à priori l'Ansatz suivant:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbf{u}^\omega & = & \mathbf{u}^0+\omega\,\mathbf{u}^1+\omega^2\,\mathbf{u}^2+\ldots, \\ p^\omega & = & p^0+\omega\,p^1+\omega^2\,p^2+\ldots. \end{array}\right.$$

Le champ tangentiel $\mathbf{g}^\omega$ admet le développement asymptotique suivant:

$$\mathbf{g}^\omega \;=\; \frac{1}{\omega}\mathbf{g}^{-1}+\mathbf{g}^0+\omega\,\mathbf{g}^1+\omega^2\,\mathbf{g}^2+\ldots,$$

où $\mathrm{div}_{S_R}\,\mathbf{g}^{-1}\;=\;\mathrm{div}_{S_R}\,\mathbf{g}^0\;=\;0$. En reportant ces développements dans la formulation (5), l'identification des termes en ω donne:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^0(\mathbf{u}^j,\mathbf{u}^t) & = & -a^1(\mathbf{u}^{j-1},\mathbf{u}^t)-\ldots-a^j(\mathbf{u}^0,\mathbf{u}^t) \\ & & +(\mathbf{g}^{j-1},\mathbf{u}^t_{S_R}),\quad \forall\,\mathbf{u}^t\in\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R), \\ \hat{a}^0(p^j,p^t) & = & -\hat{a}^1(p^{j-1},p^t)-\ldots-\hat{a}^j(p^0,p^t) \\ & & +(\mathbf{g}^{j+1},\mathbf{grad}_{S_R}\,p^t),\quad \forall\,p^t\in H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}\,. \end{array}\right. \tag{6}$$

Il est clair que la solution triviale est l'unique solution dans $H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}$ de l'équation variationnelle:

$$\hat{a}^0(p, p^t) \;=\; 0, \quad \forall\, p^t \in H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}\,.$$

Pour les inconnues $\mathbf{u}^j$, nous voyons apparaître deux situations différentes, selon que l'espace vectoriel des *champs de Neumann* associés à Γ est non vide ou réduit à zéro. Il est bien connu que l'espace vectoriel de ces *champs de Neumann* associés à Γ est de dimension N et qu'il est engendré par les champs de vecteurs $(\mathbf{grad}\, q_i)_{i=1}^N$ où les q_i sont solutions dans $W^1(\Omega \setminus \tilde{\Sigma})$ des problèmes aux limites suivants:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mu\, \mathbf{grad}\, q_i \;=\; 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \tilde{\Sigma}, \\ \partial_n q_i \;=\; 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ [\, \tilde{q}_i]_{\,\Sigma_j} \;=\; \delta_{ij} \quad j = 1, \ldots, N, \\ [\, \mu\, \partial_n \tilde{q}_i]_{\,\Sigma_j} \;=\; 0 \quad j = 1, \ldots, N, \end{cases} \tag{7}$$

où l'espace $W^1(\Omega \setminus \tilde{\Sigma})$ est la fermeture des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\Omega \setminus \tilde{\Sigma})$ à supports compacts pour la semi-norme $||\, \mathbf{grad}\, ||_{L^2}$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker (voir par exemple [7]). Nous avons le

Lemme 2.2 *Les solutions dans $\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R)$ de l'équation variationnelle:*

$$a^0(\mathbf{u}, \mathbf{u}^t) \;=\; 0, \quad \forall\, \mathbf{u}^t \in \mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R), \tag{8}$$

forment un espace vectoriel de dimension N dont une base est formée par $(\mathbf{grad}\, \tilde{q}_i)_{i=1}^N$ où les $\tilde{q}_i$ sont solutions dans $H^1(\Omega_R \setminus \tilde{\Sigma})$ des problèmes aux limites suivants:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mu\, \mathbf{grad}\, \tilde{q}_i \;=\; 0 \quad \text{dans } \Omega_R \setminus \tilde{\Sigma}, \\ \partial_n \tilde{q}_i \;=\; 0 \quad \text{sur } \Gamma \cup S_R, \\ [\, \tilde{q}_i]_{\,\Sigma_j} \;=\; \delta_{ij} \quad j = 1, \ldots, N, \\ [\, \mu\, \partial_n \tilde{q}_i]_{\,\Sigma_j} \;=\; 0 \quad j = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\varphi_i = \tilde{q}_i - q_i$. Il est clair que φ_i vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mu \, \mathbf{grad} \, \varphi_i \; = \; 0 \quad \text{dans } \Omega_R \setminus \tilde{\Sigma}, \\ \partial_n \varphi_i \; = \; 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n \varphi_i \; = \; -\partial_n \, q_i \quad \text{sur } S_R, \\ [\,\varphi_i]_{\,\Sigma_j} \; = \; 0 \quad j = 1, \ldots, N, \\ [\,\mu \, \partial_n \varphi_i]_{\,\Sigma_j} \; = \; 0 \quad j = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{9}$$

Comme $\displaystyle\int_{S_R} \partial_n \, q_i = 0$, il résulte de (9) que la fonction $\varphi_i \in H^1(\Omega_R)$ est bien définie. Il est aussi clair que la famille $(\mathbf{grad} \, \tilde{q}_i)_{i=1}^N$ ainsi définie est solution dans $\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R)$ de (8). Réciproquement, soit $\mathbf{u} \in \mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R)$ solution de (8). Alors, nous avons

$$\mathbf{u} \, . \, \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma, \mathbf{rot} \, \mathbf{u} = 0 \text{ et } \operatorname{div} \mu \, \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega_R.$$

$\mathbf{u}$ différe donc des champs de Neumann associés à Γ (ceux associés à S_R sont nuls) par une fonction dans $H^1(\Omega_R)$ qui vérifie (9). Ceci conclut la démonstration du Lemme.

Maintenant, pour déterminer les termes $(\mathbf{u}^i)_{i \geq 0}$ dans le développement asymptotique de $\mathbf{u}^\omega$, nous avons donc besoin de N relations (d'orthogonalité) supplémentaires. Nous avons le

Lemme 2.3 *Nous avons l'identité:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} \mu \, \mathbf{u}^\omega \, . \, \mathbf{grad} \, \tilde{q}_j \quad &= \quad - \int_{\Omega_R} \mu \, \mathbf{grad} \, p^\omega \, . \, \mathbf{grad} \, \tilde{q}_j \\ &\quad - \frac{i}{\omega} \Big(\mathcal{G}^e_\omega (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{grad} \, p^\omega), (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{grad} \, \tilde{q}_j) \, \wedge \, \hat{\mathbf{x}} \Big), \end{aligned}$$

pour tout j allant de zéro jusqu'à N.

Démonstration. Commençons tout d'abord par remarquer que parce que $\tilde{q}_j \notin H^1(\Omega_R)$ la quantité

$$\int_{\Omega_R} \mu \, \mathbf{u}^\omega \, . \, \mathbf{grad} \, \tilde{q}_j$$

n'est pas forcément nulle. En fait, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_R} \mu\,(\mathbf{u}^\omega + \mathbf{grad}\,p^\omega)\,.\,\mathbf{grad}\,\tilde{q}_j &= \int_{\Omega_R} \mu\,\mathbf{H}^\omega\,.\,\mathbf{grad}\,\tilde{q}_j \\ &= -\frac{i}{\omega}\int_{\Omega_R} \mathbf{rot}\,\mathbf{E}^\omega\,.\,\mathbf{grad}\,\tilde{q}_j.\end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_{\Omega_R} \mu\,(\mathbf{u}^\omega + \mathbf{grad}\,p^\omega)\,.\,\mathbf{grad}\,\tilde{q}_j = -\frac{i}{\omega}\int_{S_R} \mathbf{E}^\omega \wedge \hat{x}\,.\,\mathbf{grad}\,\tilde{q}_j.$$

On conclut en utilisant la définition de l'opérateur électromagnétique extérieur $\mathcal{G}^e_\omega$.

A partir du Lemme précédent nous pouvons facilement déduire que

$$\int_{\Omega_R} \mu\,\mathbf{u}^0\,.\,\mathbf{grad}\,\tilde{q}_j = 0, j = 0,\ldots,N \tag{10}$$

et plus généralement,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_R} \mu\,\mathbf{u}^i\,\mathbf{grad}\,\tilde{q}_j &= -\int_{\Omega_R} \mu\,\mathbf{grad}\,p^i\,\mathbf{grad}\,\tilde{q}_j \\ &\quad +\Big(\mathcal{G}^e_{i+1}(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{grad}\,p^0) + \ldots \\ &\quad +\mathcal{G}^e_1(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{grad}\,p^i), (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{grad}\,\tilde{q}_j) \wedge \hat{\mathbf{x}}\Big),\end{aligned} \tag{11}$$

pour tout $i \geq 1$. Ceci permet de déterminer d'une manière unique les termes $(\mathbf{u}^i)_{i\geq 0}$. Enfin, l'analyse asymptotique des fonctions $(\mathbf{u}^\omega, p^\omega)$ dans $\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R) \times H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}$ lorsque ω tend vers zéro ci dessus avec les propriétés de la formulation variationnelle (5) nous permet de démontrer le résultat principal de cet article:

Théorème 2.3 *Soit $J \in \mathbb{N}$. Il existe $\omega_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \omega < \omega_0$*

$$\left\{\begin{array}{l} ||\mathbf{E}^\omega - \Big(\mathbf{E}^0 + \omega\,\mathbf{E}^1 + \ldots + \omega^J\,\mathbf{E}^J\Big)||_{(L^2(\Omega_R))^3} \leq C\,\omega^{J+1}, \\ ||\mathbf{H}^\omega - \Big(\mathbf{H}^0 + \omega\,\mathbf{H}^1 + \ldots + \omega^J\,\mathbf{H}^J\Big)||_{(L^2(\Omega_R))^3} \leq C\,\omega^{J+1}, \end{array}\right. \tag{12}$$

où C est une constante indépendante de ω et les champs $(\mathbf{E}^j, \mathbf{H}^j)$ sont donnés par $\mathbf{H}^j = \mathbf{u}^j + \mathbf{grad}\,p^j$ et $\mathbf{E}^j = i/\varepsilon\,\mathbf{rot}\,\mathbf{H}^{j+1}$ pour $j = 0,\ldots,J$.

Démonstration. Supposons que le bord Γ est simplement connexe. Soient $p^0, p^1, \ldots, p^J$ et $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^J$ définis par (6) où $J \in \mathbb{N}$. Il est maintenant facile de voir que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a^0(\mathbf{u}^\omega - \left(\mathbf{u}^0 + \ldots + \omega^J\, \mathbf{u}^J\right), \mathbf{u}^t) & = & 0(\omega^{J+1})\, ||\mathbf{u}^t||_{\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R)}, \\ & & \forall\, \mathbf{u}^t \in \mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R), \\ \hat{a}^0(p^\omega - \left(p^0 + \ldots + \omega^J\, p^J\right), p^t) & = & 0(\omega^{J+1})\, ||p^t||_{H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}}, \\ & & \forall\, p^t \in H^1(\Omega_R)/\mathbb{C}. \end{array} \right. \tag{13}$$

En utilisant le fait que la $\hat{a}^0$ est coercive sur $H^1(\Omega_R)/\mathbb{C} \times \mathrm{H}^1(\Omega_\mathrm{R})/\mathbb{C}$ et a^0 est une forme coercive à une perturbation compacte près sur $\mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R) \times \mathbb{H}_{\mathrm{div}}(\Omega_R)$, les estimations (12) se déduisent de (13) d'une manière tout à fait classique. La démonstration dans le cas où le bord Γ est non simplement connexe est analogue en utilisant le Lemme 2.3 qui nous permet de déterminer la projection (au sens de $((,))$) de $\mathbf{u}^\omega$ sur l'espace des champs de Neumann qui est de dimension finie.

Annexe. L'opérateur électromagnétique extérieur

Pour simplifier, nous supposons que le rayon R de la sphère S_R est égal à un. Soit $(\mathcal{Y}_l^m)_{l \geq 0, -l \leq m \leq l}$ la famille des harmoniques sphériques usuelle (orthogonale au sens $L^2(S_R)$). La base propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel est donnée par

$$\mathbf{G}_l^m = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\, \mathbf{grad}_{S_R}\, Y_l^m \text{ et } \mathbf{R}_l^m = \hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{G}_l^m, \quad \text{pour } -l \leq m \leq l,\ l \geq 1.$$

Soit $\mathbf{u}$ un champ tangentiel sur S_R. $\mathbf{u}$ s'écrit:

$$\mathbf{u} = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_l^m\, \mathbf{G}_l^m + b_l^m\, \mathbf{R}_l^m.$$

L'opérateur électromagnétique $\mathcal{G}_e^\omega$ est donné par (voir [1])

$$\mathcal{G}_e^\omega(\mathbf{u}) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} -i\omega\, \frac{b_l^m}{z_l(\omega)}\, \mathbf{G}_l^m + \frac{a_l^m\, z_l(\omega)}{i\omega}\, \mathbf{R}_l^m, \tag{14}$$

où

$$z_l(\omega) = 1 + \omega \frac{(h_l^{(1)})'(\omega)}{h_l^{(1)}(\omega)} \tag{15}$$

et $h_l^{(1)}$ est la fonction de Hankel. Dans [1], nous avons démontré qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de zéro indépendant de l tel que $\omega \mapsto z_l(\omega)$ et $\omega \mapsto \dfrac{1}{z_l(\omega)}$ sont analytiques dans $\mathcal{V}$. De plus, en écrivant dans $\mathcal{V}$

$$z_l(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} z_l^{(j)}\,\omega^j, \frac{1}{z_l(\omega)} = \sum_{j=0}^{\infty} z_l^{(-j)}\,\omega^j,$$

il existe une constante C_j indépendante de l telle que

$$\begin{aligned} |z_l^{(j)}| &\leq C_j\,|z_l^{(0)}|, \quad l \geq 1, \\ |z_l^{(-j)}| &\leq C_j\,|z_l^{(0)}|, \quad l \geq 1. \end{aligned}$$

Le Théorème 2.1 se déduit facilement de ces résultats (voir [1] pour les détails).

Références

[1] H. Ammari et J.-C. Nédélec, Low-frequency scattering, à paraître.

[2] H. Ammari, M. Laouadi et J.-C. Nédélec, Low frequency behavior of solutions to electromagnetic scattering problems in chiral media, *SIAM Journal on Applied Mathematics,* à paraître.

[3] A. Kirsch et P. Monk, A Finite element /spectral method for approximating the time-harmonic Maxwell system in $\mathbf{R}^3$, *SIAM Journal on Applied Mathematics,* **55**, 1324-1344, 1995.

[4] R. Kress, On the limiting behaviour of solutions to boundary integral equations associated with time harmonic wave equations for small frequencies, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **1**, 89-100, 1979.

[5] R. E. Kleinmann, Low-frequency electromagnetic scattering, edited by Uslenghi, Academic Press 1976.

[6] J.-C. Nédélec, Ondes acoustiques et électromagnétiques. Equations intégrales, Ecole Polytechnique, Edition 1996.

[7] R. Picard, On the low frequency asymptotics in electromagnetic theory, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* **354**, 50-73, 1984.

[8] R. Picard, On the boundary value problems of electro- and magnetostatics, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,* **92 A**, 165-174, 1982.

[9] A.G. Ramm, O.L. Weaver, N. Weck and K.J. Witsch, Dissipative Maxwell's equations at low frequencies, *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* 13, 305-322, 1990.

[10] P. Werner, On the behaviour of stationary electromagnetic wave fields for small frequencies, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 15, 447-496, 1966.