Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène

Habib Ammari et Jean-Claude Nédélec

Centre de Mathématiques Appliquées, CNRS URA 756,
École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France
(ammari@cmapx.polytechnique.fr et nedelec@cmapx.polytechnique.fr).

Résumé. Nous décrivons une méthode de couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène et nous présentons une étude de l'erreur d'approximation.

Abstract. A coupling procedure for the transmission problem for the time-harmonic Maxwell equations is considered. A saddle point structure is shown to hold for the exact as well as the discretized problem.

Mots clés. Équations intégrales, Éléments finis, Équations de Maxwell, Couplage.

Key words. Integral equations, Maxwell's equations, Boundary element method, Finite element method.

AMS subject classifications. 45A05, 65N38.

1 Introduction

Les méthodes numériques visant à résoudre les équations de Maxwell sont nombreuses. Deux difficultés sont naturellement rencontrées dans l'analyse numérique de ces équations qui forme déjà un domaine de travail très riche. La première difficulté est que le système de Maxwell est généralement posé dans un domaine non borné, et que les calculs numériques n'autorisent pas la prise en compte de caractéristiques locales sur un domaine infini. La deuxième difficulté est que les équations de Maxwell n'ont pas une structure coercive lorsque le milieu diélectrique n'est pas dissipatif. Une première manière de résoudre la première difficulté est de tronquer le domaine en cherchant des solutions dans un domaine borné, aux quelles on impose des conditions aux limites adéquates sur le bord de l'ouvert qui traduisent au mieux le comportement qu'aurait la solution à l'extérieur de l'ouvert (Bendali et Halpern [10]). Une autre manière de procéder est d'utiliser, dans le cas où le milieu est homogène et isotrope, des formules de représentation intégrale (Bendali [9]). Le système qui nous intéresse dans ce travail est celui d'un milieu hétérogène borné, éventuellement anisotrope, dont le complémentaire est un milieu homogène isotrope. La prise en compte du milieu extérieur se fait encore à l'aide de formules de représentation intégrales mais l'hétérogéneité du domaine borné, nous amène à utiliser une méthode qui tienne compte du caractère local de l'hétérogéneité. Cette technique de couplage entre des formules de représentation intégrale sur une surface Γ et des calculs à l'intérieur du domaine borné hétérogène délimité par Γ n'est pas nouvelle. Déjà dans le cas du Laplacien, nous citons les travaux de Johnson et Nédélec [14], et Costabel et Stephan [12] et [13]. Nous citons aussi l'étude des propriétés de l'opérateur électromagnétique menée par de La Bourdonnaye [16] et [17] et celle des auteurs pour les couches chirales [4]. De nombreuses expériences numériques ont été effectuées pour les équations de Maxwell par Levillain dans sa thèse [18]. Dans ce travail, nous présentons une manière naturelle de couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène dissipatif ou non qui a les bonnes propriétés de coercivité. Nous commençons par introduire notre méthode de couplage. Nous séparons ensuite la formulation variationnelle obtenue en une partie dont nous prouvons qu'elle est un isomorphisme, et une perturbation qui se révèle compacte et nous démontrons la condition inf-sup pour le problème continu. Dans la deuxième partie, nous exploitons les propriétés de cette formulation pour introduire une approximation du champ électrique et magnétique et nous démontrons la condition inf-sup pour le problème discret. Un résultat de régularité supplémentaire nous permet d'avoir d'une manière tout à fait classique une estimation optimale d'erreur.

2 Notations

Soit Ω^i un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^3$ et Ω^e le complémentaire de $\overline{\Omega^i}$ dans $\mathbf{R}^3$. Soit Ω^c un noyau conducteur, de bord Γ^c, contenu dans Ω^i, $\Omega^d = \Omega^i \setminus \overline{\Omega^c}$ et Γ^d le bord de Ω^d, supposé régulier. Nous considérons la propagation d'ondes électromagnétiques dans le milieu diélectrique Ω^d isotrope caractérisé par sa permittivité électrique ε et sa perméabilité magnétique μ. Les fonctions ε et μ sont complexes et vérifient $\Re e\, \varepsilon > 0$ et $\Re e\, \mu > 0$. Nous supposons de plus que ces coefficients sont de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω^d. Nous notons ε_0, μ_0 la permittivité et la perméabilité du vide Ω^e et $\mathbf{u}_{\Gamma^d}$ la composante tangentielle du champ de vecteur $\mathbf{u}$ sur Γ^d. Par abus de notation, nous noterons $\mathbf{n}$ la normale à Γ^c et Γ^d, dirigée vers l'extérieur. Lorsque c'est nécessaire, $\mathbf{n}$ sera complétement spécifiée pour éviter toute confusion. Nous introduisons les opérateurs différentiels du premier ordre suivants: div_{Γ^d} (la divergence surfacique), $\mathbf{rot}_{\Gamma^d}$ (le rotationnel vectoriel surfacique), rot_{Γ^d} (le rotationnel scalaire surfacique) et $\mathbf{grad}_{\Gamma^d}$ (le gradient surfacique) et la forme $((\,,\,))$ définie par

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \int_{\Omega^d} \mathbf{rot}\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \int_{\Omega_R} \varepsilon\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}.$$

Nous notons enfin les espaces: $L^2(\Omega^d), H^s(\Omega^d), H^s(\Gamma^d)$ les espaces de Sobolev usuels,

$H(\mathrm{rot}, \Omega^d) = \Big\{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega^d))^3, \mathbf{rot}\,\mathbf{u} \in (L^2(\Omega^d))^3\Big\}$,

$H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d) = \Big\{\mathbf{u} \in H(\mathrm{rot}, \Omega^d), \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma^c\Big\}$,

$TH^s(\Gamma^d) = \Big\{\mathbf{u} \in (H^s(\Gamma^d))^3, \mathbf{u}\,.\,\mathbf{n} = 0\Big\}$,

$TH^s(\mathrm{div}, \Gamma^d) = \Big\{\mathbf{u} \in TH^s(\Gamma^d), \mathrm{div}_{\Gamma^d}\,\mathbf{u} \in H^s(\Gamma^d)\Big\}$,

$TH^s(\mathrm{rot}, \Gamma^d) = \Big\{\mathbf{u} \in TH^s(\Gamma^d), \mathrm{rot}_{\Gamma^d}\,\mathbf{u} \in H^s(\Gamma^d)\Big\}$,

$\mathbb{P}(\Omega^d) = \Big\{p \in H^1(\Omega^d), p = 0 \text{ sur } \Gamma^c\Big\}$.

$\mathbb{M}(\Omega^d) = \Big\{\mathbf{u} \in H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d), \int_{\Omega_R} \varepsilon\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{grad}\,q = 0, \forall\, q \in \mathbb{P}(\Omega^d)\Big\}$.

3 Le problème continu

Nous allons présenter une méthode d'approximation numérique des solutions $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ des équations de Maxwell:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} \;=\; i\omega\,\mu\,\mathbf{H}, \quad \mathbf{rot}\;\mathbf{H} \;=\; -i\omega\,\varepsilon\;\mathbf{E} \quad \text{dans } \mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega^c}, \tag{1}$$

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^c, \tag{2}$$

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to+\infty} \Big(\sqrt{\mu_0}\,(\mathbf{H} - \mathbf{H}^{in}) \wedge \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - \sqrt{\varepsilon_0}\,(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{in}) \Big) \;=\; 0, \tag{3}$$

où $(\mathbf{E}^{in}, \mathbf{H}^{in})$ est une onde incidente plane de fréquence ω. Notons

$$\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = e^{i\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}/4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \text{ et } \Phi_0(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 1/4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

En utilisant *la formule de représentation intégrale* du champ électrique $\mathbf{E}$ suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \;\;&=\;\; \mathbf{E}^{in}(\mathbf{x}) - \mathbf{rot} \int_{\Gamma^d} \Phi\,\mathbf{m} - \frac{i}{\omega\varepsilon_0}\mathbf{grad} \int_{\Gamma^d} \Phi\,\mathrm{div}_{\Gamma^d}\,\mathbf{j} \\ &\quad -i\omega\mu_0 \int_{\Gamma^d} \Phi\,\mathbf{j}, \end{aligned} \tag{4}$$

où $\mathbf{m} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{n}$ et $\mathbf{j} = \mathbf{H} \wedge \mathbf{n}$ sur Γ^d et les deux *décompositions dites de Hodge*:

Lemme 3.1 *L'espace $H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d)$ se décompose en deux espaces orthogonaux pour le produit $((,))$ de la manière suivante:*

$$H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d) = \mathbb{M}(\Omega^d) \,\oplus\, \mathbf{grad}\,\mathbb{P}(\Omega^d). \tag{5}$$

L'espace $TH^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma^d)$ se décompose aussi lorsque Γ^d est supposé simplement connexe en deux espaces orthogonaux au sens de la dualité $TH^{1/2}(\Gamma^d), TH^{-1/2}(\Gamma^d)$:

$$TH^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma^d) = \mathbf{grad}_{\Gamma^d}\, H^{3/2}(\Gamma^d)/\mathbb{C} \,\oplus\, \mathbf{rot}_{\Gamma^d}\, \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma^d)/\mathbb{C}\,. \tag{6}$$

nous démontrons le

Théorème 3.1 *La formulation variationnelle mixte, dont les inconnues sont $\mathbf{u} \in \mathbb{M}(\Omega^d), p \in \mathbb{P}(\Omega^d)$ et $\mathbf{j} = \mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,\varphi + \mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,\psi \in TH^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma^d)$,* *suivante:*

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{\Omega^d} \frac{1}{\mu}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\,.\mathbf{rot}\,\mathbf{u}^t - \omega^2 \int_{\Omega^d} \varepsilon\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}^t - i\omega \int_{\Gamma^d} \mathbf{j}\,.\,\mathbf{u}^t_{\Gamma^d} = 0, \quad \forall\, \mathbf{u}^t \in \mathbb{M}(\Omega^d), \\
\displaystyle -\omega^2 \int_{\Omega^d} \varepsilon\,\mathbf{grad}\,p\,.\,\mathbf{grad}\,p^t - i\omega \int_{\Gamma^d} \mathbf{j}\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,p^t = 0, \quad \forall\, p^t \in \mathbb{P}(\Omega^d), \\
\displaystyle \frac{i}{\omega\varepsilon_0} \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \Phi\,\Delta_{\Gamma^d}\,\varphi\,\Delta_{\Gamma^d}\,\varphi^t - i\omega\mu_0 \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \Phi\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,\varphi\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,\varphi^t \\
\displaystyle -i\omega\mu_0 \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \Phi\,\mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,\psi\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,\varphi^t = -\int_{\Gamma^d} \mathbf{E}^{in}\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,\varphi^t \\
\displaystyle \quad +\frac{1}{2}\int_{\Gamma^d} (\mathbf{u}_{\Gamma^d} + \mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,p)\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,\varphi^t \\
\displaystyle \quad + \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \mathbf{grad}_{\mathbf{x}}\,\Phi \wedge ((\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p) \wedge \mathbf{n})\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,\varphi^t, \quad \forall\, \varphi^t \in H^{3/2}(\Gamma^d)/\mathbb{C}\,, \\
\displaystyle i\omega\mu_0 \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \Phi\,\mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,\psi\,.\,\mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,\psi^t + i\omega\mu_0 \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \Phi\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,\varphi\,.\,\mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,\psi^t \\
\displaystyle \quad = \int_{\Gamma^d} \mathbf{E}^{in}\,.\,\mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,\psi^t - \frac{1}{2}\int_{\Gamma^d} \mathbf{u}_{\Gamma^d}\,.\,\mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,\psi^t \\
\displaystyle \quad - \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \mathbf{grad}_{\mathbf{x}}\,\Phi \wedge ((\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p) \wedge \mathbf{n})\,.\,\mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,\psi^t, \quad \forall\, \psi^t \in H^{1/2}(\Gamma^d)/\mathbb{C}\,,
\end{array}
\right.
\tag{7}
$$

est telle que $\mathbf{E} = \mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p$ *et* $\mathbf{H} = -\dfrac{i}{\omega\mu}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}$ *sont solutions (localement dans* $H(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\Omega^c}) \times H(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\Omega^c})$*) des équations de Maxwell* $(1) - (3)$ *et* $\mathbf{j} = \mathbf{H} \wedge \mathbf{n}$ *sur* Γ^d*. De plus, si*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathbf{j} \wedge \mathbf{n} \quad = \quad & \mathbf{H}^{in} \wedge \mathbf{n} - (\mathbf{rot} \int_{\Gamma^d} \Phi\,\mathbf{j}) \wedge \mathbf{n} + \frac{i}{\omega\mu_0}(\mathbf{grad} \int_{\Gamma^d} \Phi\,\mathrm{div}_{\Gamma^d}\,((\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p) \wedge \mathbf{n})) \wedge \mathbf{n} \\
& + i\omega\varepsilon_0\,(\int_{\Gamma^d} \Phi\,((\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p) \wedge \mathbf{n})) \wedge \mathbf{n},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

la réciproque est également vraie.

Démonstration. La démonstration de la décomposition de Hodge de l'espace $H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d)$ est analogue à celle utilisée dans [15]. Celle de $TH^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma^d)$ est donnée dans [16]. Soit $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ une solution localement dans $H(\mathrm{rot})$ des équations de Maxwell $(1) - (3)$. Les décompositions de Hodge précédentes nous permettent de décomposer le champ électrique $\mathbf{E}$ en $\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p$ où $\mathbf{u} \in \mathbb{M}(\Omega^d)$ et $p \in \mathbb{P}(\Omega^d)$ et $\mathbf{j} = \mathbf{H} \wedge \mathbf{n}$ en $\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,\varphi + \mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,\psi$ où $\varphi \in H^{3/2}(\Gamma^d)/\mathbb{C}$ et $\psi \in H^{1/2}(\Gamma^d)/\mathbb{C}$. Les deux premières équations dans (7) s'obtiennent par intégration par parties. La troisième équation découle de la représentation intégrale (4) du champ magnétique $\mathbf{E}$ à l'extérieur du milieu diélectrique Ω^d et de la continuité des composantes tangentielles des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ à la traversée de Γ^d. Réciproquement, Soit $(\mathbf{u}, p, \mathbf{j} = \mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,\varphi + \mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,\psi)$ une solution dans $\mathbb{M}(\Omega^d) \times \mathbb{P}(\Omega^d) \times TH^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma^d)$ de (7). En prenant la somme des deux premières équations et en utilisant encore une fois la décomposition de Hodge de l'espace $H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d)$, nous obtenons

$$\int_{\Omega^d} \Big[\frac{1}{\mu}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E}^d \,.\, \mathbf{rot}\,\mathbf{v}^t - \omega^2\,\varepsilon\,\mathbf{E}^d \,.\, \mathbf{v}^t\Big] - i\omega \int_{\Gamma^d} \mathbf{j} \,.\, \mathbf{v}^t_{\Gamma^d} = 0,$$

pour tout $\mathbf{v}^t \in H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d)$ où $\mathbf{E}^d = \mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p$ dans Ω^d. Ce qui montre que

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\,\dfrac{1}{\mu}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E}^d - \omega^2\,\varepsilon\,\mathbf{E}^d = 0 \quad \text{dans } \Omega^d, \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{E}^d \wedge \mathbf{n} = i\omega\mu\,\mathbf{j} \quad \text{sur } \Gamma^d. \end{cases}$$

A partir des deux dernières équations dans (7), nous obtenons d'une manière classique que le champ $\mathbf{E}^e$ donné par la représentation intégrale (4) où $\mathbf{m} = (\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p) \wedge \mathbf{n}$ à l'extérieur du milieu diélectrique Ω^d est solution des équations de Maxwell

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E}^e - \omega^2\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\mathbf{E}^e = 0$$

(à l'extérieur de Ω^d) avec $\mathbf{E}^e - \mathbf{E}^{in}$ vérifiant la condition de radiation classique et

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}^e \wedge \mathbf{n} = i\omega\mu_0\,\mathbf{j} \quad \text{sur } \Gamma^d,$$

si la condition (8) est satisfaite. Or $\mathbf{E}^e \wedge \mathbf{n} = \mathbf{E}^d \wedge \mathbf{n} = (\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p) \wedge \mathbf{n}$ sur Γ^d. Ceci montre que le champ $\mathbf{E}$ défini par $\mathbf{E} = \mathbf{E}^d$ dans Ω^d et $\mathbf{E}^e$ dans le milieu extérieur avec $\mathbf{H} = \dfrac{1}{i\omega\,\mu}\,\mathbf{rot}\,E$ est solution des équations de Maxwell (1) avec la condition aux limites (2) et la condition de radiation (3). Ce qui termine la démonstration du Théorème.

Nous allons écrire à partir de la formulation variationnelle précédente une nouvelle formulation que nous séparons en une partie dont on prouve qu'elle est un isomorphisme, et une perturbation qui se révèle compacte, l'unicité d'une solution aux équations de Maxwell associée à l'alternative de Fredholm, permettant ensuite de conclure à l'existence d'une solution. Notons que (8) apparait comme une certaine contrainte nécessaire pour éliminer les modes parasites dans la formulation (7). Afin d'arriver à une formulation de type Fredholm (équivalente aux système de Maxwell (1) − (3)) qui présentera l'avantage de mieux se prêter aux approximations numériques, nous utilisons les identités:

Lemme 3.2 *Soit* $(\mathbf{u}, p, \mathbf{j} = \mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,\varphi + \mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,\psi)$ *une solution dans* $\mathbb{M}(\Omega^d) \times \mathbb{P}(\Omega^d) \times TH^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma^d)$ *de* (7). *Supposons que la condition* (8) *est satisfaite. Pour tout* $\mathbf{u}^t \in \mathbb{M}(\Omega^d)$ *et* $p^t \in \mathbb{P}(\Omega^d)$*, nous avons*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Gamma^d} \mathbf{j}\,.\,\mathbf{u}^t_{\Gamma^d} &= \frac{i}{\omega\mu_0}\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \Phi\,\mathrm{rot}_{\Gamma^d}\,\mathbf{u}_{\Gamma^d}\ \mathrm{rot}_{\Gamma^d}\,\mathbf{u}^t_{\Gamma^d} - i\omega\varepsilon_0\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d}\Phi\,\mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,p\,.\,\mathbf{u}^t_{\Gamma^d} \\
&\quad -\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d}\Big[\partial_{n_x}\Phi\,\mathbf{j} - \mathbf{grad}_{\mathbf{x}}\Phi\,(\mathbf{n_x}-\mathbf{n_y})\,.\,\mathbf{j}\Big]\,.\,\mathbf{u}^t_{\Gamma^d} \\
&\quad +\int_{\Gamma^d}\mathbf{H}^{in}\wedge\mathbf{n}\,.\,\mathbf{u}^t_{\Gamma^d} - i\omega\varepsilon_0\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d}\Phi\,\mathbf{u}\wedge\mathbf{n}\,.\,\mathbf{u}^t_{\Gamma^d},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Gamma^d} \mathbf{j}\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,p^t &= -i\omega\varepsilon_0\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d}\Phi\,\mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,p\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,p^t \\
&\quad -\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d}\Big[\partial_{n_x}\Phi\,\mathbf{j} - \mathbf{grad}_{\mathbf{x}}\Phi\,(\mathbf{n_x}-\mathbf{n_y})\,.\,\mathbf{j}\Big]\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,p^t \\
&\quad +\int_{\Gamma^d}\mathbf{H}^{in}\wedge\mathbf{n}\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,p^t \\
&\quad -i\omega\varepsilon_0\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d}\Phi\,\mathbf{u}\wedge\mathbf{n}\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,p^t,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d}\Phi\,\mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,p\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,p^t = \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d}(\mathbf{n_x}-\mathbf{n_y})\wedge\mathbf{grad}_{\mathbf{y}}\,\Phi\,.\,\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,p^t\ p, \tag{11}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d}\Phi\,\mathbf{rot}_{\Gamma^d}\,p\,.\ \mathbf{u}^t_{\Gamma^d} &= \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d}(\mathbf{n_x}-\mathbf{n_y})\wedge\mathbf{grad}_{\mathbf{y}}\,\Phi\,.\,\mathbf{u}^t_{\Gamma^d}\ p \\
&\quad -\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d}\Phi\,\mathrm{rot}_{\Gamma^d}\,\mathbf{u}^t_{\Gamma^d}\ p.
\end{aligned} \tag{12}$$

Démonstration. Pour tout $\mathbf{u}^t \in \mathbb{M}(\Omega^d)$ et $p^t \in \mathbb{P}(\Omega^d)$, nous avons d'après les théorèmes classiques $\mathbf{u}^t_{\Gamma^d}$ et $\mathbf{grad}_{\Gamma^d}\,p^t$ dans $TH^{-1/2}(\mathrm{rot}, \Gamma^d)$. Nous pouvons donc les utiliser d'une manière classique comme fonctions test dans la formulation variationnelle de l'équation intégrale qui provient de la formule de représentation intégrale suivante du champ magnétique (voir par exemple

[21]):

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \mathbf{H}^{in}(\mathbf{x}) - \mathbf{rot} \int_{\Gamma^d} \Phi\, \mathbf{j} + \frac{i}{\omega\mu_0}\mathbf{grad} \int_{\Gamma^d} \Phi\, \mathrm{div}_{\Gamma^d}\, \mathbf{m} \\ &\quad + i\omega\varepsilon_0 \int_{\Gamma^d} \Phi\, \mathbf{m}.\end{aligned} \tag{13}$$

Ceci conduit immédiatement à (9) et (10) car $\mathbf{m} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{n}$. Les identités (11) et (12) s'obtiennent par intégration par parties (voir [21]). Signalons que (13) s'obtient à partir de (4) en prenant son rotationnel et en utilisant les propriétés du noyau Φ et qu'elle est surtout équivalente à la condition (8).

En utilisant le Lemme précédent, nous avons le

Théorème 3.2 *En supposant que* (8) *est satisfaite, la formulation variationnelle mixte* (7) *se réécrit sous la forme suivante:*

$$\left\{\begin{aligned} & a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^t) + \text{ termes compacts en } \mathbf{u} \\ & \qquad + \text{termes de couplage compacts } = \int_{\Gamma^d} \mathbf{g}^{in} \,.\, \mathbf{u}^t_{\Gamma^d}, \\ & \hat{a}(p, p^t) + \text{ termes compacts en } p \\ & \qquad + \text{termes de couplage compacts } = \int_{\Gamma^d} \mathbf{g}^{in} \,.\, \mathbf{grad}_{\Gamma^d}\, p^t, \\ & -\frac{i}{\omega\varepsilon_0} \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \Phi_0\, \Delta_{\Gamma^d}\, \varphi\, \Delta_{\Gamma^d}\, \varphi^t + \text{ termes compacts en } \varphi \\ & \qquad + \text{termes de couplage compacts } = \int_{\Gamma^d} \mathbf{E}^{in} \,.\, \mathbf{grad}_{\Gamma^d}\, \varphi^t, \\ & i\omega\mu_0 \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \Phi_0\, \mathbf{rot}_{\Gamma^d}\, \psi \,.\, \mathbf{rot}_{\Gamma^d}\, \psi^t + \text{ termes compacts en } \psi \\ & \qquad + \text{termes de couplage } = -\int_{\Gamma^d} \mathbf{E}^{in} \,.\, \mathbf{rot}_{\Gamma^d}\, \psi^t, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

où

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^t) &= \int_{\Omega^d} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot}\, \mathbf{u} \,.\mathbf{rot}\, \mathbf{u}^t + \omega^2 \int_{\Omega^d} \varepsilon\, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{u}^t \\ &\quad + \frac{2}{\mu_0} \int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \Phi_0\, \mathrm{rot}_{\Gamma^d}\, \mathbf{u}_{\Gamma^d}\, \mathrm{rot}_{\Gamma^d}\, \mathbf{u}^t_{\Gamma^d}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\hat{a}(p, p^t) = -\omega^2 \int_{\Omega^d} \varepsilon\, \mathbf{grad}\, p \,.\, \mathbf{grad}\, p^t, \tag{16}$$

et
$$\mathbf{g}^{in} = 2\,\mathbf{H}^{in} \wedge \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma^d. \tag{17}$$

Démonstration. Sous l'hypothèse de régularité $\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\Omega^d)$, il est classique de démontrer que $\mathbb{M}(\Omega^d) \subset (H^1(\Omega^d))^3$ (voir [21]) et donc, l'injection $\mathbb{M}(\Omega^d)$ dans $(L^2(\Omega^d))^3$ est compacte. Nous remplaçons dans la première équation de (7) le terme
$$\int_{\Gamma^d} \mathbf{j} \,.\, \mathbf{u}^t_{\Gamma^d}$$
par (9). Le seul terme qui n'est pas évidemment compact est le terme
$$\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \Phi\, \mathbf{rot}_{\Gamma^d}\, p \,.\, \mathbf{u}^t_{\Gamma^d}$$
qui couple les variables $\mathbf{u}^t_{\Gamma^d}$ et p. L'utilisation de (12) nous donne le résultat. Pour la variable scalaire p, nous remplaçons
$$\int_{\Gamma^d} \mathbf{j} \,.\, \mathbf{grad}_{\Gamma^d}\, p^t$$
par (10) et nous utilisons l'identité (11) pour avoir le résultat. Nous signalons que le terme
$$\frac{2}{\mu_0}\int_{\Gamma^d}\int_{\Gamma^d} \Phi_0\, \mathrm{rot}_{\Gamma^d}\, \mathbf{u}_{\Gamma^d}\; \mathrm{rot}_{\Gamma^d}\, \mathbf{u}^t_{\Gamma^d},$$
est de type inusuel. Il est vraisemblablement à l'origine des difficultés rencontrées jusqu'à là pour l'écriture d'une formulation de couplage pour les équations de Maxwell dans un milieu hétérogène. D'autre part, la formulation (14) est équivalente à $(7)-(8)$ et donc aux équations de Maxwell $(1)-(3)$. Il suffit de vérifier l'unicité d'une solution à (14). Levillain a montré dans sa thèse que si $\mathbf{E} = \mathbf{u} + \mathbf{grad}\, p, \mathbf{j} = \mathbf{grad}_{\Gamma^d}\, \varphi + \mathbf{rot}_{\Gamma^d}\, \psi$ vérifient le système (14) avec un second membre nul, alors
$$\Im m\Big(\int_{\Gamma^d} (\mathbf{rot}\, \mathbf{E} \wedge \mathbf{n}) \,.\, \overline{\mathbf{E}} = 0,$$
et le champ $\tilde{\mathbf{E}}$ défini comme l'unique solution sortante des équations de Maxwell dans le milieu extérieur Ω^e
$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\tilde{\mathbf{E}} - \omega^2\, \varepsilon_0\, \mu_0\, \tilde{\mathbf{E}} = 0,$$
avec la condition aux limites
$$\tilde{\mathbf{E}} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma^d,$$

est tel que

$$\frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{rot}\,\tilde{\mathbf{E}} \wedge \mathbf{n} = \frac{1}{\mu}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma^d.$$

D'où

$$\Im m\Big(\int_{\Gamma^d} (\mathbf{rot}\,\tilde{\mathbf{E}} \wedge \mathbf{n}) \,.\, \overline{\tilde{\mathbf{E}}} = 0.$$

Ceci conduit d'une manière classique (voir par exemple [4]) à $\tilde{\mathbf{E}} \equiv 0$ et donc, par continuation unique, à $\mathbf{E} \equiv 0$ (et $\mathbf{j} = 0$). Le Lemme de décomposition 3.1 montre que les fonctions $\mathbf{u}, p, \varphi$ et ψ sont identiquement nulles.
Nous remarquons enfin que la forme bilinéaire a (resp. $\hat{a}$) est coercive sur $\mathbb{M}(\Omega^d) \times \mathbb{M}(\Omega^d)$ (resp. $\mathbb{P}(\Omega^d) \times \mathbb{P}(\Omega^d)$) et que la formulation (14) est symétrique (voir [18]).

Le théorème précédent montre que la formulation (14), aux opérateurs compacts près, a une structure diagonale inversible. De l'équivalence entre la formulation (14) et les équations de Maxwell $(1) - (3)$, nous obtenons le

Théorème 3.3 *Le système des équations variationnelles* (14) *admet une unique solution dans* $\mathcal{X} = \mathbb{M}(\Omega^d) \times \mathbb{P}(\Omega^d) \times H^{3/2}(\Gamma^d)/\mathbb{C} \times \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma^\mathrm{d})/\mathbb{C}$.

Démonstration. Le théorème précédent montre que le système des équations variationnelles (14) vérifie l'alternative de Fredholm. L'équivalence entre cette formulation variationnelle et les équations de Maxwell $(1) - (3)$ et l'unicité d'une solution à ces dernières équations nous conduisent au résultat.

Dans la suite, nous réécrivons la formulation (14) sous la forme:

$$\mathcal{A}((\mathbf{u}, p, \varphi, \psi), (\mathbf{u}^t, p^t, \varphi^t, \psi^t)) = ((\mathbf{g}^{in}, \mathbf{u}^t), (\mathbf{g}^{in}, p^t), (\mathbf{g}^{in}, \varphi^t, \psi^t)),$$

pour tout $(\mathbf{u}^t, p^t, \varphi^t, \psi^t) \in \mathcal{X}$. Compte tenu de la structure de la formulation variationnelle (14) qui est diagonale coercive à des termes compacts près, nous pouvons obtenir d'une manière tout à fait classique la condition inf-sup suivante sur $\mathcal{A}$:

Lemme 3.3 *Il existe une constante C strictement positive tel que pour tout $(\mathbf{u}, p, \varphi, \psi) \in \mathcal{X}$, nous avons:*

$$\sup_{(\mathbf{u}^t, p^t, \varphi^t, \psi^t) \in \mathcal{X}\setminus\{0\}} \frac{|\mathcal{A}((\mathbf{u}, p, \mathbf{j}), (\mathbf{u}^t, p^t, \varphi^t, \psi^t))|}{|||(\mathbf{u}^t, p^t, \varphi^t, \psi^t)|||} \geq C\,|||(\mathbf{u}, p, \varphi, \psi)|||, \qquad (18)$$

où $|||(\mathbf{u}, p, \varphi, \psi)|||^2 = ||\mathbf{u}||^2_{\mathbb{M}(\Omega^d)} + ||p||^2_{\mathbb{P}(\Omega^d)} + ||\varphi||^2_{H^{3/2}(\Gamma^d)/\mathbb{C}} + ||\psi||^2_{H^{1/2}(\Gamma^d)/\mathbb{C}}\,.$

Pour conclure cette partie, nous faisons les remarques suivantes:

Remarque 3.1 *On peut obtenir une nouvelle formulation variationnelle mixte légèrement différente de* (14) *en inter-changeant le rôle de* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{H}$. *Le cadre fonctionnel doit être légèrement modifié. En particulier, l'espace* $\mathbb{P}(\Omega^d)$ *doit être remplacé par* $\mathbb{P}'(\Omega^d) = H^1(\Omega^d)$ *et* $\mathbb{M}(\Omega^d)$ *par*

$$\mathbb{M}'(\Omega^d) = \Big\{ \mathbf{u} \in H(\mathrm{rot}, \Omega^d), \int_{\Omega_R} \varepsilon\, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{grad}\, q = 0, \forall\, q \in \mathbb{P}'(\Omega^d) \Big\}.$$

L'inconnue $\mathbf{j}$ *doit être remplacée par* $\mathbf{m} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} \in TH^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma^d)$.

Remarque 3.2 *Nous pouvons également au lieu d'utiliser la décomposition de Hodge* (6) *de l'inconnue* $\mathbf{j} \in TH^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma^d)$ *garder cette inconnue et introduire une nouvelle inconnue* $\rho = \mathrm{div}_{\Gamma^d} \mathbf{j} \in H^{-1/2}(\Gamma^d)$ *(*$\rho = \Delta_{\Gamma^d} \varphi$*). Ceci conduit d'après [9] et [21] à une formulation de type point-selle en les inconnues* $\mathbf{j}$ *et* ρ. *La formulation* (14) *est remplacée par la formulation suivante:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle \int_{\Omega^d} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot}\, \mathbf{u} \,.\mathbf{rot}\, \mathbf{u}^t - \omega^2 \int_{\Omega^d} \varepsilon\, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{u}^t - i\omega \int_{\Gamma^d} \mathbf{j} \,.\, \mathbf{u}^t_{\Gamma^d} = 0, \quad \forall\, \mathbf{u}^t \in \mathbb{M}(\Omega^d), \\ \displaystyle -\omega^2 \int_{\Omega^d} \varepsilon\, \mathbf{grad}\, p \,.\, \mathbf{grad}\, p^t - i\omega \int_{\Gamma^d} \mathbf{j} \,.\, \mathbf{grad}_{\Gamma^d}\, p^t = 0, \quad \forall\, p^t \in \mathbb{P}(\Omega^d), \\ \displaystyle -i\omega\mu_0 \int_{\Gamma^d} \int_{\Gamma^d} \Phi\, \mathbf{j} \,.\, \mathbf{j}^t + \frac{i}{\omega\varepsilon_0} \int_{\Gamma^d} \int_{\Gamma^d} \Phi\, \rho\, \mathrm{div}_{\Gamma^d} \mathbf{j}^t = - \int_{\Gamma^d} \mathbf{E}^{in} \,.\, \mathbf{j}^t \\ \displaystyle \quad + \int_{\Gamma^d} \int_{\Gamma^d} \mathbf{grad_x}\, \Phi \wedge ((\mathbf{u} + \mathbf{grad}\, p) \wedge \mathbf{n}) \,.\, \mathbf{j}^t, \quad \forall\, \mathbf{j}^t \in TH^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma^d), \\ \displaystyle \int_{\Gamma^d} \int_{\Gamma^d} \Phi\, \mathrm{div}_{\Gamma^d} \mathbf{j}\, \rho^t - \int_{\Gamma^d} \int_{\Gamma^d} \Phi\, \rho\, \rho^t = 0, \quad \forall\, \rho^t \in H^{-1/2}(\Gamma^d), \end{array} \right. \tag{19}$$

où les termes

$$\int_{\Gamma^d} \mathbf{j} \,.\, \mathbf{u}^t_{\Gamma^d},$$

et

$$\int_{\Gamma^d} \mathbf{j} \,.\, \mathbf{grad}_{\Gamma^d}\, p^t,$$

sont donnés par (9) *et* (10). *Cette formulation a les bonnes propriétés de coercivité (à condition d'utiliser les identités* (9) *et* (10) *et donc la "contrainte"* (8)*) compte tenu des résultats démontrés pour la formulation* (14) *et de la condition inf-sup démontrée par Bendali dans [9]. Bien évidemment, nous pouvons là également inter-changer le rôle de* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{H}$ *pour écrire une* *quatrième formulation de couplage qui est légèrement différente des trois premières. Dans la suite de cet article, nous nous limiterons à l'analyse de la formulation* (14)*. Les trois autres formulations ne conduisent à aucune difficulté supplémentaire. L'approximation numérique de* (19) *sera brièvement discutée.*

Remarque 3.3 *La généralisation de notre méthode de couplage pour la résolution des équations de Maxwell dans un milieu chiral hétérogène ne présente aucune nouvelle difficulté grâce à nos résultats sur la propagation d'ondes électromagnétiques dans les milieux chiraux [1] et [2]. D'autre part, pour traiter une condition aux limites mixte (de type Leontovich) au lieu d'une condition de type conducteur parfait (*$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0$ *sur* Γ^c*) il suffit d'utiliser la formulation variationnelle introduite dans [7].*

Remarque 3.4 *Lorsque* Γ^d *est non-simplement connexe, il faut ajouter dans la décomposition de Hodge* (6) *de l'espace* $TH^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma^d)$ *l'espace* $\mathcal{N}(\Gamma^d)$ *des champs harmoniques. Il faut dans ce cas ajouter une nouvelle inconnue vectorielle* α *qui est la projection de l'inconnue* $\mathbf{j}$ *sur l'espace des champs harmoniques. La formulation* (14) *doit être complétée par une cinquième équation (voir par exemple [8] pour l'utilisation de la décomposition de Hodge* (6)*). Comme* $\mathcal{N}(\Gamma^d)$ *est de dimension finie (égale à deux fois le nombre de "trous" dans* Γ^d*), cette dernière équation, à part qu'elle complique l'écriture de* (14) *ne pose pas de difficulté.*

Remarque 3.5 *Il est enfin à noter que la formulation* (14) *permet de mener une analyse asymptotique complète, très proche de celle développée dans nos articles [3] et [6], lorsque la fréquence* $\omega \to 0$*. Le report des Ansatz des inconnues* $\mathbf{u}, p, \psi, \varphi$ *et* $\mathbf{j}$ *dans* (14) *conduit après identification des termes en* ω^j *à des problèmes bien posés. Cette formulation nous permet en particulier de réduire le calcul (numérique) de l'asymptotique des champs électrique et magnétique à basses fréquences à un problème canonique posé non plus dans une sphère contenant l'inhomogénéité comme c'est le cas dans [3] et [6] mais uniquement dans le milieu hétérogène. Toutefois, elle nous semble un peu plus coûteuse à mettre en oeuvre.*

4 Le problème discret

Nous allons exploiter les résultats précédents et en particulier, la formulation variationnelle (14) pour introduire une approximation des champs $\mathbf{E}$ et

H. Nous utilisons (pour notre étude théorique) des éléments finis courbes, conformes dans $H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d)$, basés sur des tétraèdres courbes qui pavent exactement l'ouvert Ω^d. Cette famille d'éléments finis doit satisfaire la décomposition de Hodge de l'espace $H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d)$ utilisée dans le Théorème 3.1. Nous renvoyons à Kirsch et Monk [15] pour une discussion intéressante de ces hypothèses. Soit $\mathcal{X}_h \subset \mathcal{X}$ l'espace discret où $h > 0$ est associé au maillage. Le problème discret s'écrit

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}((\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{j}_h), (\mathbf{u}_h^t, p_h^t, \varphi_h^t, \psi_h^t)) \;=\; ((\mathbf{g}^{in}, \mathbf{u}_h^t), (\mathbf{g}^{in}, p_h^t), (\mathbf{g}^{in}, \varphi_h^t), (\mathbf{g}^{in}, \psi_h^t)), \\ &\qquad \forall\, (\mathbf{u}_h^t, p_h^t, \varphi_h^t, \psi_h^t) \in \mathcal{X}_h. \end{aligned} \tag{20}$$

Nous avons la condition inf-sup discrète:

Lemme 4.1 *Il existe une constante C strictement positive indépendante de h tel que pour tout $(\mathbf{u}_h, p_h, \varphi_h, \psi_h) \in \mathcal{X}_h$, nous avons:*

$$\sup_{(\mathbf{u}_h^t, p_h^t, \varphi_h^t, \psi_h^t) \in \mathcal{X}_h \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{A}((\mathbf{u}_h, p_h, \varphi_h, \psi_h), (\mathbf{u}_h^t, p_h^t, \varphi_h^t, \psi_h^t))|}{|||(\mathbf{u}_h^t, p_h^t, \varphi_h^t, \psi_h^t)|||} \geq C\, |||(\mathbf{u}_h, p_h, \varphi_h, \psi_h)|||. \tag{21}$$

Démonstration. Soit $\mathbb{H}_h \subset H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d)$ une famille d'éléments finis utilisée pour discrétiser l'espace $H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d)$. Nous supposons que pour tout $\mathbf{E}_h \in \mathbb{H}_h$, $\mathbf{E}_h = \mathbf{w} + \mathbf{grad}\, p$ où $\mathbf{w} \in \mathbb{M}(\Omega^d)$ et $p \in \mathbb{P}(\Omega^d)$ et que

$$\frac{1}{||\mathbf{E}_h||_{H(\mathrm{rot}, \Omega^d)}} ||R_h \mathbf{w} - \mathbf{w}||_{(L^2(\Omega^d))^3} \to 0, \quad h \to 0,$$

où $R_h : (H^2(\Omega^d))^3 \mapsto \mathbb{H}_h$ est l'opérateur d'interpolation. La famille d'éléments finis de Nédélec vérifie cette propriété (voir [15]). Soit l'opérateur de projection orthogonale au sens $((,)) : P_h : H_0(\mathrm{rot}, \Omega^d) \mapsto \mathbb{H}_h$. En utilisant (voir [15] pour la démonstration)

$$||P_h \mathbf{E} - \mathbf{E}||_{H(\mathrm{rot}, \Omega^d)} \to 0, \quad h \to 0,$$

et l'équivalence des normes

$$||\mathbf{E}||_{H(\mathrm{rot}, \Omega^d)} \leq C\, |||(\mathbf{u}, p, 0)||| \leq C'\, ||\mathbf{E}||_{H(\mathrm{rot}, \Omega^d)},$$

où $\mathbf{E} = \mathbf{u} + \mathbf{grad}\, p$, nous pouvons démontrer d'une manière analogue à [15] le résultat.

La condition inf-sup discrète nous permet de démontrer d'une manière classique le

Théorème 4.1 *Il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $0 < h < h_0$, le problème discret* (20) *est inversible. De plus, il existe une constante C indépendante de h et de $\mathbf{E}$ tel que*

$$||\mathbf{E} - \mathbf{E}_h||_{H(\mathrm{rot},\Omega^d)} \leq C \inf_{\mathbf{F}_h \in \mathcal{X}_h} ||\mathbf{E} - \mathbf{F}_h||_{H(\mathrm{rot},\Omega^d)}. \tag{22}$$

Démonstration. Nous écrivons $\mathbf{E} = (\mathbf{u}, p, \varphi, \psi), \mathbf{E}_h = (\mathbf{u}_h^e, p_h^e, \varphi_h^e, \psi_h^e)$ et $\mathbf{F}_h = (\mathbf{u}_h^f, p_h^f, \varphi_h^f, \psi_h^f)$ où $\mathbf{F}_h$ est un élément de $\mathcal{X}_h$. Nous avons

$$\begin{aligned}
||\mathbf{E}_h - \mathbf{F}_h||_{H(\mathrm{rot},\Omega^d)} &\leq C\, |||(\mathbf{u}_h^e - \mathbf{u}_h^f, p_h^e - p_h^f, \varphi_h^e - \varphi_h^f, \psi_h^e - \psi_h^f)|||, \\
&\leq C' \sup_{(\mathbf{u}_h^t, p_h^t, \varphi_h^t, \psi_h^t) \in \mathcal{X}_h \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{A}((\mathbf{u}_h^e - \mathbf{u}_h^f, p_h^e - p_h^f, \varphi_h^e - \varphi_h^f, \psi_h^e - \psi_h^f), (\mathbf{u}_h^t, p_h^t, \varphi_h^t, \psi_h^t))|}{|||(\mathbf{u}_h^t, p_h^t, \varphi_h^t, \psi_h^t)|||}, \\
&\leq C' \sup_{(\mathbf{u}_h^t, p_h^t, \varphi_h^t, \psi_h^t) \in \mathcal{X}_h \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{A}((\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^f, p_h - p_h^f, \varphi_h - \varphi_h^f, \psi_h - \psi_h^f), (\mathbf{u}_h^t, p_h^t, \varphi_h^t, \psi_h^t))|}{|||(\mathbf{u}_h^t, p_h^t, \varphi_h^t, \psi_h^t))|||}, \\
&\leq C''\, |||(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^f, p_h - p_h^f, \varphi_h - \varphi_h^f, \psi_h - \psi_h^f)|||, \\
&\leq C'''\, ||\mathbf{E} - \mathbf{F}_h||_{H(\mathrm{rot},\Omega^d)}.
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire

$$||\mathbf{E} - \mathbf{E}_h||_{H(\mathrm{rot},\Omega^d)} \leq ||\mathbf{E}_h - \mathbf{F}_h||_{H(\mathrm{rot},\Omega^d)} + ||\mathbf{E} - \mathbf{F}_h||_{H(\mathrm{rot},\Omega^d)}$$

permet de conclure.

La régularité H^2 de $\mathbf{E}$ dans Ω^d qui découle des résultats de [5] nous permet d'avoir enfin d'une manière tout à fait classique l'estimation optimale d'erreur suivante:

Corollaire 4.1 *Il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $0 < h < h_0$, nous avons:*

$$||\mathbf{E} - \mathbf{E}_h||_{H(\mathrm{rot},\Omega^d)} \leq C\, h\, ||\mathbf{E}||_{(H^2(\Omega^d))^3}. \tag{23}$$

Pour conclure ce travail, nous faisons les deux remarques suivantes:

Remarque 4.1 *La décomposition $\mathbf{E}_h = \mathbf{u}_h + \mathbf{grad}\, p_h$ est implicite. En fait, en utilisant le fait que les gradients des éléments finis P_1-continus (utilisés pour discrétiser la variable p qui est dans H^1) sont dans l'espace $\mathbb{H}_h$ (voir [15]). La situation est différente pour l'inconnue* $\mathbf{j}$. *Nous devrons discrétiser les fonctions φ et ψ.*

Remarque 4.2 *Pour discrétiser* ρ *dans la formulation* (19) *nous pouvons utiliser des éléments constants par élément. Ce qui est moins coûteux que le calcul de la fonction* $\varphi \in H^{3/2}(\Gamma^d)$ *(dans* (14)*) qui nécessite des éléments finis de classe* $\mathcal{C}^1$ *et donc des bases polynômiales de haut degré. Cependant, le calcul de* $\mathbf{j}$ *dans la formulation* (19) *à l'aide d'une famille d'éléments finis mixtes est plus coûteux que le calcul de la fonction scalaire* $\psi \in H^{1/2}(\Gamma^d)$ *dans la formulation* (14)*. L'existence d'une famille* V_h *d'éléments finis de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que l'opérateur de Laplace-Beltrami* Δ_{Γ^d} *de* V_h *dans les éléments constants par élément soit surjectif (construite par exemple à partir de l'élément d'Argyris) nous permet de faire le lien entre le calcul numérique de* φ *et celui de* ρ*. Il est enfin à noter que les propriétés de coercivité de la formulation* (19) *nous assure une bonne approximation stable de l'inconnue* $\mathbf{j}$*. D'ailleurs, c'est cette dernière approximation éléments finis qui a été programmée par Levillain dans sa thèse [18].*

Références

[1] H. Ammari et J. C. Nédélec, Propagation d'ondes électromagnétiques à basses fréquences, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I,* **325** (1997), 797-802.

[2] H. Ammari et J. C. Nédélec, Time-harmonic electromagnetic fields in chiral media, "Modern Mathematical Methods in Diffraction Theory and its Applications", *Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik,* **42** (1997).

[3] H. Ammari et J. C. Nédélec, Small chirality behavior of solutions to electromagnetic scattering problems in chiral media, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **21** (1998).

[4] H. Ammari et J. C. Nédélec, Time-harmonic electromagnetic fields in thin chiral curved layers, *SIAM J. Math. Anal.,* **29 (2)** (1998).

[5] H. Ammari et J. C. Nédélec, Numerical analysis of a transmission problem for the time harmonic Maxwell equations by a boundary element method, à paraître.

[6] H. Ammari et J. C. Nédélec, Low-frequency scattering, à paraître.

[7] H. Ammari, C. Latiri-Grouz, et J. C. Nédélec, Approximation de Leontovich pour les équations de Maxwell à coefficients variables: un prob-

lème de perturbation singulière, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I,* **325** (1997), 677-681.

[8] H. Ammari, M. Laouadi et J. C. Nédélec, Low frequency behavior of solutions to electromagnetic scattering problems in chiral media, *SIAM J. Appl. Math.,* **57** (1998).

[9] A. Bendali, Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations by a boundary finite element, Part I: the continuous problem, *Math. Comp.*, **43** (1984), 29-46.

[10] A. Bendali et L. Halpern, Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell dans le vide en dimension 3, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **307** (1988), 1011-1013.

[11] D. Colton et R. Kress, Time harmonic electromagnetic waves in inhomogeneous medium, *Proc. Royal Soc. Edinburgh,* **116 A** (1990), 279-293.

[12] M. Costabel et E. P. Stephan, Strongly elliptic boundary integral equations for electromagnetic transmission problems, *Proc. Royal Soc. Edinburgh,* **109 A** (1988), 271-296.

[13] M. Costabel et E. P. Stephan, Coupling of finite and boundary element methods for an elastoplastic interface problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **27** (1990), 1212-1226.

[14] C. Johnson et J. C. Nédélec, On the coupling of boundary integral and finite element methods, *Math. Comp.*, **35** (1980), 1063-1079.

[15] A. Kirsch et P. Monk, A Finite element /spectral method for approximating the time-harmonic Maxwell system in $\mathbf{R}^3$, *SIAM J. Appl. Math.,* **55** (1995), 1324-1344.

[16] A. de La Bourdonnaye, Décomposition de $TH_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega_2)$ et nature de l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème extérieur de l'électromagnétisme, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I,* **316** (1993), 369-372.

[17] A. de La Bourdonnaye, Some formulations coupling finite element and integral equation method for Helmholtz equation and electromagnetism, *Numer. Math.,* **69** (1995) 257-268.

[18] V. Levillain, Couplage éléments finis -équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell dans un milieu hétérogène, Thèse, Ecole Polytechnique, 1991.

[19] P. A. Martin et P. Ola, Boundary integral equations for the scattering of electromagnetic waves by a homogeneous dielectric obstacle, *Proc. Royal Soc. Edinburgh,* **123 A** (1993), 185-208.

[20] J. C. Nédélec, New trends in the use and analysis of integral equations, Proc. of Symposia in Applied Mathematics, **48** (1994), 151-175.

[21] J. C. Nédélec, Ondes acoustiques et électromagnétiques. Equations intégrales, Ecole Polytechnique, Edition 1996.