Couplage Equations de Maxwell - Potentiels Retardés pour les Milieux Hétérogènes (Suite)

Toufic ABBOUD*† Toni SAYAH †

Abstract

We are interested in the coupling of volumic Maxwell's equations and boundary integral equations for locally heterogeneous media in $\mathbb{R}^3$. We present two different variational formulations. Coerciveness properties are proven. That leads to existence, uniqueness and stability results. Finally, we discuss the practical influence of interior eigenvalues on the results.

1 Introduction

Les méthodes de résolution du problème de diffraction d'une onde électromagnétique intstationnaire par un obstacle fermé sont nombreuses. Parmi les plus intéressantes, nous citons la méthode des équations intégrales sous la forme variationnelle espace-temps. D'abord, cette méthode a été étudiée par A. Bamberger et T. Ha-Duong [4], pour résoudre le problème de diffraction d'onde acoustique. Plusieurs auteurs ont par la suite utilisé cette méthode pour résoudre différents problèmes d'ondes. Nous citons les travaux de Y. Ding [7] pour les ondes acoustiques, de E. Bécache [5] pour les ondes élastiques. A. Pujols [6] a suivi la même démarche et a effectué une expérimentation numérique en dimension 2, pour résoudre le problème de diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle parfaitement conducteur. I. Terrasse [14] a poursuivi les travaux en 3D toujours pour un obstacle parfaitement conducteur. Elle a introduit de nouveaux espaces fonctionnels qui ont permis d'avoir des résultats optimaux de regularité. Elle a présenté des résultats théoriques et umériques 3D. En 1995, V. Lange [9] a traité le problème de diffraction d'onde par un obstacle dissipatif tridimensionnel. Elle s'est servie des espaces fonctionnels définis par [14] pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Ensuite, elle a présenté un schéma numérique constructif inconditionnellement stable.

Pour un obstacle présentant une partie hétérogène, la méthode des potentiels retardés ne peut plus être utilisée tel quel. Une autre façons de résoudre le problème est de coupler

*Centre de Mathématiques Appliquées - CNRS UMR 7641 Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

†IMACS - Ingénierie Mathématique et Calcul Scientifique - École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

les formules de représentation intégrale sur la surface en contact avec l'extérieur, avec des calculs à l'intérieur du domaine délimité par cette surface. Elle a d'abord été introduite dans le cas du Laplacien par Johnson et Nédélec [10]. Ces travaux ont été repris par Costabel et Stephan [8] qui ont exhibé une formulation symétrique qui a de meilleures propriétés numériques. Vincent Levillain [12], a traité, dans le domaine fréquentiel, le problème de diffraction d'onde par un obstacle fermé parfaitement conducteur recouvert d'une couche diélectrique. Il a entre autre traité un schéma non-symétrique et deux autres symétriques. Il a démontré l'existence et l'unicité de la solution dans le cas où les caractéristiques électromagnétiques du domaine diélectrique ε, μ sont des complexes à parties imaginaires strictement positives bornées. V. Lubet [11] a développé une méthode de couplage potentiels retardés - éléments finis pour résoudre le problème de diffraction d'une onde acoustique par un obstacle hétérogène. Le problème du couplage temporel pour les équations de Maxwell est parallèlement étudié par A. Bachelot, L. Bounhoure et A. Pujols [2]

Dans le rapport [1], nous avons traité le problème du couplage équations de Maxwell - potentiels retardés pour les milieux hétérogènes de caractéristiques électromagnétiques ε, μ variables. Nous avons énoncé un théorème qui a introduit les potentiels retardés et qui a permis de représenter, à l'extérieur de l'obstacle, les champs électromagnétiques en fonction des courants surfaciques. Ces courants ont servi dans un deuxième temps de conditions aux limites à un problème dans le milieu hétérogène. La continuité tangentielle des champs à travers l'interface (milieu hétérogème - mileu extérieur) nous a permis de coupler les deux problèmes. Deux formulations variationnelles symétriques ont été proposées. Nous avons présenté un premier schéma numérique qui semble inconditionnellement stable mais pas très précis. Une modification du schéma temporel "à la Newmark" nous a permis d'obtenir de meilleurs résultats. Enfin, nous avons comparé la SER numérique d'une sphère conductrice recouverte d'une couche de diélectrique avec la solution de Mie.

Dans le présent rapport, nous reprenons le même problème introduit dans [1]. Nous reprenons le couplage des équations de Maxwell avec les potentiels retardés. Nous rappelons ensuite les cadres fonctionnels fréquentiel et temporel introduits par Isabelle Terrasse [14]. Ces cadres fonctionnels nous permettent de passer du problème temporel à un problème fréquentiel équivalent où la fréquence ω est complexe avec une partie imaginaire strictement positive. Grâce à des résultats de coercivité, nous démontrons, pour les deux formulations étudiées, l'existence et l'unicité de la solution ainsi que sa continuité, dans les espaces introduits auparavant, en fonction des données. Les résultats théoriques sont ensuite rapportés au domaine temporel à l'aide de la transformation de Fourier-Laplace inverse, grâce au théorème de Paley-Wiener. Les deux formulations étudiées dans ce rapport, sont l'équivalent temporel des deux formulations symétriques introduites par V. Levillain [12] dans le cas fréquentiel. Or, il a montré que dans la pratique, on est géné par les modes propres du problème intérieur pour lesquels on n'a pas existence et unicité. Nous faisons quelques commentaires sur ce qu'il en est dans le cas temporel.

2 Présentation du problème

Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^3$ et nous considérons un obstacle borné régulier constitué d'un conducteur parfait noté Ω^c de frontière $\Gamma^c = \partial\Omega^c$ et/ou d'un diélectrique hétérogène noté Ω. L'ouvert extérieur Ω^{ext} est le complémentaire de l'obstacle $\overline{\Omega^c \cup \Omega}$ dans $\mathbb{R}^3$, $\Gamma = \partial\Omega^{ext}$ est sa frontière. Ω^1 est le complémentaire du conducteur, $\Omega^1 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^c}$. Pour la simplicité de l'exposé, nous supposons le milieu non-dispersif. La permittivité électrique $\varepsilon(x)$ et la perméabilité magnétique $\mu(x)$ sont des fonctions dans L^∞ vérifiant : $\varepsilon(x) \geq \varepsilon_{min} > 0$ et $\mu(x) \geq \mu_{min} > 0$ pour $x \in \Omega$, $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 > 0$ et $\mu(x) = \mu_0 > 0$ pour $x \in \Omega^{ext}$. La normale unitaire $\vec{n}$ est orientée vers l'intérieur de Ω^{ext} sur Γ et vers l'extérieur du conducteur sur Γ^c.

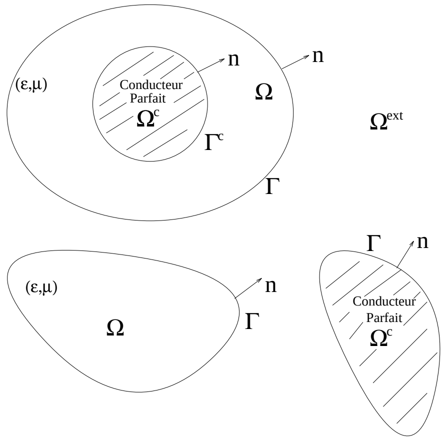

Figure 1: *L'obstacle*

Résumé de la situation :

$$
\begin{array}{llllll}
\Omega^c & : & \text{conducteur parfait} & \rightarrow & \Gamma^c & = \partial\Omega^c \\
\Omega & : & \text{diélectrique} & \rightarrow & \Gamma^d & = \partial\Omega \setminus \Gamma^c \\
\Omega^{ext} & : & \text{extérieur} & \rightarrow & \Gamma & = \partial\Omega^{ext} \\
\Omega^1 & : & \text{extérieur du conducteur} & \rightarrow & \Gamma^c & = \partial\Omega^1
\end{array}
$$

Cet obstacle est éclairé par une onde incidente transitoire. On note $\vec{E}^i$ et $\vec{H}^i$ les champs électrique et magnétique incidents qui vérifient les équations de Maxwell :

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{array}{rcll}
\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}^i}{\partial t}(t,x) + r\vec{o}t\vec{E}^i(t,x) & = & \vec{0} & \\
\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}^i}{\partial t}(t,x) - r\vec{o}t\vec{H}^i(t,x) & = & -\vec{j}_s(t,x) & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\
div\ \varepsilon_0 \vec{E}^i(t,x) & = & \rho_s & \\
div\ \mu_0 \vec{H}^i(t,x) & = & 0 &
\end{array}
\right.
$$

où $\vec{j}_s$ et ρ_s sont les courants et charges sources à support dans le milieu extérieur. Ils vérifient l'équation de continuité (ou équation de conservation de la charge) :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \rho_s}{\partial t}(t,x) + div\vec{j}_s(t,x) = 0 \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \ \mathbb{R}^3 \tag{2}$$

On suppose qu'au temps $t = 0$, l'onde incidente n'a pas encore atteint l'obstacle :

$$\vec{E}^i(t,x) = \vec{0} \quad \text{pour } \ (t,x) \in \mathbb{R}_- \times (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^{ext}}) \tag{3}$$

idem pour $\vec{H}^i$.

On note $\vec{E}^d$ et $\vec{H}^d$ les champs diffractés et $\vec{E}$ et $\vec{H}$ les champs totaux :

$$\vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^d \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^d \tag{4}$$

Le déplacement électrique et l'induction magnétique sont donnés par :

$$\vec{D}(t,x) = \varepsilon(x)\vec{E}(t,x) \quad \text{et} \quad \vec{B}(t,x) = \mu(x)\vec{H}(t,x) \tag{5}$$

Le champ électromagnétique total vérifie les équations de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t,x) + r\vec{o}t\vec{E}(t,x) & = & \vec{0} \\ \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}(t,x) - r\vec{o}t\vec{H}(t,x) & = & -\vec{j}_s(t,x) \\ div\vec{D}(t,x) & = & \rho_s \\ div\vec{B}(t,x) & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega^1 \tag{6}$$

avec

$$\vec{E}^d(t,x) = \vec{0} \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_- \times \Omega^1 \tag{7}$$

idem pour $\vec{D}^d(t,x)$, $\vec{H}^d(t,x)$ et $\vec{B}^d(t,x)$. Ceci exprime la causalité.

Nous avons également les conditions aux limites suivantes sur le conducteur :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x) & = & \vec{0} \\ \vec{H}(t,x).\vec{n}(x) & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{pour } \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^c. \tag{8}$$

Les équations (1), ..., (8) définissent notre problème. Ce problème, noté (P), admet une solution unique dans les espaces *ad hoc* comme on le verra dans la suite.

Les champs vérifient également les conditions de transmissions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [\vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x)] & = & \vec{0} \\ [\vec{H}(t,x) \wedge \vec{n}(x)] & = & \vec{0} \\ [\varepsilon(x)\vec{E}(t,x).\vec{n}(x)] & = & 0 \\ [\mu(x)\vec{H}(t,x).\vec{n}(x)] & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{pour } \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^d. \tag{9}$$

où [.] désigne le saut à travers la frontière

$$[\Phi] = \Phi^{int} - \Phi^{ext}$$

Φ^{int} et Φ^{ext} étant les traces intérieure et extérieure respectivement. Ces conditions sont une conséquence directe des équations (5) et (6).

3 Couplage

Dans ce paragraphe, nous couplons les équations de Maxwell dans le milieu hétérogène avec les représentations intégrales dans le milieu extérieur. Les équations de Maxwell dans Ω^{ext} seront remplacées par des représentations en fonction des charges et des courants surfaciques sur Γ.

Le problème (P) est du premier ordre. Il est équivalent à

$$(P1)\left\{\begin{array}{rcll}
\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t,x) + \dfrac{1}{\mu(x)} r\vec{o}t \vec{E}(t,x) & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times (\Omega \cup \Omega^{ext}) \\
\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x) - \dfrac{1}{\varepsilon(x)} r\vec{o}t \vec{H}(t,x) & = & -\dfrac{\vec{j}_s(t,x)}{\varepsilon(x)} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times (\Omega \cup \Omega^{ext}) \\
[\vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x)] & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^d \\
[\vec{H}(t,x) \wedge \vec{n}(x)] & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^d \\
\vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x) & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^c \\
\vec{H}(t,x).\vec{n}(x) & = & 0 & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^c \\
\vec{E}(t,x) & = & \vec{E}^i(t,x) & \text{pour } t \leq 0 \\
\multicolumn{4}{l}{\vec{E}^i(t,x) \text{ est donné par (1), (2), (3)}}
\end{array}\right.$$

Théorème 3.1 *Le problème $(P1)$ est équivalent au problème suivant*

$$(Pe)\left\{\begin{array}{rcll}
\varepsilon(x)\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(t,x) + r\vec{o}t \dfrac{1}{\mu(x)} r\vec{o}t \vec{E}(t,x) & = & -\dfrac{\partial \vec{j}_s}{\partial t}(t,x) & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times (\Omega \cup \Omega^{ext}) \\
[\vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x)] & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^d \\
[\dfrac{1}{\mu(x)} r\vec{o}t \vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x)] & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^d \\
\vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x) & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^c \\
\vec{E}(t,x) & = & \vec{E}^i(t,x) & \text{pour } t \leq 0 \\
\multicolumn{4}{l}{\vec{E}^i(t,x) \text{ est donné par (1), (2), (3)}}
\end{array}\right.$$

Preuve : Soit $(\vec{E}, \vec{H})$ un couple qui vérifie le système $(P1)$. Une simple manipulation sur les deux premières équations de $(P1)$ montre que le champ $\vec{E}$ vérifie (Pe).
Inversement, soit $\vec{E}$ un champ qui vérifie (Pe). Nous associons un champ $\vec{H}$ qui vérifie les relations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{H}(t,x) = \vec{H}^i(t,x) & \text{pour tout } t \leq 0 \\ \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t,x) = -\dfrac{1}{\mu(x)} r\vec{o}t\vec{E}(t,x) & \end{array} \right.$$

On voit directement que le couple $(\vec{E}, \vec{H})$ vérifie l'équation

$$r\vec{o}t\vec{H}(t,x) - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x) = \vec{j}_s(t,x).$$

D'autre part, comme $\vec{E} \times \vec{n} = \vec{0} \implies r\vec{o}t\vec{E}.\vec{n} = \vec{0} \implies \vec{H}.\vec{n} = 0$.
D'où l'équivalence des deux problème $(P1)$ et (Pe). Le problème (Pe) est un problème de second ordre en $\vec{E}$ seul. $\square$

Théorème 3.2 *le problème $(P1)$ est équivalent au problème*

$$
(\mathrm{P2})\left\{
\begin{array}{l}
\begin{array}{rcll}
\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t,x)+\dfrac{1}{\mu(x)}r\vec{o}t\vec{E}(t,x) &=& \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega \\
\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x)-\dfrac{1}{\varepsilon(x)}r\vec{o}t\vec{H}(t,x) &=& \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega
\end{array}\\
\begin{array}{rcl}
\vec{E}(t,x) &=& \vec{E}^i(t,x)-gr\vec{a}d_x\displaystyle\int_\Gamma \frac{\rho_E(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|}d\Gamma_y \\
&& -\mu_0\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|}d\Gamma_y - r\vec{o}t\int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|}d\Gamma_y \\
\vec{H}(t,x) &=& \vec{H}^i(t,x)-gr\vec{a}d_x\displaystyle\int_\Gamma \frac{\rho_M(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|}d\Gamma_y \\
&& -\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|}d\Gamma_y + r\vec{o}t\int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|}d\Gamma_y
\end{array}\\
\text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega^{ext}\\
\\
\begin{array}{rcll}
[\vec{E}(t,x)\wedge\vec{n}(x)] &=& \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma^d \\
[\vec{H}(t,x)\wedge\vec{n}(x)] &=& \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma^d \\
\vec{E}(t,x)\wedge\vec{n}(x) &=& \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma^c \\
\vec{H}(t,x).\vec{n}(x) &=& 0 & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma^c
\end{array}\\
\\
\begin{array}{rcll}
\vec{j}(t,x) &=& -\vec{H}(t,x)\wedge\vec{n}(x) & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma \\
\vec{m}(t,x) &=& -\vec{n}(x)\wedge\vec{E}(t,x) & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma
\end{array}\\
\\
\left.\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial\rho_E}{\partial t}(t,x)+div\,\vec{j}(t,x) &=& 0 \\
\dfrac{\partial\rho_M}{\partial t}(t,x)+div\,\vec{m}(t,x) &=& 0
\end{array}\right. \quad \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\ \Gamma\\
\\
\left.\begin{array}{rcl}
\rho_M(t,x) &=& \rho_E(t,x)=0 \\
\vec{j}(t,x) &=& \vec{m}(t,x)=\vec{0} \\
\vec{E}(t,x) &=& \vec{H}(t,x)=\vec{0}
\end{array}\right. \quad \text{pour } t\leq 0\\
\\
+\ \textit{les conditions}\ (1)\ \text{et}\ (3)
\end{array}
\right.
$$

Preuve : Soit $(\vec{E},\vec{H})$ un couple qui vérifie le problème $(P1)$. D'après le théorème de représentation (voir [1]), nous remplaçons les équations de Maxwell dans le domaine extérieur par des représentations intégrales en fonction des charges et des courants surfaciques. Ainsi, on trouve que $(\vec{E},\vec{H})$ vérifient le problème $(P2)$. Inversement, si le couple $(\vec{E},\vec{H})$ vérifie le problème $(P2)$, il vérifie le problème (P1) d'après les propriétés du noyau de Green. $\square$

Théorème 3.3 *Le problème (P2) est équivalent au problème suivant*

$$
(P3)\left\{
\begin{array}{l}
\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t,x)+\dfrac{1}{\mu(x)}r\vec{o}t\vec{E}(t,x) & = & \vec{0} \qquad \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega \\
\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x)-\dfrac{1}{\varepsilon(x)}r\vec{o}t\vec{H}(t,x) & = & \vec{0} \qquad \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega
\end{array}
\\[2em]
\begin{array}{rcl}
\dfrac{\vec{E}_\Gamma(t,x)}{2} & = & \vec{E}^i(t,x)-\vec{\nabla}_\Gamma\displaystyle\int_\Gamma\frac{\rho_E(t-r/c,y)}{4\pi r}d\Gamma_y-\mu_0\Pi_x\frac{\partial}{\partial t}\int_\Gamma\frac{\vec{j}(t-r/c,y)}{4\pi r}d\Gamma_y \\
 & & -\Pi_x\displaystyle\int_\Gamma\nabla_x\left(\frac{1}{r}\right)\wedge\left(\vec{m}(t-r/c,y)+\frac{r}{c}\frac{\partial\vec{m}}{\partial t}(t-r/c,y)\right)d\Gamma_y \\
\dfrac{\vec{H}_\Gamma(t,x)}{2} & = & \vec{H}^i(t,x)-\vec{\nabla}_\Gamma\displaystyle\int_\Gamma\frac{\rho_M(t-r/c,y)}{4\pi r}d\Gamma_y-\varepsilon_0\Pi_x\frac{\partial}{\partial t}\int_\Gamma\frac{\vec{m}(t-r/c,y)}{4\pi r}d\Gamma_y \\
 & & +\Pi_x\displaystyle\int_\Gamma\nabla_x\left(\frac{1}{r}\right)\wedge\left(\vec{j}(t-r/c,y)+\frac{r}{c}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t-r/c,y)\right)d\Gamma_y
\end{array}
\\
\text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma,\ r=|x-y|
\\[2em]
\begin{array}{rcl}
\vec{E}(t,x)\wedge\vec{n}(x) & = & \vec{0} \qquad \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma^c \\
\vec{H}(t,x).\vec{n}(x) & = & 0 \qquad \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma^c
\end{array}
\\[1.5em]
\begin{array}{rcl}
\vec{j}(t,x) & = & -\vec{H}(t,x)\wedge\vec{n}(x) \qquad \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma \\
\vec{m}(t,x) & = & -\vec{n}(x)\wedge\vec{E}(t,x) \qquad \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma
\end{array}
\\[1.5em]
\left.\begin{array}{rcl}
\rho_M(t,x) & = & \rho_E(t,x)=0 \\
\vec{j}(t,x) & = & \vec{m}(t,x)=\vec{0} \\
\vec{E}(t,x) & = & \vec{H}(t,x)=\vec{0}
\end{array}\right. \qquad \text{pour } t\leq 0
\\[1.5em]
+\ \textit{les conditions } (1) \text{ et } (3)
\end{array}
\right.
$$

Preuve : Soit $(\vec{E},\vec{H})$ un couple qui vérifie le problème $(P2)$. En passant aux traces tangentielles, il est évident d'après la théorie du potentiel (voir [1], page 7) qu'il vérifie le problème $(P3)$. Inversement, soit $(\vec{E},\vec{H})$ un couple qui vérifie le problème $(P3)$. On définit $\vec{E}$ et $\vec{H}$ à l'extérieur par les formules de représentation de $(P2)$ avec les traces venant du problème $(P3)$. Alors

$$
\begin{array}{ll}
[\vec{E}(t,x)\times\vec{n}]=\vec{0} & \text{sur } \Gamma^d \\
[\vec{H}(t,x)\times\vec{n}]=\vec{0} & \text{sur } \Gamma^d
\end{array}
$$

D'où la démonstration du théorème. □

4 Cadre fonctionnel

Tout d'abord, on signale que Bamberger-Ha Duong [4] ont indroduit des espaces fonctionnels couplant espace-temps. Dans sa thèse, I. Terrasse [14] a introduit d'autres espaces fonctionnels qui ont permis d'avoir des résultats optimaux de régularité. Dans cette section, nous allons rappeler le cadre fonctionnel introduit par I. Terrasse afin de définir les espaces de travail.

4.1 Cadre fonctionnel en fréquence

Nous notons Φ l'espace Ω ou Γ. De même, $\|.\|_{H^r(\Phi)}$ designe la norme usuelle dans $H^r(\Phi)$. Pour tout ω complexe non nulle et pour toute distribution $f \in D^{'}(\Phi)$, nous notons f^ω la distribution dilatée définie par :

$$\forall y \in (|\omega|\Phi) \quad f^\omega(y) = \frac{1}{|\omega|} f(\frac{y}{|\omega|})$$

Définition 4.1 *Pour tout ω complexe non nul, $\forall\ r \ \in \ \mathbb{R}$, nous définissons une norme indexée équivalente par :*
dans le volume Ω :

$$\forall f \in H^r(\Omega) \quad \|f\|^2_{r,\omega,\Omega} = \frac{1}{|\omega|}\|f^\omega\|^2_{H^r(|\omega|\Omega)}$$

Sur la surface Γ

$$\forall f \in H^r(\Gamma) \quad \|f\|^2_{r,\omega,\Gamma} = \|f^\omega\|^2_{H^r(|\omega|\Gamma)}$$

Nous introduisons les espaces $H(div, \Omega)$ et $H(rot, \Omega)$

$$\begin{cases} H(div,\Omega) = \{\vec{u} \in L^2(\Omega)^3, div\vec{u} \in L^2(\Omega)\} \\ \textit{muni de la norme indexée suivante} \\ \|\vec{u}\|^2_{0,\omega,div_\Omega} = (\|\vec{u}\|^2_{0,\omega,\Omega} + \dfrac{1}{|\omega|^2}\|div\vec{u}\|^2_{0,\omega,\Omega}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(rot,\Omega) = \{\vec{u} \in L^2(\Omega)^3, r\vec{o}t\vec{u} \in L^2(\Omega)^3\} \\ \textit{muni de la norme indexée suivante} \\ \|\vec{u}\|^2_{0,\omega,rot_\Omega} = (\|\vec{u}\|^2_{0,\omega,\Omega} + \dfrac{1}{|\omega|^2}\|r\vec{o}t\vec{u}\|^2_{0,\omega,\Omega}) \end{cases}$$

De même, nous introduisons les espaces $TH^{-1/2}(div, \Gamma)$ et $TH^{-1/2}(rot, \Gamma)$

$$\begin{cases} TH^{-1/2}(div,\Gamma) = \{\vec{g} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3,\ \vec{g}.\vec{n} = 0,\ div_\Gamma\vec{g} \in H^{-1/2}(\Gamma)\} \\ \textit{muni de la norme indexée suivante} \\ \|\vec{g}\|^2_{-\frac{1}{2},\omega,div_\Gamma} = (\|\vec{g}\|^2_{-\frac{1}{2},\omega,\Gamma} + \dfrac{1}{|\omega|^2}\|div\vec{g}\|^2_{-\frac{1}{2},\omega,\Gamma}) \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} TH^{-1/2}(rot,\Gamma) = \{\vec{g} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3,\ \vec{g}.\vec{n} = 0,\ rot_\Gamma \vec{g} \in H^{-1/2}(\Gamma)\} \\ muni\ de\ la\ norme\ indexée\ suivante \\ \|\vec{g}\|^2_{-\frac{1}{2},\omega,rot_\Gamma} = (\|\vec{g}\|^2_{-\frac{1}{2},\omega,\Gamma} + \dfrac{1}{|\omega|^2}\|rot\vec{g}\|^2_{-\frac{1}{2},\omega,\Gamma}) \end{array}\right.$$

Nous avons les théorèmes suivants de trace et de relèvement :

Théorème 4.2 *Nous notons γ_τ l'application linéaire définie par :*

$$\forall \vec{u} \in (H^1(\Omega))^3, \quad \gamma_\tau \vec{u} = -\vec{n} \wedge \vec{u}_{|\Gamma}$$

Alors γ_τ se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $H(rot,\Omega)$ dans $TH^{-1/2}(div,\Gamma)$ munis des normes indexées :

$$\forall \vec{u} \in H(rot,\Omega), \ \ \|\gamma_\tau \vec{u}\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_\Gamma} \leq C(\Gamma)|\omega|^{\frac{1}{2}}\|\vec{u}\|_{0,\omega,rot_\Omega}$$

Réciproquement, pour tout $\vec{f} \in TH^{-1/2}(div,\Gamma)$, il existe un relèvement $\vec{u} \in H(rot,\Omega)$ tel que $\vec{f} = \gamma_\tau \vec{u}$ et

$$\|\vec{u}\|_{0,\omega,rot_\Omega} \leq C(\Gamma)|\omega|^{-\frac{1}{2}}\|\vec{f}\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_\Gamma}$$

Preuve : voir [14] (p.123 et 124.)

Théorème 4.3 *Nous notons γ_t l'application linéaire définie par :*

$$\forall \vec{u} \in (H^1(\Omega))^3, \quad \gamma_t \vec{u} = -\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{u}_{|\Gamma})$$

Alors γ_t se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $H(rot,\Omega)$ dans $TH^{-1/2}(rot,\Gamma)$ munis des normes indexées :

$$\forall \vec{u} \in H(rot,\Omega), \ \ \|\gamma_t \vec{u}\|_{-\frac{1}{2},\omega,rot_\Gamma} \leq C(\Gamma)|\omega|^{\frac{1}{2}}\|\vec{u}\|_{0,\omega,rot_\Omega}$$

Réciproquement, pour tout $\vec{f} \in TH^{-1/2}(rot,\Gamma)$, il existe un relèvement $\vec{u} \in H(rot,\Omega)$ tel que $\vec{f} = \gamma_t \vec{u}$ et

$$\|\vec{u}\|_{0,\omega,rot_\Omega} \leq C(\Gamma)|\omega|^{-\frac{1}{2}}\|\vec{f}\|_{-\frac{1}{2},\omega,rot_\Gamma}$$

Preuve : voir [14] (p.124 et 125.)

4.2 Cadre fonctionnel en temps

Soit E un espace de *Hilbert*, nous notons $D'_+(E)$ l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans E, nulles pour $t < 0$, (i.e. causales); et $S'_+(E)$ les distributions tempérées de $D'_+(E)$. Pour σ_0 appartenant à $\mathbb{R}$, nous notons :

$$LT(\sigma_0, E) = \{U \in D'_+(E) \ telle\ que\ e^{\sigma_0 t} U \in S'_+(E)\}$$

nous définissons alors l'espace des fonctions Laplace transformables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E par :

$$LT(E) = \{U \in D'_+(E) \text{ telle que } \exists \sigma_0 \text{ tel que } U \in LT(\sigma_0, E)\}$$

<u>Remarque:</u> Il est clair que si $T \in LT(\sigma_0, E)$ alors $T \in LT(\sigma, E)\ \forall\ \sigma \geq \sigma_0$.

Définition 4.4 *Soit $f \in LT(E)$, nous définissons sur le demi-plan $\{\omega \in \mathbb{C},\ \Im m(\omega) \geq \sigma(f)\}$ la transformée de Fourier-Laplace de f, notée $\hat{f}$ ou Lf, de la manière suivante :*

$$\begin{cases} \hat{f}(w) = F(e^{-\sigma t} f)(\eta) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t)dt \\ \omega = \eta + i\sigma \end{cases}$$

où F désigne la transformée de Fourier en temps (non normalisée).

Pour faire la transformation inverse, nous utilisons le théorème de Paley-Wiener.

Théorème 4.5 *$\hat{f}(w)$ est la transformée de Fourier-Laplace d'une fonction $f \in LT(E)$ si et seulement si : $\exists\ C > 0,\ \sigma_0,\ \sigma_1 \geq \sigma_0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ telles que :*
(i) $\hat{f}(w)$ est holomorphe dans un demi-plan complexe $\{\ \omega \in \mathbb{C}, \Im m(\omega) \geq \sigma_0 > 0\ \}$ à valeur dans E.

(ii) $$\|\hat{f}(w)\|_E \leq C(1 + |\omega|)^k \ \text{ pour } \ \omega \in \{\omega \in \mathbb{C}, \Im m(\omega) \geq \sigma_1 > 0\}$$

Nous pourrons ainsi passer facilement d'un problème en temps à un problème en fréquence *via* cette transformation et plus particulièrement en utilisant la formule de **Parseval** :
$\forall f, g \in \{u \in LT(E) \text{ tel que } e^{-\sigma t}u \in L^2(\mathbb{R}, E)\},\ \ \forall \sigma \geq max(\sigma(f), \sigma(g))$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}dw = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} f(t)\overline{g(t)}dt$$

Nous allons maintenant rappeler des espaces fonctionnels introduits par I. Terrasse [14]. Pour $r, s \in \mathbb{R}$ nous prenons $E = H^r(\Omega)$ et nous définissons les espaces suivants :

$$\begin{cases} H^s_\sigma(\mathbb{R}^+, H^r(\Omega)) = \{f \in LT(\sigma, H^r(\Omega)), \displaystyle\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|\hat{f}\|^2_{r,\omega,\Omega} d\omega < +\infty\} \\ \text{est un espace de Hilbert muni de la norme} \\ \|f\|^2_{s,\sigma,H^r(\Omega)} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s}\|\hat{f}\|^2_{r,\omega,\Omega} d\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} H^s_\sigma(\mathbb{R}^+, H^r(div, \Omega)) = \{\vec{u} \in H^s_\sigma(\mathbb{R}^+, H^r(\Omega)^3), div\vec{u} \in H^{s-1}_\sigma(\mathbb{R}^+, H^r(\Omega)) \\ \text{est un espace de Hilbert muni de la norme} \\ \|\vec{u}\|^2_{s,\sigma,H^r(div,\Omega)} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s}\|\hat{\vec{u}}\|^2_{r,\omega,div_\Omega} d\omega = \|\vec{u}\|^2_{s,\sigma,H^r(\Omega)^3} + \|div\vec{u}\|^2_{s-1,\sigma,H^r(\Omega)} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} H^s_\sigma(\mathbb{R}^+, H^r(rot,\Omega)) = \{\vec{u} \in H^s_\sigma(\mathbb{R}^+, H^r(\Omega)^3), \vec{rot}\vec{u} \in H^{s-1}_\sigma(\mathbb{R}^+, H^r(\Omega)^3) \\ \textit{est un espace de Hilbert muni de la norme} \\ \|\vec{u}\|^2_{s,\sigma,H^r(rot,\Omega)} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s}\|\hat{\vec{u}}\|^2_{r,\omega,rot_\Omega} d\omega = \|\vec{u}\|^2_{s,\sigma,H^r(\Omega)^3} + \|\vec{rot}\vec{u}\|^2_{s-1,\sigma,H^r(\Omega)^3} \end{array}\right.$$

Pour $E = H^r(\mathit{\Gamma})$ nous avons les définitions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} H^s_\sigma(\mathbb{R}^+, H^r(\Gamma)) = \{f \in LT(\sigma, H^r(\Gamma)), \displaystyle\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s}\|\hat{f}\|^2_{r,\omega,\Gamma} d\omega < +\infty\} \\ \textit{est un espace de Hilbert muni de la norme} \\ \|f\|^2_{s,\sigma,H^r(\Gamma)} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s}\|\hat{f}\|^2_{r,\omega,\Gamma} d\omega \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} H^s_\sigma(\mathbb{R}^+, H^r(div,\Gamma)) = \{\vec{u} \in LT(\sigma, H^r(div,\Gamma)), \displaystyle\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s}\|\hat{\vec{u}}\|^2_{r,\omega,div_\Gamma} d\omega < +\infty\} \\ \textit{est un espace de Hilbert muni de la norme} \\ \|\vec{u}\|^2_{s,\sigma,H^r(div,\Gamma)} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s}\|\hat{f}\|^2_{r,\omega,div_\Gamma} d\omega \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} H^s_\sigma(\mathbb{R}^+, H^r(rot,\Gamma)) = \{\vec{u} \in LT(\sigma, H^r(rot,\Gamma)), \displaystyle\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s}\|\hat{\vec{u}}\|^2_{r,\omega,rot_\Gamma} d\omega < +\infty\} \\ \textit{est un espace de Hilbert muni de la norme} \\ \|\vec{u}\|^2_{s,\sigma,H^r(div,\Gamma)} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s}\|\hat{f}\|^2_{r,\omega,div_\Gamma} d\omega \end{array}\right.$$

Théorème 4.6 *On a les relations de dualité :* $\forall s \in \mathbb{R}$

$$(H^s_\sigma(\mathbb{R}^+, TH^r(rot,\Gamma)))' = H^{-s}_\sigma(\mathbb{R}^+, TH^{-1-r}(div,\Gamma))$$

$$(H^s_\sigma(\mathbb{R}^+, TH^r(div,\Gamma)))' = H^{-s}_\sigma(\mathbb{R}^+, TH^{-1-r}(rot,\Gamma))$$

Preuve : Voir [14] page 108.

5 Résultats en fréquence

Nous nous intéressons à résoudre les problèmes en fréquence issus de la transformée de Fourier-Laplace des problèmes $(P2)$ et $(P3)$. Dans tout ce qui suit, ω désigne un nombre complexe : $\omega = \eta + i\sigma$ avec $\sigma > 0$ fixé.

Le problème (Pe) admet le problème fréquentiel associé (Pe^ω)

$$(Pe^\omega)\left\{\begin{array}{rcll} \vec{rot}\dfrac{1}{\mu(x)}\vec{rot}\hat{\vec{E}}(x) - \omega^2\varepsilon(x)\hat{\vec{E}}(x) & = & i\omega\hat{\vec{\mathcal{J}}}(x) & \text{dans } \Omega^1 \\ \hat{\vec{E}}(x)\wedge\vec{n}(x) & = & \vec{0} & \text{sur } \Gamma^c \\ \hat{\vec{E}}^d \text{ vérifie une “condition de radiation” à l'infini} & & & \end{array}\right.$$

La condition de radiation à l'infini dans le domaine fréquentiel découle de la causalité dans le domaine temporel. En effet, la transformée de Fourier-Laplace de la solution élémentaire causale de léquation des ondes :

$$E^+(t,x) = \frac{\delta(t-r)}{4\pi r}$$

est

$$G^+ = (k,x) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

qui a un comportement exponentiellement décroissant à l'infini ($k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $\Im m(k) > 0$); Alors que la solution élementaire non-causal conduit à une fonction exponontiellement croissante à l'infini. **Nous imposons à l'onde diffractée d'être nulle à l'infini.**

Dans toute la suite de ce paragraphe, **on va noter** $\hat{\vec{E}}(x)$ **par** $\vec{\mathcal{E}}(x)$.

Le champ $\vec{\mathcal{E}}(x)$ qui vérifie le problème (Pe^ω) est le champ total

$$\vec{\mathcal{E}}(x) = \vec{\mathcal{E}}^i(x) + \vec{\mathcal{E}}^d(x)$$

On introduit la distribution $\vec{\mathcal{F}} \in \mathcal{D}'(\Omega^1)$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}} &= \vec{rot}\frac{1}{\mu}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}^i - \omega^2\varepsilon\vec{\mathcal{E}}^i + i\omega\vec{\mathcal{J}}_s \\ &= \vec{rot}(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0})\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}^i - \omega^2(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{\mathcal{E}}^i \end{aligned}$$

On remarque que le support de $\vec{\mathcal{F}}$ est inclus dans $\overline{\Omega}$. On introduit aussi

$$\vec{g}(x) = -\vec{\mathcal{E}}^i(x)\wedge\vec{n}(x) \qquad \text{sur } \Gamma^c$$

Le champ diffracté $\vec{\mathcal{E}}^d(x)$ vérifie le problème

$$(Pe_d^\omega)\begin{cases} \vec{rot}\dfrac{1}{\mu(x)}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}^d(x) - \omega^2\varepsilon(x)\vec{\mathcal{E}}^d(x) = \vec{\mathcal{F}} & \text{dans } \Omega^1 \\ \vec{\mathcal{E}}^d(x)\wedge\vec{n}(x) = \vec{g}(x) & \text{sur } \Gamma^c \\ \mathcal{E}^d \text{ est nulle à l'infini} \end{cases}$$

Théorème 5.1 *Si* $\vec{g}$ *est dans* $TH^{-1/2}(div,\Gamma^c)$ *et* $\vec{\mathcal{F}}$ *dans* $V' = (H_0(rot,\Omega^1))'$ *muni de la norme indexée*

$$\|\vec{\mathcal{F}}\| = Sup_{u\in V}\frac{\langle\vec{\mathcal{F}},\vec{u}\rangle}{\|\vec{u}\|_{0,\omega,rot}}$$

Le problème (Pe_d^ω) *admet une unique solution* $\vec{\mathcal{E}}^d\in H(rot,\Omega^1)$ *et on a*

$$\|\vec{\mathcal{E}}_d\|^2_{0,\omega,rot_{\Omega^1}} \leq \frac{C}{\sigma}\left(\frac{1}{\omega}\|\vec{\mathcal{F}}\|_{V',\omega} + |\omega|^{1/2}\|\vec{g}\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_{\Gamma^c}}\right)$$

Preuve : Dans un premier temps, nous allons démontrer l'existence de la solution du problème (Pe_d^ω).

D'après le théorème de relèvement '4.2', comme $\vec{g}\in TH^{-1/2}(div,\Gamma^c)$,

$$(10)\qquad \exists\vec{\mathcal{E}}_0\in H(rot,\Omega^1) \text{ tel que } \begin{cases} \gamma_\tau|_{\Gamma^c}(\vec{\mathcal{E}}_0) = \vec{g} \\ \|\vec{\mathcal{E}}_0\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}} \leq C(\Gamma^c)|\omega|^{-\frac{1}{2}}\|\vec{g}\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_{\Gamma^c}} \end{cases}$$

posons $\vec{\mathcal{E}}_1 = \vec{\mathcal{E}}^d - \vec{\mathcal{E}}_0$, il vérifie :

$$\begin{cases} \vec{rot}\dfrac{1}{\mu}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}_1 - \omega^2\varepsilon\vec{\mathcal{E}}_1 = -\vec{rot}\dfrac{1}{\mu}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}_0 + \omega^2\varepsilon\vec{\mathcal{E}}_0 + \vec{\mathcal{F}} & \text{dans } \Omega^1 \\ \vec{\mathcal{E}}_1\wedge\vec{n} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma^c \end{cases}$$

En multipliant par $\vec{\mathcal{E}}^t$ suffisamment régulier vérifiant $\vec{\mathcal{E}}^t\times\vec{n} = \vec{0}$, puis en intégrant dans Ω^1, on aura

$$\langle\vec{rot}\frac{1}{\mu}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}_1,\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t\rangle - \omega^2\langle\varepsilon\vec{\mathcal{E}}_1,\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t\rangle = -\langle\vec{rot}\frac{1}{\mu}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}_0,\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t\rangle + \omega^2\langle\varepsilon\vec{\mathcal{E}}_0,\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t\rangle + \langle\vec{\mathcal{F}},\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t\rangle$$

Ce qui s'écrit :

$$\int_{\Omega^1}\frac{1}{\mu(x)}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}_1(x).\vec{rot}\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x) - \omega^2\int_{\Omega^1}\varepsilon(x)\vec{\mathcal{E}}_1(x).\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x) =$$

$$-\int_{\Omega^1}\frac{1}{\mu(x)}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}_0(x).\vec{rot}\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x) + \omega^2\int_{\Omega^1}\varepsilon(x)\vec{\mathcal{E}}_0(x).\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x) + \langle\vec{\mathcal{F}}(x),\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\rangle$$

On note

$$H_0(rot,\Omega^1) = \{\vec{\mathcal{E}}\in H(rot,\Omega^1);\ \vec{\mathcal{E}}\times\vec{n} = \vec{0}\quad\text{sur } \Gamma^c\}.$$

et on pose

$$a_{\Omega^1}(\vec{\mathcal{E}}_1,\vec{\mathcal{E}}^t)=\int_{\Omega^1}\frac{1}{\mu(x)}r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}_1(x).r\vec{o}t\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)-\omega^2\int_{\Omega^1}\varepsilon(x)\vec{\mathcal{E}}_1(x).\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)$$

$$L(\vec{\mathcal{E}}^t)=-a_{\Omega^1}(\vec{\mathcal{E}}_0,\vec{\mathcal{E}}^t)+\langle\vec{\mathcal{F}}(x),\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\rangle$$

Le problème variationnel sera

$$(Q^w_{ed})\begin{cases} trouver\ \vec{\mathcal{E}}_1\in H_0(rot,\Omega^1)\ tel\ que\ \forall\vec{\mathcal{E}}^t\in H_0(rot,\Omega^1)\ on\ a\\ a_{\Omega^1}(\vec{\mathcal{E}}_1,\vec{\mathcal{E}}^t)=L(\vec{\mathcal{E}}^t)\end{cases}$$

Montrons que le problème (Q^ω_{ed}) vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

$$|a_{\Omega^1}(\vec{\mathcal{E}}_1,\vec{\mathcal{E}}^t)|\leq|\omega|^2\|\vec{\mathcal{E}}_1\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}}\|\vec{\mathcal{E}}^t\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}}$$

donc a_{Ω^1} est une application sesquilinéaire continue sur $H_0(rot,\Omega^1)\times H_0(rot,\Omega^1)$ muni de la norme indexée. L est alors une forme antilinéaire continue sur $H_0(rot,\Omega^1)$ muni de la même norme.

$$\begin{aligned}|L(\vec{\mathcal{E}}^t)| &\leq (\|\vec{\mathcal{F}}\|_{V',\omega}+|\omega|^2\|\vec{\mathcal{E}}_0\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}})\|\vec{\mathcal{E}}^t\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}}\\ &\leq (\|\vec{\mathcal{F}}\|_{V',\omega}+C(\Gamma^c)|\omega|^{3/2}\|\vec{g}\|_{-1/2,\omega,div_{\Gamma^c}})\|\vec{\mathcal{E}}^t\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}}\end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer la coercivité de a_{Ω^1}.

$$a_{\Omega^1}(\vec{\mathcal{E}}_1,-i\omega\vec{\mathcal{E}}_1)=\int_{\Omega^1}(i\bar{\omega}\frac{1}{\mu(x)}|r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}_1|^2+\omega^2\varepsilon i\bar{\omega}|\vec{\mathcal{E}}_1|^2$$

$$=\int_{\Omega^1}\frac{i\bar{\omega}}{\mu(x)}|r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}_1|^2-|\omega|^2 i\omega\varepsilon|\vec{\mathcal{E}}_1|^2$$

Comme $\omega=\eta+i\sigma\implies i\bar{\omega}=i\eta+\sigma$
on aura

$$\Re e(a_{\Omega^1}(\vec{\mathcal{E}}_1,-i\omega\vec{\mathcal{E}}_1))=\sigma\int_{\Omega^1}\frac{1}{\mu(x)}|r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}_1|^2+|\omega|^2\varepsilon|\vec{\mathcal{E}}_1|^2$$

$$\Re e(a_{\Omega^1}(\vec{\mathcal{E}}_1,-i\omega\vec{\mathcal{E}}_1))\geq C'\sigma|\omega|^2\int_{\Omega^1}\frac{1}{|\omega|^2}|r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}_1|^2+\vec{\mathcal{E}}_1|^2\geq C'\sigma|\omega|^2\|\vec{\mathcal{E}}_1\|^2_{0,\omega,rot_{\Omega^1}}$$

$$|\omega||a_{\Omega^1}(\vec{\mathcal{E}}_1,\vec{\mathcal{E}}_1)|\geq\Re e(a_{\Omega^1}(\vec{\mathcal{E}}_1,-i\omega\vec{\mathcal{E}}_1)=C'\sigma|\omega|^2\|\vec{\mathcal{E}}_1\|^2_{0,\omega,rot_{\Omega^1}}$$

d'où

$$|a_{\Omega^1}(\vec{\mathcal{E}}_1,\vec{\mathcal{E}}_1)|\geq C\sigma|\omega|\|\vec{\mathcal{E}}_1\|^2_{0,\omega,rot_{\Omega^1}}$$

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram,

$$\exists!\vec{\mathcal{E}}_1\in H_0(rot,\Omega^1)\ \ tel\ \ que\ \ a_{\Omega^1}(\vec{\mathcal{E}}_1,\vec{\mathcal{E}}^t)=L(\vec{\mathcal{E}}^t)\ \ \forall\vec{\mathcal{E}}^t\in H_0(rot,\Omega^1)$$

et on a donc

$$
\begin{aligned}
\|\vec{\mathcal{E}}_1\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}} &\leq \frac{1}{C'\sigma|\omega|}(\|\vec{\mathcal{F}}\|_{V',\omega} + C|\omega|^{3/2}\|\vec{g}\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_{\Gamma c}}) \\
&\leq \frac{C}{\sigma}(\frac{1}{|\omega|}\|\vec{\mathcal{F}}\|_{V',\omega} + |\omega|^{1/2}\|\vec{g}\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_{\Gamma c}})
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité (10) et l'inégalité triangulaire, on trouve que le champ $\vec{\mathcal{E}}^d$ vérifie :

$$
\|\vec{\mathcal{E}}^d\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}} \leq \frac{C}{\sigma}(\frac{1}{|\omega|}\|\vec{\mathcal{F}}\|_{V',\omega} + |\omega|^{1/2}\|\vec{g}\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_{\Gamma c}})
$$

$\square$

Remarque : *Dans le cas particulier où $\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{g}$ sont données par l'onde incidente, on a*

$$
\langle\vec{\mathcal{F}},\vec{\mathcal{E}}^t\rangle = \int_\Omega \Big(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}\Big) r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}^i \cdot r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}^t - \omega^2\Big(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{\mathcal{E}}^i \cdot \vec{\mathcal{E}}^t
$$

d'où

$$
\|\vec{\mathcal{F}}\|_{V',\omega} \leq |\omega|^2\|\vec{\mathcal{E}}^i\|_{0,\omega,rot_\Omega}
$$

et

$$
\|\vec{\mathcal{E}}^d\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}} \leq \frac{C}{\sigma}(|\omega|\|\vec{\mathcal{E}}^i\|_{0,\omega,rot_\Omega} + |\omega|^{1/2}\|\gamma_\tau\vec{\mathcal{E}}^i\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_{\Gamma c}})
$$

En utilisant le théorème de trace (4.2), on obtient

$$
\|\vec{\mathcal{E}}^d\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}} \leq \frac{C}{\sigma}|\omega|\|\vec{\mathcal{E}}^i\|_{0,\omega,rot_\Omega}
$$

$\square$

En raisonnant comme au paragraphe (3.2), on démontre le théorème suivant

Théorème 5.2 *Le problème (Pe^ω) est équivalent au problème suivant*

$$
(P2^\omega)\left\{
\begin{array}{l}
\begin{array}{rcll}
-i\omega\vec{\mathcal{H}}(x) + \dfrac{1}{\mu(x)}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}(x) & = & \vec{0} & \quad \text{pour } x \in \Omega \\
i\omega\vec{\mathcal{E}}(x) + \dfrac{1}{\varepsilon(x)}\vec{rot}\vec{\mathcal{H}}(x) & = & \vec{0} & \quad \text{pour } x \in \Omega
\end{array} \\
\\
\begin{array}{rcl}
\vec{\mathcal{E}}(x) & = & \vec{\mathcal{E}}^i(x) - \dfrac{1}{i\omega\varepsilon_0}\vec{grad}_x \displaystyle\int_\Gamma G(x,y)\ div_\Gamma \vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y + i\omega\mu_0 \int_\Gamma G(x,y)\ \vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y \\
 & - & \vec{rot} \displaystyle\int_\Gamma G(x,y)\vec{\mathcal{M}}(y) d\Gamma_y \\
\vec{\mathcal{H}}(x) & = & \vec{\mathcal{H}}^i(x) - \dfrac{1}{i\omega\mu_0}\vec{grad}_x \displaystyle\int_\Gamma G(x,y)\ div_\Gamma \vec{\mathcal{M}}(y) d\Gamma_y + i\omega\varepsilon_0 \int_\Gamma G(x,y)\ \vec{\mathcal{M}}(y) d\Gamma_y \\
 & + & \vec{rot} \displaystyle\int_\Gamma G(x,y))\vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y
\end{array} \\
\text{pour } x \in \Omega^{ext}; \ \ \text{avec } r = |x-y| \ \ ; \ \ G(x,y) = \dfrac{e^{ikr}}{4\pi r} \\
\\
\begin{array}{rcll}
\vec{\mathcal{J}} & = & -\vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{n} & \quad \text{sur } \Gamma \\
\vec{\mathcal{M}} & = & -\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{E}} & \quad \text{sur } \Gamma \\
[\vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{n}] & = & \vec{0} & \quad \text{sur } \Gamma^d \\
[\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{n}] & = & \vec{0} & \quad \text{sur } \Gamma^d \\
\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{n} & = & \vec{0} & \quad \text{sur } \Gamma^c \\
\vec{\mathcal{H}}.\vec{n} & = & 0 & \quad \text{sur } \Gamma^c
\end{array}
\end{array}
\right.
$$

A l'aide de la théorie du potentiel, et comme dans le paragraphe (3.3), on peut démontrer le théorème suivant

Théorème 5.3 *Le problème $(P2^\omega)$ est équivalent au problème suivant*

$$
(P3^\omega)\left\{
\begin{array}{l}
\begin{array}{rcll}
-i\omega\vec{\mathcal{H}}(x)+\dfrac{1}{\mu(x)}r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}(x) &=& \vec{0} & \text{pour } x\in\Omega\\
i\omega\vec{\mathcal{E}}(x)+\dfrac{1}{\varepsilon(x)}r\vec{o}t\vec{\mathcal{H}}(x) &=& \vec{0} & \text{pour } x\in\Omega
\end{array}\\
\\
\begin{array}{rcl}
\dfrac{\vec{\mathcal{E}}_\Gamma(x)}{2} &=& \vec{\mathcal{E}}^i(x)-\dfrac{1}{i\omega\varepsilon_0}\nabla_\Gamma\displaystyle\int_\Gamma G(x,y)\ div_\Gamma\vec{\mathcal{J}}(y)d\Gamma_y+i\omega\mu_0\Pi_x\int_\Gamma G(x,y)\ \vec{\mathcal{J}}(y)d\Gamma_y\\
&-& \Pi_x\displaystyle\int_\Gamma\nabla_x(G(x,y))\wedge\vec{\mathcal{M}}(y)d\Gamma_y\\
\dfrac{\vec{\mathcal{H}}_\Gamma(x)}{2} &=& \vec{\mathcal{H}}^i(x)-\dfrac{1}{i\omega\mu_0}\nabla_\Gamma\displaystyle\int_\Gamma G(x,y)\ div_\Gamma\vec{\mathcal{M}}(y)d\Gamma_y+i\omega\varepsilon_0\Pi_x\int_\Gamma G(x,y)\ \vec{\mathcal{M}}(y)d\Gamma_y\\
&+& \Pi_x\displaystyle\int_\Gamma\nabla_x(G(x,y))\wedge\vec{\mathcal{J}}(y)d\Gamma_y
\end{array}\\
\text{pour } x\in\Gamma;\ \ \text{avec } r=|x-y|\ \ ;\ \ G(x,y)=\dfrac{e^{ikr}}{4\pi r}\\
\\
\begin{array}{rcll}
\vec{\mathcal{J}} &=& -\vec{\mathcal{H}}\wedge\vec{n} & \text{sur } \Gamma\\
\vec{\mathcal{M}} &=& -\vec{n}\wedge\vec{\mathcal{E}} & \text{sur } \Gamma\\
[\vec{\mathcal{H}}\wedge\vec{n}] &=& \vec{0} & \text{sur } \Gamma^d\\
[\vec{\mathcal{E}}\wedge\vec{n}] &=& \vec{0} & \text{sur } \Gamma^d\\
\vec{\mathcal{E}}\wedge\vec{n} &=& \vec{0} & \text{sur } \Gamma^c\\
\vec{\mathcal{H}}.\vec{n} &=& 0 & \text{sur } \Gamma^c
\end{array}
\end{array}\right.
$$

Soit $\vec{\mathcal{E}}(x),\vec{\mathcal{H}}(x)$ un couple qui vérifie le système $(P3^\omega)$. Nous multiplions la deuxième équation de $(P3^\omega)$ par une fonction test $\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)$ de trace tangentielle nulle sur le conducteur et nous intégrons sur Ω. Nous obtenons en se servant de la formule de Green et de la première équation du problème $(P3^\omega)$

$$
(\text{v1})\left\{
\begin{array}{l}
i\omega\displaystyle\int_\Omega\varepsilon(x)\vec{\mathcal{E}}(x).\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx+\int_\Omega\frac{1}{i\omega\mu(x)}r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}(x).r\vec{o}t\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx\\
+\displaystyle\int_\Gamma\vec{\mathcal{J}}(x).\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)d\Gamma_x=0
\end{array}\right.
$$

De la même manière, nous multiplions la deuxième équation du problème $(P3^\omega)$ par $\bar{\vec{\mathcal{H}}}^{\sqcup}(x)$, puis en se servant de la formule de Green, nous obtenons

$$
(\text{v2})\left\{
\begin{array}{l}
i\omega\displaystyle\int_\Omega\mu(x)\vec{\mathcal{H}}(x).\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)dx+\int_\Omega\frac{1}{i\omega\varepsilon(x)}r\vec{o}t\vec{\mathcal{H}}(x).r\vec{o}t\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)dx\\
+\displaystyle\int_\Gamma\vec{\mathcal{M}}(x).\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)d\Gamma_x=0
\end{array}\right.
$$

Nous couplons les équations du haut avec les représentations intégrales de $\vec{\mathcal{E}}(x)$ et $\vec{\mathcal{H}}(x)$ dans le domaine extérieur (soit la troisième et la quatrième équations du problème $(P3^\omega)$).

Tout d'abord, nous multiplions la troisième équation du problème $(P3^\omega)$ par une fonction test $\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)$ puis nous intégrons en espace sur Γ. De même nous multiplions la quatrième équation du problème $(P3^\omega)$ par une fonction test $\bar{\vec{\mathcal{M}}}^t = \bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x) \times \vec{n}$ puis nous intégrons en espace sur Γ. En écrivant

$$\vec{\mathcal{J}} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{J}} + \text{ représentation intégrale de } (\frac{\vec{\mathcal{J}}}{2})$$

et en couplant avec la formule (V1), nous pouvons facilement obtenir un premier problème variationel, soit (S^ω). Ce problème est symétrique, il fait apparaitre comme inconnus, le champ $\vec{\mathcal{E}}$ dans le volume Ω et le courant $\vec{\mathcal{J}}$ sur la surface Γ. Il est normal de choisir $\vec{\mathcal{E}}$ dans $H(rot,\Omega)$ et $\vec{\mathcal{J}}$ dans $TH^{-1/2}(div,\Gamma)$. On note

$$\begin{cases} H = H(rot,\Omega) \\ H_c = \{\vec{\mathcal{E}} \in H, \ tel\ que\ \vec{\mathcal{E}} \times \vec{n}|_{\Gamma^c} = \vec{0}\} \\ V = TH^{-1/2}(div,\Gamma)\} \end{cases}$$

On aura

$$(S^\omega)\begin{cases} pour\ tout\ \vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma, \ \ \vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma \in V', \\ chercher\ \ (\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}) \ \in H_c \times V \ \ tel\ que \\ \forall\ (\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t) \ \in H_c \times V \\ \\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_\Gamma \vec{\mathcal{E}}(x).\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)dx - \int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}G(x,y)div_\Gamma\vec{\mathcal{J}}(y)div_\Gamma\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)dxdy \\ \displaystyle -\int_{\Gamma\times\Gamma} i\omega\mu_0 G(x,y)\vec{\mathcal{J}}(y).\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)dxdy + \int_{\Gamma\times\Gamma}(\vec{\nabla}_x G(x,y)\times(\vec{\mathcal{E}}(y)\times\vec{n})).\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)dxdy \\ \displaystyle = \int_\Gamma \vec{\mathcal{E}}^i(x).\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)dx \\ \\ \displaystyle i\omega\int_\Omega \varepsilon(x)\vec{\mathcal{E}}(x).\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx + \int_\Omega\frac{1}{i\omega\mu(x)}r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}(x).r\vec{o}t\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma\vec{\mathcal{J}}(x).\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx \\ \displaystyle +\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{1}{i\omega\mu_0}G(x,y)div_\Gamma(\vec{\mathcal{E}}(x)\times\vec{n})div_\Gamma(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\ \displaystyle +\int_{\Gamma\times\Gamma} i\omega\varepsilon_0 G(x,y)(\vec{\mathcal{E}}(x)\times\vec{n}).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\ \displaystyle +\int_{\Gamma\times\Gamma}(\vec{\nabla}_x G(x,y)\times\vec{\mathcal{J}}(y)).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\ \displaystyle = -\int_\Gamma \vec{\mathcal{H}}^i(x).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dx \end{cases}$$

Maintenant, si on couple les équations (v1) et (v2), directement avec la troisième et la quatrième équations du problème (P_3^ω), on obtient la formulation (C^ω). Cette formulation est symétrique, elle fait apparaitre comme inconnus, les champs électrique et magnétiques dans le diélectrique Ω.

$$
(C^\omega)\left\{
\begin{array}{l}
\textit{pour tout } \vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma, \;\; \vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma \in V', \\
\textit{chercher } \;(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}) \;\in H_c \times H \;\; \textit{tel que} \\
\forall\;(\vec{\mathcal{E}}^t, \vec{\mathcal{H}}^t) \;\in H_c \times H \\
\\
-\dfrac{i\omega}{2}\displaystyle\int_\Omega \mu(x)\vec{\mathcal{H}}(x).\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)dx - \int_\Omega \frac{1}{2i\omega\varepsilon(x)} r\vec{o}t\vec{\mathcal{H}}(x).r\vec{o}t\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)dx \\
-\displaystyle\int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} G(x,y) div_\Gamma(\vec{\mathcal{H}}(y)\times\vec{n}) div_\Gamma(\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
-\displaystyle\int_{\Gamma\times\Gamma} i\omega\mu_0 G(x,y)(\vec{\mathcal{H}}(y)\times\vec{n}).(\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
-\displaystyle\int_{\Gamma\times\Gamma} (\vec{\nabla}_x G(x,y)\times(\vec{\mathcal{E}}(x)\times\vec{n}).(\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
= -\displaystyle\int_\Gamma \vec{\mathcal{E}}^i(x).(\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)\times\vec{n})dx \\
\\
\dfrac{i\omega}{2}\displaystyle\int_\Omega \varepsilon(x)\vec{\mathcal{E}}(x).\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx + \int_\Omega \frac{1}{2i\omega\mu(x)} r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}(x).r\vec{o}t\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx \\
+\displaystyle\int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{1}{i\omega\mu_0} G(x,y) div_\Gamma(\vec{\mathcal{E}}(x)\times\vec{n}) div_\Gamma(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
+\displaystyle\int_{\Gamma\times\Gamma} i\omega\varepsilon_0 G(x,y)(\vec{\mathcal{E}}(x)\times\vec{n}).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
-\displaystyle\int_{\Gamma\times\Gamma} (\vec{\nabla}_x G(x,y)\times(\vec{\mathcal{H}}(y)\times\vec{n})).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
= -\displaystyle\int_\Gamma \vec{\mathcal{H}}^i(x).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dx
\end{array}
\right.
$$

Définition 5.4 *Nous définissons les formes sesquilinéaires b^s_ω et b^c_ω, respectivement sur $(H_c \times V)^2$ et $(H_c \times H)^2$. De même nous définissons les deux formes continues L^s_ω et L^s_ω sur $(H_c \times V)$ et $(H_c \times H)$ de la façon suivante*

$$\left\{\begin{array}{l}
b^s_\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t)) = -\frac{1}{2}\int_\Gamma \vec{\mathcal{E}}(x).\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)dx + \int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}G(x,y)div_\Gamma\vec{\mathcal{J}}(y)div_\Gamma\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)dxdy \\
+\int_{\Gamma\times\Gamma} i\omega\mu_0 G(x,y)\vec{\mathcal{J}}(y).\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)dxdy - \int_{\Gamma\times\Gamma}(\vec{\nabla}_x G(x,y)\times(\vec{\mathcal{E}}(y)\times\vec{n})).\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)dxdy \\
+i\omega\int_\Omega \varepsilon(x)\vec{\mathcal{E}}(x).\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx + \int_\Omega \frac{1}{i\omega\mu(x)}r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}(x).r\vec{o}t\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma \vec{\mathcal{J}}(x).\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx \\
+\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{1}{i\omega\mu_0}G(x,y)div_\Gamma(\vec{\mathcal{E}}(x)\times\vec{n})div_\Gamma(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
+\int_{\Gamma\times\Gamma} i\omega\varepsilon_0 G(x,y)(\vec{\mathcal{E}}(x)\times\vec{n}).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
+\int_{\Gamma\times\Gamma}(\vec{\nabla}_x G(x,y)\times\vec{\mathcal{J}}(y)).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
b^c_\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{H}}^t)) = \frac{i\omega}{2}\int_\Omega \mu(x)\vec{\mathcal{H}}(x).\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)dx + \int_\Omega\frac{1}{2i\omega\varepsilon(x)}r\vec{o}t\vec{\mathcal{H}}(x).r\vec{o}t\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)dx \\
+\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}G(x,y)div_\Gamma(\vec{\mathcal{H}}(y)\times\vec{n})div_\Gamma(\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
+\int_{\Gamma\times\Gamma} i\omega\mu_0 G(x,y)(\vec{\mathcal{H}}(y)\times\vec{n}).(\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
+\int_{\Gamma\times\Gamma}(\vec{\nabla}_x G(x,y)\times(\vec{\mathcal{E}}(x)\times\vec{n}).(\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
+\frac{i\omega}{2}\int_\Omega \varepsilon(x)\vec{\mathcal{E}}(x).\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx + \int_\Omega\frac{1}{2i\omega\mu(x)}r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}(x).r\vec{o}t\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)dx \\
+\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{1}{i\omega\mu_0}G(x,y)div_\Gamma(\vec{\mathcal{E}}(x)\times\vec{n})div_\Gamma(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
+\int_{\Gamma\times\Gamma} i\omega\varepsilon_0 G(x,y)(\vec{\mathcal{E}}(x)\times\vec{n}).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy \\
-\int_{\Gamma\times\Gamma}(\vec{\nabla}_x G(x,y)\times(\vec{\mathcal{H}}(y)\times\vec{n})).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dxdy
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll}
L^s_\omega(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t) = & - & \int_\Gamma \vec{\mathcal{E}}^i(x).\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)dx - \int_\Gamma \vec{\mathcal{H}}^i(x).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dx \\
 & & \\
L^c_\omega(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{H}}^t) = & + & \int_\Gamma \vec{\mathcal{E}}^i(x).(\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t(x)\times\vec{n})dx - \int_\Gamma \vec{\mathcal{H}}^i(x).(\bar{\vec{\mathcal{E}}}^t(x)\times\vec{n})dx
\end{array}\right.$$

Théorème 5.5 *L'opérateur*

$$H^\omega\Phi = \Pi_\Gamma \int_\Gamma G(x,y)\vec{\Phi} + \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\omega^2}\vec{\nabla}_x \int_\Gamma G(x,y) div_\Gamma \vec{\Phi} d\Gamma$$

est continue de $TH^{-1/2}(div,\Gamma)$ *dans* $H^{-1/2}(rot,\Gamma)$ *avec*

$$\|H^\omega\Phi\|_{-\frac{1}{2},\omega,\vec{rot}_\Gamma} \leq C(\sigma,\Gamma]\|\Phi\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_\Gamma} \qquad \forall\Phi \in TH^{-1/2}(div,\Gamma)$$

Pour la démonstration voir [9]. □

Pour la suite, il est agréable de noter

$$P_1^\omega\Phi = i\omega\varepsilon_0 H^\omega\Phi$$

$$P_2^\omega\Phi = i\omega\mu_0 H^\omega\Phi$$

On a

$$\|P_1^\omega\Phi\|_{-\frac{1}{2},\omega,rot_\Gamma} \leq C(\sigma,\Gamma]|\omega|\|\Phi\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_\Gamma} \qquad \forall\Phi \in TH^{-1/2}(div,\Gamma)$$

$$\|P_2^\omega\Phi\|_{-\frac{1}{2},\omega,rot_\Gamma} \leq C(\sigma,\Gamma]|\omega|\|\Phi\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_\Gamma} \qquad \forall\Phi \in TH^{-1/2}(div,\Gamma)$$

Théorème 5.6 *L'opérateur*

$$Q^\omega\Phi = \Pi_\Gamma \int_\Gamma (\vec{\nabla}_x G(x,y) \times \vec{\Phi}) d\Gamma$$

est défini et continu de $TH^{-1/2}(div,\Gamma)$ *dans* $H^{-1/2}(rot,\Gamma)$ *avec*

$$\|(\vec{n} \times Q^\omega + I/2)\vec{\Phi}\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_\Gamma} \leq C(\sigma,\Gamma]|\omega|\|\Phi\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_\Gamma}$$

Pour la démonstration voir [9] □

Ainsi b_ω^s et b_ω^c sont des formes sesquilinéaires continues sur $(H_c \times V)^2$ et $(H_c \times H)^2$ respectivement.
Nous Introduisons la notation suivante :

$$\left\langle \Phi, \Phi^t \right\rangle_\Omega = \int_\Omega \Phi.\bar{\Phi}^t d\Omega$$

ainsi que la forme sesquilinéaire continue sur $(V \times V)^2$:

$$\begin{aligned} b_\omega^\Gamma((\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{M}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t)) = \quad & \langle P_2^\omega\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{J}}^t\rangle_\Gamma - \langle Q^\omega\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}^t\rangle_\Gamma \\ + \quad & \langle P_1^\omega\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{M}}^t\rangle_\Gamma + \langle Q^\omega\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}^t\rangle_\Gamma \end{aligned}$$

Avec ces notations, les formes sesquilinéaires b^s_ω et b^c_ω introduites plus haut s'écrivent de façon plus synthétique :

$$\begin{aligned}
b^s_\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t)) = \quad & i\omega\langle\varepsilon\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{E}}^t\rangle_\Omega + \frac{1}{i\omega}\langle\frac{1}{\mu}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}},\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}^t\rangle_\Omega \\
- \quad & \frac{1}{2}\langle\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}^t\rangle_\Gamma + \frac{1}{2}\langle\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{E}}^t\rangle_\Gamma \\
+ \quad & b^\Gamma_\omega((\vec{\mathcal{E}}\times\vec{n},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{E}}^t\times\vec{n},\vec{\mathcal{J}}^t)) \\
b^c_\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}})) = \quad + \quad & \frac{i\omega}{2}\langle\varepsilon\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{E}}\rangle_\Omega + \frac{1}{2i\omega}\langle\frac{1}{\mu}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}},\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}\rangle_\Omega \\
+ \quad & \frac{i\omega}{2}\langle\mu\vec{\mathcal{H}},\vec{\mathcal{H}}\rangle_\Omega + \frac{1}{2i\omega}\langle\frac{1}{\varepsilon}\vec{rot}\vec{\mathcal{H}},\vec{rot}\vec{\mathcal{H}}\rangle_\Omega \\
+ \quad & b^\omega_\Gamma((\vec{\mathcal{E}}\times\vec{n},\vec{n}\times\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{n},\vec{n}\times\vec{\mathcal{H}}))
\end{aligned}$$

Dans la suite, on va démontrer l'existence et l'unicité des solutions des formulations (S^ω) et (C^ω). Ceci se base sur la démonstration de la coercivité de ces deux formes sesquilinéaires. Commonçons par remarquer que les parties réelles des intégrales volumiques sont coercives. D'autre part

$$\Re e(\frac{1}{2}\langle\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{E}}\rangle_\Gamma + \frac{1}{2}\langle\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}\rangle_\Gamma) = 0$$

Il nous reste à démontrer la coercivité de la forme b^Γ_ω. C'est l'objet des deux théorèmes suivants.

Théorème 5.7 *On définit $\Omega^{int} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^{ext}}$ et on note $\Omega^t = \Omega^{int}\cup\Omega^{ext}$. Pour $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{\mathcal{J}}$ dans $TH^{-1/2}(div,\Gamma)$, le problème*

$$(Q^\omega)\begin{cases}
\vec{rot}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}} - k^2\vec{\mathcal{E}} = \vec{0} & \text{dans } \Omega^t \\
[\vec{n}\times\vec{\mathcal{E}}] = \vec{\mathcal{M}} & \text{sur } \Gamma \\
\dfrac{1}{i\omega\mu_0}[\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}\times\vec{n}] = \vec{\mathcal{J}} & \text{sur } \Gamma
\end{cases}$$

admet une unique solution $\vec{\mathcal{E}}$ dans $H(rot,\Omega^t)$ et on a

$$\|\vec{\mathcal{E}}\|_{0,\omega,rot_{\Omega^t}} \leq \frac{C}{\sigma}|\omega|^{1/2}\Big(\|\vec{\mathcal{J}}\|_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{M}}\|_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\Big)$$

Preuve : Nous allons chercher $\vec{\mathcal{E}}$ en deux étapes :
Considérons le problème suivant

$$(Q^\omega_1)\begin{cases}
\vec{rot}\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}_0 - k^2\vec{\mathcal{E}}_0 = \vec{0} & \text{dans } \Omega^t \\
[\vec{n}\times\vec{\mathcal{E}}_0] = \vec{0} & \text{sur } \Gamma \\
\dfrac{1}{i\omega\mu_0}[\vec{rot}\vec{\mathcal{E}}_0\times\vec{n}] = \vec{\mathcal{J}} & \text{sur } \Gamma
\end{cases}$$

I. Terrasse [14] (p. 44) a démontré l'existence et l'unicité de la solution $\vec{\mathcal{E}}_0$ dans $H(rot, \Omega^t)$ avec la relation

$$\|\vec{\mathcal{E}}_0\|_{0,\omega,rot_{\Omega^t}} \leq \frac{C}{\sigma}|\omega|^{1/2}\|\vec{\mathcal{J}}\|_{-1/2,\omega,div_\Gamma}$$

$\vec{\mathcal{E}}_1 = \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}_0$ vérifie

$$(Q^\omega_{2,e}) \begin{cases} r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}_1 - k^2\vec{\mathcal{E}}_1 = \vec{0} & \text{dans } \Omega^t \\ [\vec{n} \times \vec{\mathcal{E}}_1] = \vec{\mathcal{M}} & \text{sur } \Gamma \\ [r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}_1 \times \vec{n}] = \vec{0} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Soit $\vec{\mathcal{H}}_1 = \dfrac{1}{i\omega\mu_0} r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}_1$ le champ magnétique associé à $\vec{\mathcal{E}}_1$. Le problème en $\vec{\mathcal{H}}_1$ équivalent à $(Q^\omega_{2,e})$ est le suivant

$$(Q^\omega_{2,h}) \begin{cases} r\vec{o}tr\vec{o}t\vec{\mathcal{H}}_1 - k^2\vec{\mathcal{H}}_1 = \vec{0} & \text{dans } \Omega^t \\ [\vec{n} \times \vec{\mathcal{H}}_1] = \vec{0} & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{1}{i\omega\varepsilon_0}[r\vec{o}t\vec{\mathcal{H}}_1 \times \vec{n}] = \vec{\mathcal{M}} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

De nouveau, et au même titre que (Q^ω_1), le problème $(Q^\omega_{2,h})$ admet une unique solution dans $H(rot, \Omega^t)$ avec la relation

$$\|\vec{\mathcal{E}}_1\|_{0,\omega,rot_{\Omega^t}} \leq C_1\|\vec{\mathcal{H}}_1\|_{0,\omega,rot_{\Omega^t}} \leq \frac{C}{\sigma}|\omega|^{1/2}\|\vec{\mathcal{M}}\|_{-1/2,\omega,div_\Gamma}$$

D'où l'existence et l'unicité du champ $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_0$ vérifiant l'inégalité de continuité. $\square$

Théorème 5.8 *La forme sesquilinéaire b^Γ_ω est V-coercive :*

$$\Re e(b^\Gamma_\omega((\vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}), (\vec{\mathcal{M}}^t, \vec{\mathcal{J}}^t))) \geq \frac{C}{\sigma^2}|\omega|(\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma})$$

Preuve : Pour $(\vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}) \in V \times V$, Nous considérons $\vec{\mathcal{E}}$ la solution du problème (Q^ω) et $\vec{\mathcal{H}} = \dfrac{1}{i\omega\mu_0} r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}$. En multipliant la première équation de (Q^ω) par $\bar{\vec{\mathcal{E}}}$ et en intégrant sur Ω^t, nous obtenons

$$i\omega\langle\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}}\rangle_{\Omega^t} + \frac{1}{i\omega}\langle\frac{1}{\mu_0}r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}, r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}\rangle_{\Omega^t} = \langle[\vec{\mathcal{H}} \times \vec{n} \, . \, \bar{\vec{\mathcal{E}}}]\rangle_\Gamma$$

La même manipulation pour le champ $\vec{\mathcal{H}}$ nous donne l'équation

$$i\omega\langle\mu_0\vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{H}}\rangle_{\Omega^t} + \frac{1}{i\omega}\langle\frac{1}{\varepsilon_0}r\vec{o}t\vec{\mathcal{H}}, r\vec{o}t\vec{\mathcal{H}}\rangle_{\Omega^t} = -\langle[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{n} \, . \, \bar{\vec{\mathcal{H}}}]\rangle_\Gamma$$

D'autre côté, d'après le théorème de représentation intégrale (voir [1]), les champs $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ vérifient les équations

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^{ext}+\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^{int}}{2} & = & P_2^\omega\vec{\mathcal{J}}-Q^\omega\vec{\mathcal{M}}\\ \dfrac{\vec{\mathcal{H}}_\Gamma^{ext}+\vec{\mathcal{H}}_\Gamma^{int}}{2} & = & P_1^\omega\vec{\mathcal{M}}+Q^\omega\vec{\mathcal{J}}\end{array}\right.$$

Or

$$\begin{array}{rcl}\Re e(\displaystyle\int_\Gamma[\vec{\mathcal{H}}\times\vec{n}\,.\,\bar{\vec{\mathcal{E}}}]-\int_\Gamma[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{n}\,.\,\bar{\vec{\mathcal{H}}}]) & = & \Re e(\langle(\vec{\mathcal{H}}^{ext}+\vec{\mathcal{H}}^{int})\ ,\ \bar{\vec{\mathcal{M}}}\rangle_\Gamma+\langle(\vec{\mathcal{E}}^{ext}+\vec{\mathcal{E}}^{int}).\ \bar{\vec{\mathcal{J}}}\rangle_\Gamma\\ & = & \Re e\ b_\Gamma^\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}))\end{array}$$

Par conséquent, nous avons

$$\Re e\ b_\Gamma^\omega((\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}))\geq C\sigma(\|\vec{\mathcal{E}}\|^2_{0,\omega,rot_{\Omega^t}}+\|\vec{\mathcal{H}}\|^2_{0,\omega,rot_{\Omega^t}})$$

En utilisant le théorème de trace, nous obtenons le résultat. □

Théorème 5.9 *le problème (C^ω) s'écrit sous la forme variationnelle suivante*

$$(C^\omega)\left|\begin{array}{l}\text{pour tout } \vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i,\ \ \vec{\mathcal{H}}_\Gamma^i\in V',\\ \text{chercher }\ (\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}})\ \in H_c\times H\ \ \text{tel que}\\ \forall\ (\vec{\mathcal{E}}^t,\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t)\ \in H_c\times H\\ \\ b_\omega^c((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t))=L_\omega^c(\vec{\mathcal{E}}^t,\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t)\end{array}\right.$$

Il admet une unique solution dans $(H_c\times H)^2$, qui vérifie la relation

$$\Big(\|\vec{\mathcal{H}}\|^2_{0,\omega,rot_\Omega}+\|\vec{\mathcal{E}}\|^2_{0,\omega,rot_\Omega}\Big)^{1/2}\leq\frac{C}{\sigma}|\omega|^{1/2}\Big(\|\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{H}}_\Gamma^i\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\Big)^{1/2}$$

Preuve : la forme b_ω^c est coercive sur $H_c\times H$. En effet, Pour $(\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}})\in H_c\times H$, on a

$$\begin{array}{rl}\Re e(b_\omega^c((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}})))\geq & C\sigma\Big(\|\vec{\mathcal{E}}\|^2_{0,\omega,rot_\Omega}+\|\vec{\mathcal{H}}\|^2_{0,\omega,rot_\Omega}\Big)\\ & +\Re e(b_\omega^\Gamma((\vec{\mathcal{E}}\times\vec{n},\vec{n}\times\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{n},\vec{n}\times\vec{\mathcal{H}}))))\end{array}$$

La coercivité de b_ω^c se déduit alors du théorème précédent. D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (C^ω) admet une unique solution $(\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}})$ dans $(H_c\times H)$.
De plus, d'après le théorème de trace on a

$$\begin{array}{rcl}|\Re e(b_\omega^c((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}})))| & = & |\Re e(L_\omega^c(\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}))|\\ & = & |\langle\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i\ ,\ (\vec{\mathcal{H}}\times\vec{n})\rangle_\Gamma-\langle\vec{\mathcal{H}}_\Gamma^i\ ,\ (\vec{\mathcal{E}}\times\vec{n})\rangle_\Gamma|\\ & \leq & C|\omega|^{1/2}\Big(\|\gamma_\tau\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}+\|\gamma_\tau\vec{\mathcal{H}}_\Gamma^i\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\Big)^{1/2}\\ & & \Big(\|\vec{\mathcal{H}}\|^2_{0,\omega,rot_\Omega}+\|\vec{\mathcal{E}}\|^2_{0,\omega,rot_\Omega}\Big)^{1/2}\end{array}$$

Avec la coercivité de b_c^ω, on trouve

$$\Big(\|\vec{\mathcal{H}}\|^2_{0,\omega,rot_\Omega}+\|\vec{\mathcal{E}}\|^2_{0,\omega,rot_\Omega}\Big)^{1/2}\leq\frac{C}{\sigma}|\omega|^{1/2}\Big(\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\Big)^{1/2}$$

□

Remarquons que par construction, tout couple de champs $(\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}})$ qui vérifie le problème $(P3^\omega)$, est solution de (C^ω). L'éxistence et l'unicité des solutions de $(P3^\omega)$ et (C^ω) entraine l'équivalence de ces deux problèmes.

Théorème 5.10 *le problème (S^ω) s'écrit sous la forme variationnelle suivante*

$$(S^\omega)\left|\begin{array}{l}\textit{pour tout } \vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma,\ \ \vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\in V',\\ \textit{chercher }\ (\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}})\ \in H_c\times V\ \ \textit{tel que}\\ \forall\ (\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t)\ \in H_c\times V\\ \\ b^s_\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t))=L^s_\omega(\vec{\mathcal{E}}^t,\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t)\end{array}\right.$$

Il admet une unique solution dans l'espace $(H_c\times V)$, qui vérifie

$$\Big(\frac{1}{|\omega|}\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{E}}\|^2_{0,\omega,rot_{\Omega^1}}\Big)^{1/2}\leq\frac{C}{\sigma}|\omega|^{1/2}\Big(\|\gamma_\tau\vec{\mathcal{E}}^i\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}+\|\gamma_\tau\vec{\mathcal{H}}^i\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\Big)^{1/2}$$

Preuve : Avec les mêmes arguments que précédemment, on montre que b^s_ω est coercive. Le théorème de Lax-Milgram permet de conclure. □

En fin, comme dans le théorème précédent, on peut conclure que le problème (Pe^ω) est équivalent à (S^ω_v).

6 Résultats en temps

Dans tout le reste, σ désignera un réel positif. Pour transmettre les résultats obtenus en fréquentiel au domaine temporel, il nous suffit d'appliquer le théorème de Paley-Wiener et la transformée de Fourier-Laplace inverse après avoir vérifié toutes les hypothèses nécessaires à ce passage.

On considère un champ $\vec{E}(t,x)$ qui vérifie le problème (Pe). Il s'écrit comme la somme d'un champ incident $\vec{E}^i$ et un champ diffracté $\vec{E}^d$

$$\vec{E}(t,x) = \vec{E}^i(t,x) + \vec{E}^d(t,x)$$

Le champ diffracté vérifie alors l'équivalent temporel du problème (Pe_d^ω), soit

$$(Pe_d)\begin{cases} \vec{rot}\dfrac{1}{\mu(x)}\vec{rot}\vec{E}^d(t,x) + \varepsilon(x)\dfrac{\partial^2 \vec{E}^d}{\partial t^2}(t,x) = -\vec{F}(t,x) & (t,x) \in (\mathbb{R} \times \Omega^1) \\ \vec{E}^d(t,x) \wedge \vec{n}(x) = \vec{g}(t,x) & (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma^c \\ \vec{E}^d(t,x) = \vec{0} & t \leq 0 \\ + \textit{ les conditions } (1), (2), (3) \text{ et } (7) \end{cases}$$

Théorème 6.1 *Le problème (Pe_d) admet une solution unique $\vec{E}^d$ dans $H^1_\sigma(\mathbb{R}_+, H(rot,\Omega^1))$ et on a l'inégalité suivante*

$$\|\vec{E}^d\|_{1,\sigma,H(rot,\Omega^1)} \leq \frac{C}{\sigma}\|\vec{E}^i\|_{2,\sigma,H(rot,\Omega)}$$

Preuve : Si $\vec{E}^d$ est une solution de (Pe_d) dans $LT(\sigma, H(rot,\Omega^1))$, nécessairement sa transformée de Laplace $\vec{\mathcal{E}}$ est solution de (Pe_d^ω), pour tout $\omega = \eta + i\sigma_1$, avec $\sigma_1 \geq \sigma$. Le théorème "5.1" nous assure l'existence et l'unicité de la solution $\vec{\mathcal{E}}$. Or comme il existe des constantes $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, telle que

$$\forall \omega \in \{\omega \in \mathbb{C}, \Im m(\omega) \geq \sigma\}$$

$$\|\vec{\mathcal{E}}^d\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}} \leq \frac{C}{\sigma}|\omega|\|\vec{\mathcal{E}}^i\|_{0,\omega,rot_\Omega}$$

Le théorème de Palay-Wiener appliqué à $\vec{\mathcal{E}}^i$ donne

$$\|\vec{\mathcal{E}}^d\|_{0,\omega,rot_{\Omega^1}} \leq C\frac{|\omega|}{\sigma}C(1+|\omega|)^k$$

Une nouvelle application du théorème de Palay-Wiener (sens réciproque) montre qu'on peut définir $\vec{E}^d = L^{-1}(\vec{\mathcal{E}}^d)$. De plus, on a la majoration suivante

$$\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^2\|\vec{\mathcal{E}}^d\|_{0,\omega,rot^1_\Omega}d\omega \leq C\frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma}|\omega|^4\|\vec{\mathcal{E}}^i\|_{0,\omega,rot_\Omega}d\omega < \infty$$

et donc

$$\|\vec{E}^d\|_{1,\sigma,H(rot,\Omega^1)} \leq C\frac{1}{\sigma}\|\vec{E}^i\|_{2,\sigma,H(rot,\Omega)}$$

d'où le résultat. $\square$

On reprend le système $(P3)$. On poursuit les mêmes démarches suivies dans le cas fréquentiel pour aboutir à deux formulations variationnelles dans le domaine temporel. Soit $(\vec{E},\vec{H})$ un couple qui vérifie le système $(P3)$. Nous multiplions la deuxième équation de $(P3)$ par une fonction test $\vec{E}^t$ de trace tangentielle nulle sur le conducteur et nous intégrons en espace sur Ω puis en temps sur $\mathbb{R}$. En se servant de la formule de Green, nous couplons l'équation obtenue avec les traces tangentielles des représentations des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dans le milieu extérieur Ω^{ext}. Nous obtenons la formulation (S).

D'autre part, nous multiplions la première équation de $(P3)$ par une fonction test $\vec{H}^t$ et la deuxième équation par une fonction test $\vec{E}^t$ de trace tangentielle nulle sur le conducteur. Puis, nous intégrons en espace sur Ω puis en temps sur $\mathbb{R}$. En se servant de la formule de Green, nous couplons les expressions obtenues avec les traces tangentielles des représentations des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dans le milieu extérieur Ω^{ext}. Nous obtenons la formulation (C).

Nous notons

$$\begin{cases} H^t = H^1_\sigma(\mathbb{R}_+, H(rot,\Omega)) \\ H^t_c = \left\{\vec{E}\in H^t;\ tel\ que\ \vec{E}\times\vec{n} = \vec{0}\ sur\ \Gamma^c\right\} \\ V^t = H^{\frac{1}{2}}_\sigma(\mathbb{R}_+, H^{-\frac{1}{2}}(div,\Gamma)) \end{cases} \tag{11}$$

Nous cherchons des champs électromagnétiques $(\vec{E},\vec{H})$ dans $(H^t_c\times H^t)$, des courants surfaciques $(\vec{\mathcal{M}},\vec{j})$ dans $(V^t_c\times V^t)$.

Dans ces espaces déjà définis, la formulation (S) sera

$$
(S)\left\{
\begin{array}{l}
\text{pour tout } \vec{E}^i_\Gamma,\ \ \vec{H}^i_\Gamma \in V^{t\prime},\\
\text{chercher } (\vec{E},\vec{j})\ \in H^t_c \times V^t \ \text{ tel que}\\
\forall\ (\vec{E}^t,\vec{j}^t)\ \in H^t_c \times V^t\\
\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Gamma \vec{E}^i(t,x).\vec{j}^t(t,x)dx\ dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Gamma \vec{E}_\Gamma(t,x).\vec{j}^t(t,x)dx\ dt\\
\displaystyle+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge(\vec{E}(t-|x-y|/c,y)\wedge\vec{n})\right).\vec{j}^t(t,x)d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt\\
\displaystyle+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{|x-y|}{c}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)\wedge\vec{n})\right).\vec{j}^t(t,x)d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt\\
\displaystyle+\mu_0\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|}\vec{j}^t(t,x)d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt\\
\displaystyle+\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{div_\Gamma\displaystyle\int_0^{t-|x-y|/c}\vec{j}(\tau,y)d\tau}{4\pi|x-y|}div_\Gamma\vec{j}^t(t,x)d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt\\
\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Gamma \vec{H}^i(t,x).(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})dx\ dt =\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Omega \varepsilon(x)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t,x).\vec{E}^t(t,x)dx\ dt+\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Omega\frac{1}{\mu(x)}r\vec{o}t(\int_{\mathbb{R}}\vec{E}(t,x)dt).r\vec{o}t\vec{E}^t(t,x)dx\ dt\\
\displaystyle-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Gamma(\vec{j}(t,x)\times\vec{n}).(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})dx\ dt\\
\displaystyle-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge\vec{j}(t-|x-y|/c,y)\right).(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt\\
\displaystyle-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{|x-y|}{c}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)\right).(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt\\
\displaystyle+\varepsilon_0\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)\wedge\vec{n}}{4\pi|x-y|}.(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt\\
\displaystyle+\frac{1}{\mu_0}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{div_\Gamma\displaystyle\int_0^{t-|x-y|/c}(\vec{E}(\tau,y)\wedge\vec{n})d\tau}{4\pi|x-y|}div_\Gamma(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt
\end{array}
\right.
$$

Cette formulation est symétrique. Elle consiste à calculer les courants surfaciques $\vec{j}$ sur Γ et les champs électriques $\vec{E}$ dans Ω. D'où l'avantage numérique de cette formulation :

moins d'inconnus à calculer et moins de mémoire à réserver que la formulation (C) :

$$
(\mathrm{C})\left\{
\begin{array}{l}
\text{pour tout}\vec{E}^i_\Gamma,\ \ \vec{H}^i_\Gamma \in V^{t'}, \\
\text{chercher } (\vec{E},\vec{H})\ \in H^t_c \times H^t \ \text{ tel que} \\
\forall\,(\vec{E}^t,\vec{H}^t)\ \in H^t_c \times H^t \\
\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Gamma \vec{E}^i(t,x).(\vec{n}\wedge\vec{H}^t(t,x))dx\ dt = \\
\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Omega \mu(x)\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}(t,x).\vec{H}^t(t,x)dx\ dt + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon(x)}r\vec{o}t(\int_{\mathbb{R}}\vec{H}(t,x)dt).r\vec{o}t\vec{H}^t(t,x)dx\ dt \\
\displaystyle+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge(\vec{E}(t-|x-y|/c,y)\wedge\vec{n})\right).(\vec{n}\wedge\vec{H}^t(t,x))d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt \\
\displaystyle+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{|x-y|}{c}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)\wedge\vec{n})\right).(\vec{n}\wedge\vec{H}^t(t,x))d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt \\
\displaystyle+\mu_0\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{\vec{n}\wedge\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)}{4\pi|x-y|}(\vec{n}\wedge\vec{H}^t(t,x))d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt \\
\displaystyle+\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{div_\Gamma\displaystyle\int_0^{t-|x-y|/c}(\vec{n}\wedge\vec{H}(\tau,y))d\tau}{4\pi|x-y|}div_\Gamma(\vec{n}\wedge\vec{H}^t(t,x))d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt \\
\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Gamma \vec{H}^i(t,x).(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})dx\ dt = \\
\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Omega \varepsilon(x)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t,x).\vec{E}^t(t,x)dx\ dt + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_\Omega \frac{1}{\mu(x)}r\vec{o}t(\int_{\mathbb{R}}\vec{E}(t,x)dt).r\vec{o}t\vec{E}^t(t,x)dx\ dt \\
\displaystyle-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge(\vec{n}\wedge\vec{H}(t-|x-y|/c,y))\right).(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt \\
\displaystyle-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{|x-y|}{c}\left(\nabla_x(\frac{1}{|x-y|})\wedge(\vec{n}\wedge\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y))\right).(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt \\
\displaystyle+\varepsilon_0\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t-|x-y|/c,y)\wedge\vec{n}}{4\pi|x-y|}.(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt \\
\displaystyle+\frac{1}{\mu_0}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\sigma t}\int_{\Gamma\times\Gamma}\frac{div_\Gamma\displaystyle\int_0^{t-|x-y|/c}(\vec{E}(\tau,y)\wedge\vec{n})d\tau}{4\pi|x-y|}div_\Gamma(\vec{E}^t(t,x)\wedge\vec{n})d\Gamma_x\,d\Gamma_y\,dt
\end{array}\right.
$$

cette formulation (C) est symétrique. Elle consiste à calculer les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dans Ω.

Théorème 6.2 *Le problème (C) s'écrit sous la forme variationnelle suivante*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{pour tout } \vec{E}^i_\Gamma, \;\; \vec{H}^i_\Gamma \in V^{t\prime}, \\ \textit{chercher } \; (\vec{E},\vec{H}) \; \in H^t_c \times H^t \;\; \textit{tel que} \\ \forall \; (\vec{E}^t,\vec{H}^t) \; \in H^t_c \times H^t \\ \\ b^c_t((\vec{E},\vec{H}),(\vec{E}^t,\vec{H}^t)) = L^c_t(\vec{E}^t,\vec{H}^t) \end{array}\right.$$

avec

$$b^c_t((\vec{E},\vec{H}),(\vec{E}^t,\vec{H}^t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} b^c_\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{H}}^t))d\omega$$

$$L^c_t(\vec{E}^t,\vec{H}^t) = \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} L^c_\omega(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{H}}^t)d\omega$$

Il admet une unique solution dans l'espace $H^t_c \times H^t$. *Elle vérifie*

$$\Big(\|\vec{H}\|^2_{1,\sigma,H(rot,\Omega^1)}+\|\vec{E}\|^2_{1,\sigma,H(rot,\Omega^1)}\Big)^{1/2} \leq \frac{C}{\sigma}\Big(\|\vec{E}^i_\Gamma\|^2_{3/2,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)}+\|\vec{H}^i_\Gamma\|^2_{3/2,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)}\Big)^{1/2}$$

Preuve : Nous appliquons le théorème de Parseval à la formulation variationnelle fréquentielle

$$b^c_\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t)) = L^c_\omega(\vec{\mathcal{E}}^t,\bar{\vec{\mathcal{H}}}^t)$$

Nous obtenons le problème variationnel du haut avec

$$\begin{aligned} b^c_t((\vec{E},\vec{H}),(\vec{E}^t,\vec{H}^t)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} b^c_\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{H}}^t))d\omega \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma}\Big(b^c_\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{H}}^t))d\omega + \overline{b^c_\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{H}}^t))}d\omega\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma}\Re e\Big(b^c_\omega((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{H}}^t))d\omega\Big) \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la coercivité de la forme bilinéaire b^c_t. Ceci donne l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que l'inégalité de continuité. □

Théorème 6.3 *Le problème (S) s'écrit sous la forme variationnelle suivante*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{pour tout } \vec{E}^i_\Gamma, \;\; \vec{H}^i_\Gamma \in V^{t\prime}, \\ \textit{chercher } \; (\vec{E},\vec{j}) \; \in H^t_c \times V^t \;\; \textit{tel que} \\ \forall \; (\vec{E}^t,\vec{j}^t) \; \in H^t_c \times V^t \\ \\ b^s_t((\vec{E},\vec{j}),(\vec{E}^t,\vec{j}^t)) = L^s_t(\vec{E}^t,\vec{j}^t) \end{array}\right.$$

avec

$$b_t^s((\vec{E},\vec{j}),(\vec{E}^t,\vec{j}^t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} b_\omega^s((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t))d\omega$$

$$L_t^s(\vec{E}^t,\vec{j}^t) = \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} L_\omega^s(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t)d\omega$$

Il admet une unique solution dans l'espace $H_c^t \times V^t$. Elle vérifie l'inégalité

$$\Big(\|\vec{J}\|^2_{1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)}+\|\vec{E}\|^2_{1,\sigma,H(rot,\Omega^1)}\Big)^{1/2} \leq \frac{C}{\sigma}\Big(\|\vec{E}_\Gamma^i\|^2_{3/2,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)}+\|\vec{H}_\Gamma^i\|^2_{3/2,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)}\Big)^{1/2}$$

Preuve : Nous appliquons le théorème de Parseval à la formulation variationnelle fréquentielle

$$b_\omega^s((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t)) = L_\omega^s(\vec{\mathcal{E}}^t,\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t)$$

Nous obtenons le problème variationnel du haut avec

$$\begin{aligned}
b_t^s((\vec{E},\vec{j}),(\vec{E}^t,\vec{j}^t)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} b_\omega^s((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t))d\omega \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma}\Big(b_\omega^s((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t))\overline{b_\omega^c((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t))}\Big)d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma}\Re e\Big(b_\omega^s((\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{E}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t))d\omega\Big)
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la coercivité de la forme bilinéaire b_t^s. Ceci donne l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que l'inégalité de continuité. □

7 Problème des modes parasites

La résolution numérique des problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques dans le domaine fréquentiel par la méthode des équations intégrales, montre l'existence de fréquences parasites pour lesquelles la matrice approchant l'opérateur intégral n'est pas inversible. En effet, ces approches sont basées en premier lieu sur l'existence d'une formule de représentation intégrale. Celle-ci suppose qu'on a préalablement prolongé le champ électromagnétique à l'intérieur de l'obstacle, *i.e.* dans un domaine borné, par un champ vérifiant les équations de Maxwell. Ceci suppose la donnée d'une condition aux limites que l'utilisateur impose (consciemment ou non !!!). Selon le type de conditions, on aura existence (ou non) de modes propres intérieures. Qu'en est-il dans le domaine temporel ? Comment cela se traduit-il dans la pratique ?

7.1 Étude dans le domaine fréquentiel

On note Ω un ouvert borné régulier de frontière Γ, Ω^{ext} l'ouvert complémentaire et $\vec{n}$ la normale unitaire sur Γ orientée vers Ω^{ext}. Le théorème de représentation intégrale dit

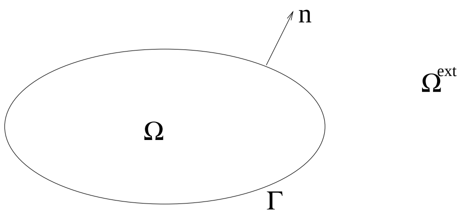

Figure 2: *Situation géométrique.*

que si un couple $(\vec{E}, \vec{H})$ vérifie les équations de Maxwell dans $\Omega \cup \Omega^{ext}$ et la condition de radiation à l'infini, alors on a la formule de représentation intégrale suivante :

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(x) &= -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \vec{grad} \int_\Gamma G(x,y)\; div_\Gamma \vec{J}(y) d\Gamma_y + i\omega\mu_0 \int_\Gamma G(x,y)\; \vec{J}(y) d\Gamma_y \\
&- \vec{rot} \int_\Gamma G(x,y) \vec{M}(y) d\Gamma_y \\
\vec{H}(x) &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \vec{grad} \int_\Gamma G(x,y)\; div_\Gamma \vec{M}(y) d\Gamma_y + i\omega\varepsilon_0 \int_\Gamma G(x,y)\; \vec{M}(y) d\Gamma_y \\
&+ \vec{rot} \int_\Gamma G(x,y)) \vec{J}(y) d\Gamma_y
\end{aligned}
$$

pour $x \in \Omega \cup \Omega^{ext}$, avec $r = |x-y|$ et

$$G(x,y) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

les courants $\vec{J}$ et $\vec{M}$ sont les sauts des quantités tangentielles :

$$
\begin{aligned}
\vec{J} &= [\vec{H} \wedge \vec{n}] \qquad \text{sur } \Gamma \\
\vec{M} &= [\vec{n} \wedge \vec{E}] \qquad \text{sur } \Gamma
\end{aligned}
$$

Pour $x \in \Gamma$, les traces tangentielles sont données par :

$$\begin{aligned}
\frac{(\vec{E}_\Gamma^{int}(x) + \vec{E}_\Gamma^{ext}(x))}{2} &= -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\vec{\nabla}_\Gamma \int_\Gamma G(x,y)\ div_\Gamma \vec{J}(y) d\Gamma_y + i\omega\mu_0 \Pi_x \int_\Gamma G(x,y)\ \vec{J}(y) d\Gamma_y \\
&- \Pi_x \int_\Gamma \nabla_x (G(x,y)) \wedge \vec{M}(y) d\Gamma_y \\
\frac{(\vec{H}_\Gamma^{int}(x) + \vec{H}_\Gamma^{ext}(x))}{2} &= -\frac{1}{i\omega\mu_0}\vec{\nabla}_\Gamma \int_\Gamma G(x,y)\ div_\Gamma \vec{M}(y) d\Gamma_y + i\omega\varepsilon_0 \Pi_x \int_\Gamma G(x,y)\ \vec{M}(y) d\Gamma_y \\
&+ \Pi_x \int_\Gamma \nabla_x G(x,y) \wedge \vec{J}(y) d\Gamma_y
\end{aligned}$$

Considérons pour la simplicité, le cas de la diffraction par un conducteur parfait. On résout les équations de Maxwell dans Ω^{ext} avec la condition de radiation à l'infini, et la condition aux limites suivante sur Γ :

$$\vec{E} \wedge \vec{n} = \vec{g}$$

On sait que ce problème admet une solution et une seule. Pour utiliser le théorème de représentation précédent, on doit prolonger les champs à l'intérieur.

$\boxed{\text{Existence et unicité de l'équation intégrale} \Longleftrightarrow \text{Existence et unicité du prolongement.}}$

Classiquement, on considère le problème de Maxwell dans Ω avec la même condition aux limites. On a donc

$$\vec{M} = \vec{0}$$

l'équation intégrale à résoudre est :

$$\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\vec{\nabla}_\Gamma \int_\Gamma G(x,y)\ div_\Gamma \vec{J}(y) d\Gamma_y + i\omega\mu_0 \Pi_x \int_\Gamma G(x,y)\ \vec{J}(y) d\Gamma_y = \vec{g}(x) \quad \text{pour } x \in \Gamma.$$

Or, on sait qu'*il existe une suite croissante de réels k_n positifs qui tend vers l'infini, et une suite de champs de vecteurs $\vec{E}_n \in H_0(\mathrm{rot}, \Omega)$ (à divergence nulle) tel que*

$$\vec{rot}\ \vec{rot}\vec{E}_n - k_n^2 \vec{E}_n = \vec{0} \quad \textit{dans } \Omega$$

Cette suite forme une BON de $L^2(\Omega)^3$ (et orthogonale de $H_0(\mathrm{rot}, \Omega)$).

Donc pour $k \in \{k_0, \ldots, k_n, \ldots\}$, le prolongement n'existe pas forcément et s'il existe il n'est pas unique. Cela se traduit numériquement par le fait que la matrice du système est non-inversible pour ces fréquences. Généralement, le système est résolu par une méthode directe qui échoue complètement à ce stade. Néanmoins, le problème rentre dans le cadre de l'alternative de Fredholm, et donc dans ce cas, pour avoir l'existence de solutions, il faut s'assurer que le second membre vérifie un certain nombre (fini) de relations d'orthogonalité. Ces relations s'écrivent :

$$\int_\Gamma \vec{rot}\vec{E}_n \cdot \vec{g} = 0$$

pour tout $\vec{E}_n$ dans l'espace propre associé à la valeur propre $k^2 = k_n^2$, espace propre de dimension finie.

Le second membre provenant d'une onde incidente ($\vec{g} = -\vec{E}^i \wedge \vec{n}$) vérifie ces conditions. En effet, une onde incidente trouve généralement sa source à l'extérieur et vérifie donc :

$$r\vec{o}t\ r\vec{o}t\vec{E}^i - k^2\vec{E}^i = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega$$

la formule de Green

$$0 = \int_\Omega r\vec{o}t\ r\vec{o}t\vec{E}^i \cdot \vec{E}_n - \int_\Omega r\vec{o}t\ r\vec{o}t\vec{E}_n \cdot \vec{E}^i = -\int_\Gamma r\vec{o}t\vec{E}^i \cdot (\vec{n} \wedge \vec{E}_n) + \int_\Gamma r\vec{o}t\vec{E}_n \cdot (\vec{n} \wedge \vec{E}^i)$$

et la condition $\vec{n} \wedge \vec{E}_n = \vec{0}$ donnent alors le résultat.

En théorie, l'existence de ces modes parasites ne change en rien la solution représentée à l'extérieur. En effet, considérons le champ qui vaut zéro à l'extérieur et un mode propre à l'intérieur, le théorème de représentation intégrale donne alors :

$$-\frac{1}{i\omega\varepsilon_0} gr\vec{a}d \int_\Gamma G(x,y)\ div_\Gamma \vec{J}_n(y) d\Gamma_y + i\omega\mu_0 \int_\Gamma G(x,y)\ \vec{J}_n(y) d\Gamma_y = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } x \in \Omega^{ext} \\ \vec{E}_n(x) & \text{si } x \in \Omega \end{cases}$$

où $\vec{J}_n = \vec{H}_n \wedge \vec{n}$. Donc, si à un courant, on ajoute un courant propre $\vec{J}_n$ ceci ne change pas la représentation à l'extérieur.

En pratique, si k^2 est une valeur propre (discrète !), la matrice des équations intégrales n'est pas inversible et on n'est pas sûr de trouver en sortie du code un quelconque courant solution. Mais, si k^2 est "proche" d'une telle valeur propre (ce qui arrive beaucoup plus souvent en pratique !!), la matrice n'est pas très bien conditionnée, mais si on a apporté les soins nécessaires aux calculs des intégrales singulières, on trouve que la solution extérieure n'est pas très perturbée (même si les courants le sont). En particulier, la SER n'est pratiquement pas perturbée par ces modes parasites.

Ces problèmes sont rencontrés dans toute méthode numérique faisant intervenir les équations intégrales. En particulier, le couplage éléments finis - équations intégrales est **encore plus sensible aux modes propres** que l'équation intégrale pure. L'influence de ces modes propres sur les résultats des simulations dépend de plusieurs facteurs : la géométrie (qui impose une certaine distribution des fréquences propres, la symétrie qui fait qu'on excite des modes plus que d'autres ...), la formulation intégrale choisie (en général, une formulation symétrique est moins sensible à ces modes, en tout cas la plage de fréquences autour d'un mode où la solution est poluée est plus étroite que pour une formulation non-symétrique, voir V. Levillain [12]), enfin le soin apporté au calcul de la matrice est primordial.

V. Levillain a étudié trois formulations pour le couplage. Une formulation non-symétrique noté (P^ω) et les formulations (S^ω) et (C^ω) qu'on a transposé dans le domaine temporel dans ce rapport et qu'on a testé numériquement [1]. (P^ω) est très sensible aux modes propres, même sur la SER. En plus, la plage de fréquences poluées autour d'un mode est assez grande. Ce qui détruit complètement la précision dans les zônes du spectre encombrées par les modes propres. Même si la SER calculée par la formulation (S^ω) est encore sensible aux modes propres intérieurs, elle l'est beaucoup moins qu'avec la formulation (P^ω) : les "pics" en fréquences sont plus petits en amplitude et plus étroits en fréquence, voir [12]. La formulation (C^ω), par contre, n'est pas sensible aux modes propre intérieurs (dûs à la formulation intégrale) mais V. Levillain a constaté que d'autres modes propres associés au diélectrique interviennent si celui-ci n'est pas dissipatif.

7.2 Traduction dans le cas temporel

Pour l'équation d'évolution, en général on peut toujours démontrer un résultat d'existence et unicité de la solution. On s'attache particulièrement à démontrer des inégalités d'énergie qui assurent la stabilité du schéma numérique (d'où l'importance des relations de coecivité). Outre la stabilité, on demande au schéma numérique d'être précis. Où sont passés les modes parasites ? Comment cela se traduit-il dans la pratique ? En quoi gênent-ils la précision ?

Commençons par le cas de la diffraction d'une onde transitoire par un conducteur parfait. On garde les notations du paragraphe précédent. On cherche un couple $(\vec{E}, \vec{H})$ causal qui vérifie les équations de Maxwell temporelles dans $\mathbb{R} \times \Omega^{ext}$ et la condition aux limites sur le conducteur :

$$\left(\vec{E} \wedge \vec{n}\right)(t,x) = \vec{g}(t,x) \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma$$

Ce problème admet une solution unique dans les espaces appropriés (voir paragraphe 4.2). Pour utiliser la formule de représentation intégrale (voir [1] pages 5,6) on prolonge les champs à l'intérieur. Si, on résout le problème de Maxwell intérieur avec la même condition aux limites, **contrairement au cas fréquentiel, on a existence et unicité de la solution du problème intérieur**. C'est pourquoi l'équation intégrale :

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}_\Gamma \int_\Gamma \frac{\int_0^t div_\Gamma\, \vec{J}(\tau - r/c, y)\, d\tau}{4\pi r} d\Gamma_y - \mu_0 \Pi_x \frac{\partial}{\partial t}\int_\Gamma \frac{\vec{J}(t - r/c, y)}{4\pi r} d\Gamma_y = \vec{g}(t,x) \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\Gamma$$

admet une unique solution (voir I. Terrasse [14]). Par conséquent, au niveau numérique on n'a pas de problème d'inversibilité d'une quelconque matrice.

La solution $\vec{E}$ à l'intérieur se développe sur les modes propres :

$$\vec{E}_n(t,x) = (a_n \sin(\omega_n t) + b_n cos(\omega_n t))\, \vec{E}_n(x) \quad \text{pour } \omega_n = \frac{k_n}{c} \neq 0$$

et (éventuellement)

$$\vec{E}_n(t,x) = (a_n + b_n t)\, \vec{E}_n(x) \quad \text{pour } \omega_n = 0$$

Ces derniers champs sont les champs harmoniques : $r\vec{o}t\vec{E}_n = \vec{0}$, $div\vec{E}_n = 0$ et $\vec{E}_n \wedge \vec{n} = \vec{0}$. Ils existent lorsque Γ n'est pas connexe.

Les relations d'orthogonalité deviennent :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} r\vec{o}t \vec{E}_n(t,x) \cdot \vec{g}(t,x)\, d\Gamma(x)\, dt = 0 \tag{12}$$

pour tout mode propre. Quelle est l'interprétation de ces relations ? Et quelles en sont les conséquences ?

Considérons une donnée aux limites $\vec{g}(t,x)$ à support compact en temps $\subset [0,T]$. Quel est le support en temps de la solution intérieure ?

Pour $t > T$, le champ électrique a le développement suivant :

$$\begin{aligned} \vec{E}(t,x) \quad = \quad & \sum_{n=0}^{n_0-1} \left(a_n^0 + (t-T) a_n^1 \right) \vec{E}_n(x) \\ + \quad & \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(a_n^0 cos(\omega_n(t-T)) + \frac{1}{\omega_n} a_n^1 sin(\omega_n(t-T)) \right) \vec{E}_n(x) \end{aligned}$$

avec n_0 la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre nulle, a_n^0 et a_n^1 les coefficients du développement de $\vec{E}(T,x)$ et $\partial_t \vec{E}(T,x)$ dans la base propre :

$$\vec{E}(T,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 \vec{E}_n(x)$$

et

$$\partial_t \vec{E}(T,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 \vec{E}_n(x)$$

Si $\vec{E}(T,x)$ et $\partial_t \vec{E}(T,x)$ ne sont pas nuls, alors $\vec{E}(t,x)$ pour $t > T$ est une combinaison de sinusoïdes qui ne s'éteint jamais.

Exprimer la nullité de $\vec{E}(T,x)$ et $\partial_t \vec{E}(T,x)$ se traduit par :

$$\begin{aligned} a_n^0 &= \int_{\Omega} \vec{E}(T,x) \cdot \vec{E}_n &&= 0 \\ a_n^1 &= \int_{\Omega} \partial_t \vec{E}(T,x) \cdot \vec{E}_n &&= 0 \end{aligned}$$

pour tout n. Ces quantités peuvent être reliées à la données $\vec{g}$ en utilisant la formule de Green et les équations dans $\mathbb{R} \times \Omega$:

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \int_{-\infty}^{T} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}(t,x) + r\vec{o}t\, r\vec{o}t\ \vec{E}(t,x) \right) \cdot \vec{E}_n(t,x)\, dx\, dt \\ - \quad & \int_{-\infty}^{T} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}_n(t,x) + r\vec{o}t\, r\vec{o}t\ \vec{E}_n(t,x) \right) \cdot \vec{E}(t,x)\, dx\, dt \\ = \quad - \quad & \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} r\vec{o}t \vec{E}_n(t,x) \cdot \vec{g}(t,x)\, d\Gamma(x)\, dt \\ - \quad & \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \vec{E}(T,x) \cdot \partial_t \vec{E}_n(T,x)\, dx + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \partial_t \vec{E}(T,x) \cdot \vec{E}_n(T,x)\, dx \end{aligned}$$

En prenant
$$\vec{E}_n^0(t,x) = -c^2(t-T)\vec{E}_n(x)$$
et
$$\vec{E}_n^1(t,x) = c^2\vec{E}_n(x)$$
pour $n < n_0$, et
$$\vec{E}_n^0(t,x) = -\frac{c^2}{\omega_n} sin(\omega_n(t-T))\vec{E}_n(x)$$
et
$$\vec{E}_n^1(t,x) = c^2 \, cos(\omega_n(t-T))\vec{E}_n(x)$$
pour $n \geq n_0$, on trouve :
$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma} r\vec{o}t\vec{E}_n^i(t,x)\cdot\vec{g}(t,x)\,d\Gamma(x)\,dt = a_n^i \quad i=0,1 \;\; n=0,1\ldots$$

$$\boxed{\text{(12) est vérifiée pour tout } n \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E}(T,x) = \partial_t\vec{E}(T,x) = \vec{0}}$$

Autrement dit, si le second membre $\vec{g}$ est à support en temps inclus dans $[0,T]$, soit il vérifie les conditions (12) et le champ intérieur s'annule pour $t > T$, soit le champ devient une combinaison de sinusoïdes (non amorties) en temps.

Considérons par exemple le problème de la diffraction d'une onde plane :
$$\vec{E}^i(t,\vec{r}) = \vec{E}_0^i f(t - \vec{v}\cdot\vec{r}/c)$$
avec $\vec{E}_0^i \cdot \vec{v} = 0$ et f une fonction scalaire à support compact, par exemple une gaussienne. On vérifie comme dans le cas fréquentiel que **les conditions d'orthogonalité sont vérifiées par** $\vec{g}(t,x) = -(\vec{E}^i \wedge \vec{n})(t,x)$. De toute façon, le champ intérieur vaut $-\vec{E}^i(t,x)$ qui est nul au bout d'un certain temps. **Mais la propriété du champ intérieur d'être nul au bout d'un temps fini n'est pas stable vis-à-vis du second membre** : la moindre perturbation (même locale) du second membre engendre une perturbation sinusoïdale du champ intérieur donc des courants inconnus de l'équation intégrale. Ce qui fait qu'après transformation de Fourier, le courant fréquentiel aura des "pics" aux fréquences propres du problème intérieur.

Sur le plan numérique, le second membre ne vérifie jamais les conditions d'orthogonalité (discrètes). Donc le courant aura toujours des courants propres qui sont superposés aux vrais courants. Les oscillations sont un peu amorties du fait de la diffusion numérique du schéma. Ces courants parasites donnent lieu à un champ nul à l'extérieur et ainsi le champ extérieur, et en particulier la SER après transformée de Fourier, n'est pas affecté par ces modes propres. Par rapport au cas fréquentiel, on n'a pas de problème d'inversibilité d'une matrice, on trouve toujours un courant avec d'éventuels courants propres, mais l'existence de beaucoup de modes propres peut entrainer une perte de précision du schéma numérique malgré tout.

D'où l'importance de trouver une formulation variationnelle et par la suite un schéma numérique le moins sensible aux modes propres. Et ceci est encore plus crucial pour le problème du couplage. Car ici, le manque de précision fait que les courants parasites engendrent un champ non nul à l'extérieur et ceci perturbe la SER par exemple. La formulation (S) n'est pas trop sensible aux modes propres contrairement à la formulation (P). La formulation (C) ne l'est pas mais présente d'autres désavantages.

Les figures suivantes illustrent notre propos dans le cas de la diffraction par une sphère. L'onde incidente est plane de la forme :

$$E^i(t, \vec{r}) = f(t - z/c)\vec{e}_1$$

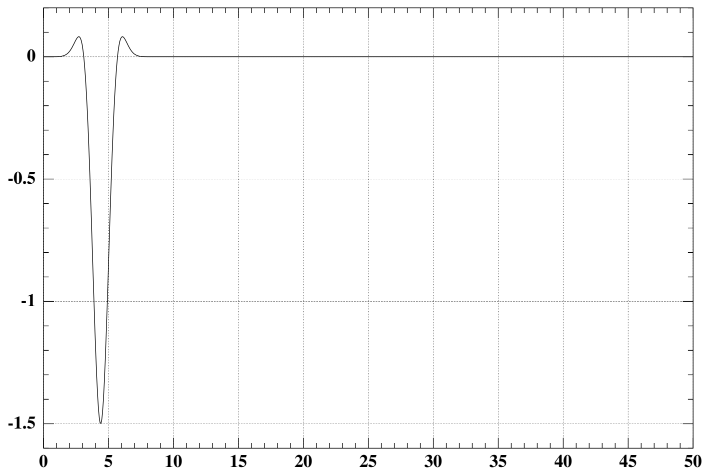

Figure 3: *La fonction f de l'onde plane.*

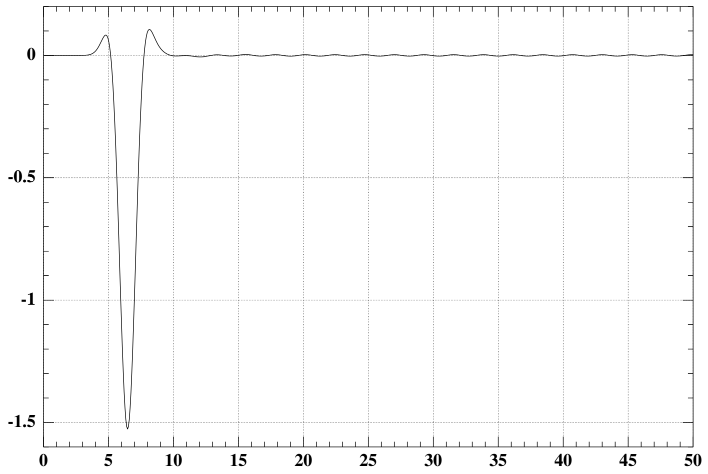

Figure 4: *La composante E_1 du champ diffracté au centre de la sphère.*

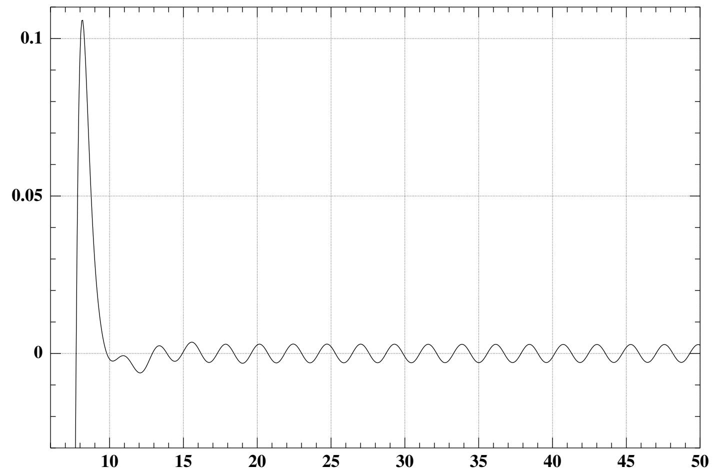

Figure 5: *Zoom sur le champ au centre de la sphère.*

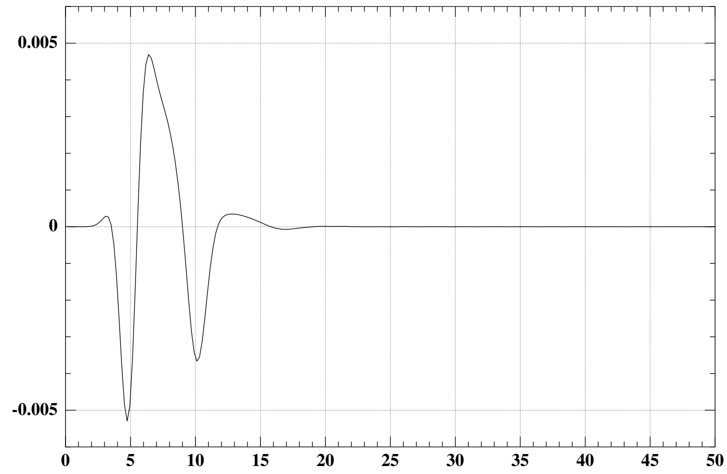

Figure 6: *Champ extérieur.*

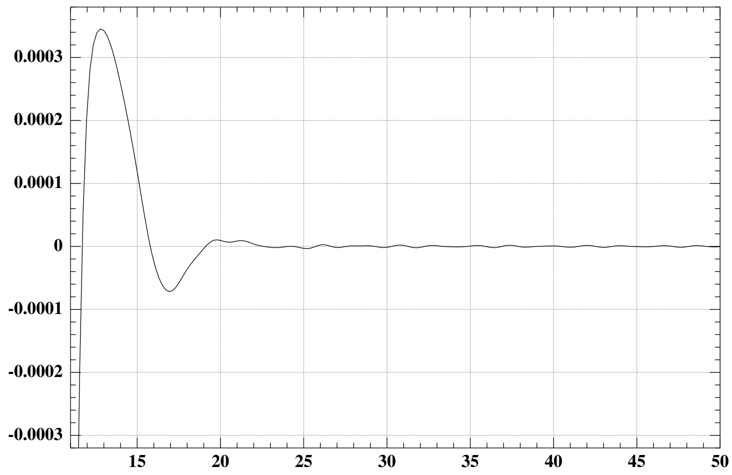

Figure 7: *Zoom sur le champ extérieur.*

References

[1] T. Abboud & T. SAYAH, *Couplage Equations de Maxwell - Potentiels Retardés pour les Milieux Hétérogènes* , *Rapport interne au CMAP No 374*, Ecole polytechnique, 1997.

[2] A. Bachelot, L. Bounhoure & A. Pujols, *Couplage éléments finis-potentiels retardés pour la diffraction électromagnétique par un obstacle inhomogène*, Rapport interne Université Bordeaux I, No. 98006, (1998).

[3] A. Bendali, *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques,Thèse d'Etat*, Paris-VI, 1984.

[4] A. Bamberger & T. Ha-Duong, *Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé d'une onde acoustique,* Math. Meth. Appl. Sci., 8, 1986

[5] E. Becache, *Résolution par une méthode d'équations intégrales d'un problème de diffraction d'ondes élastiques transitoires par une fissure,Thèse de Doctorat*, Paris-VI, 1991.

[6] A. Bachelot & A. Pujols, *Équations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell*, C.R. Acad. Sci. Paris t. 314, Série I, (1992), p. 639,644.

[7] Y. Ding, *Méthodes numériques sur l'équation intégrale aux bords pour le problème des ondes acoustiques diffractées par une surface rigide en 3D,Thèse de Doctorat*, Paris-11, 1985.

[8] M. Costabel & E.P. Stephan, *Coupling of finite and boundary element methods for an elastoplastic interface problem*, *SIAM J. Numer.Anal.*, 27, 1990, 1212-1226.

[9] V. Lange, *Équations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif*, *Thèse de Doctorat*, Université de Bordeaux I, 1995.

[10] C. Johnson & J.C. Nedelec, *On the coupling of boundary integral and finite element methods*, *Math. of Comp.*, (152) 35, 1980, 1063-1079.

[11] V. Lubet, *Couplage Potentiels retardés-Eléments finis pour la résolution d'un problème de diffraction d'ondes par un obstacle inhomogène,Thèse de Doctorat*, Université de Bordeaux I, 1991.

[12] V. Levillain, *Couplage élements finis équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*, *Thèse de Doctorat*, Ecole Polytechnique, 1991.

[13] C. Muller, *Foundations of the mathematical theory of electromagetic waves*, *Mc Graw Hill*, 1953.

[14] I. Terrasse, *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retardés*, *Thèse de Doctorat*, Ecole Polytechnique, 1993.