Potentiels Retardés pour les équations de Maxwell avec condition d'impédance généralisée

Toufic ABBOUD*† Toni SAYAH †

Abstract

We are interested by the scattering of a transient electromagnetic wave by a bounded obstacle characterized by a generalized impedance condition. We consider Engquist-Nédélec condition approximating thin dielectric layer, and the classical condition for thin dielectric layers with large indices. We prove that the retarded potential equation is well posed : coerciveness, existence and uniqueness properties. For each impedance condition, numerical validation are shown. We finally compare the two conditions.

1 Introduction

La résolution des équations de Maxwell avec une condition d'impédance généralisée intervient dans beaucoup d'applications pratiques comme l'approximation des couches minces. Nous appliquons la méthode des potentiels retardés dans quelques cas particuliers intéressants. Dans le domaine fréquentiel, plusieurs auteurs ont traité le problème. Bendali et Lemrabet [5] ont traité l'effet des couches minces sur la diffraction des ondes acoustiques. Ammari et Nédélec [3] ont traité le problème de diffraction d'une onde électromagnétique par un conducteur parfait recouvert d'une couche mince diélectrique. Ils ont traduit la couche diélectrique par la condition d'impédance d'Engquist-Nédélec et ont prouvé un théorème d'existence et unicité. Bendali et Vernhet proposent dans [7] une méthode de résolution par éléments finis du cas fréquentiel.
La méthode des équations intégrales sous la forme variationnelle espace-temps a été d'abord étudiée par A. Bamberger et T. Ha-Duong [8] en 1996, pour résoudre le problème de diffraction d'onde acoustique. Plusieurs auteurs ont par la suite utilisé cette méthode pour résoudre différents problèmes d'ondes. Nous citons les travaux de Y. Ding [11] pour les ondes acoustiques, de E. Bécache [9] pour les ondes élastiques. A. Pujols [10] a suivi la même démarche et a effectué une expérimentation numérique en dimension 2, pour résoudre le problème de diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle parfaitement conducteur. I. Terrasse [18] a poursuivi les travaux en 3D toujours pour un

*Centre de Mathématiques Appliquées - CNRS UMR 7641 Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

†IMACS - Ingénierie Mathématique et Calcul Scientifique - École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

obstacle parfaitement conducteur. Elle a introduit des nouveaux espaces fonctionnels qui ont permis d'avoir des résultats optimaux de regularité. Elle a présenté des résultats théoriques et umériques 3D. En 1995, V. Lange [13] a traité le problème de diffraction d'onde par un obstacle dissipatif tridimensionnel. Elle a traiter le problème pour une impédance constante complexe et s'est servie des espaces fonctionnels définis par [18] pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Ensuite, elle a présenté un schéma numérique constructif inconditionnellement stable ainsi que des réultats de comparaisons.

Dans ce rapport, nous traitons le problème pour une condition d'impédance géneralisée. Nous considérons la condition d'Engquist-Nédélec pour l'approximation des couches minces de diélectriques recouvrant un conducteur parfait et nous la comparons à la condition de Léontovitch. Nous proposons deux formulations variationnelles symétriques. Dans chaque application, nous remplaçons la couche par une condition d'impédance, démontrons des résultats théoriques d'existence et d'unicité et présentons des résultats numériques et des comparaisons dans le cas d'une shpère avec la solution de Mie.

2 Présentation du problème

Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^3$ et nous considérons un obstacle borné régulier Ω de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. La normale unitaire unitaire $\vec{n}$ est orientée vers l'extérieur de Ω sur Γ. L'ouvert extérieur Ω^{ext} est le complémentaire de l'obstacle $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^3$. Nous notons ε_0 et μ_0 les caractéristiques électromagnétiques du milieu extérieur.
La frontière Γ est composée d'une partie Γ^c conductrice et d'une partie Γ^z où les propriétés physiques sont données par une relation d'impédance généralisée. Cet obstacle est éclairé

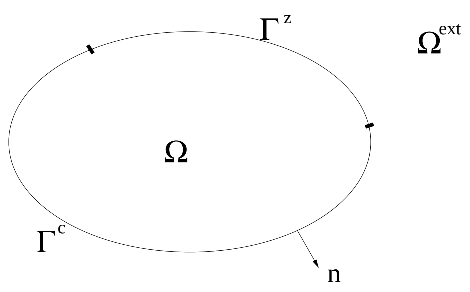


Figure 1: *L'obstacle*

par une onde incidente transitoire. On note $\vec{E}^i$ et $\vec{H}^i$ les champs électrique et magnétique incidents qui vérifient les équations de Maxwell :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}^i}{\partial t}(t,x) + \vec{rot}\vec{E}^i(t,x) & = & \vec{0} \\ \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}^i}{\partial t}(t,x) - \vec{rot}\vec{H}^i(t,x) & = & -\vec{j}_s(t,x) \\ div\ \varepsilon_0 \vec{E}^i(t,x) & = & \rho_s \\ div\ \mu_0 \vec{H}^i(t,x) & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

où $\vec{j}_s$ et ρ_s sont les courants et charges sources à support dans le milieu extérieur. Ils vérifient l'équation de continuité (ou équation de conservation de la charge) :

$$(2) \qquad \varepsilon_0 \frac{\partial \rho_s}{\partial t}(t,x) + div\vec{j}_s(t,x) = 0 \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

On suppose qu'au temps $t = 0$, l'onde incidente n'a pas encore atteint l'obstacle :

$$(3) \qquad \vec{E}^i(t,x) = \vec{0} \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_- \times \Omega$$

idem pour $\vec{H}^i$.

On note $\vec{E}^d$ et $\vec{H}^d$ les champs diffractés et $\vec{E}$ et $\vec{H}$ les champs totaux :

$$(4) \qquad \vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^d \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^d$$

Le champ électromagnétique total vérifie les équations de Maxwell :

$$
(5) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t,x) + \vec{rot}\vec{E}(t,x) & = & \vec{0} \\ \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x) - \vec{rot}\vec{H}(t,x) & = & -\vec{j}_s(t,x) \\ div \varepsilon_0 \vec{E}(t,x) & = & \rho_s \\ div \mu_0 \vec{H}(t,x) & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega^{ext}
$$

avec

$$
(6) \qquad \vec{E}^d(t,x) = \vec{0} \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_- \times \Omega^{ext}
$$

idem $\vec{H}^d(t,x)$. Ceci exprime la causalité.

Sur la partie conductrice de la frontière, nous imposons les conditions aux limites suivantes :

$$
(7) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{E}(t,x) \wedge \vec{n}(x) & = & \vec{0} \\ \vec{H}(t,x).\vec{n}(x) & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{pour } \; t \in \mathbb{R} \; ;
$$

et sur la partie Γ^z :

$$
(8) \qquad \vec{E}_{\Gamma^z} = Z_{t,x}(\vec{H} \wedge \vec{n}) \quad \text{pour } \; t \in \mathbb{R},
$$

où $Z_{t,x}$ est un opérateur linéaire de convolution (causale) en temps et en espace.
Nous prolongeons $Z_{t,x}$ par 0 sur Γ^c et nous notons

$$
\tilde{Z}_{t,x}(\vec{j})(t,x) = \left\{ \begin{array}{rl} Z_{t,x}(\vec{j})(t,x) & \text{sur } \Gamma^z \\ 0 & \text{sur } \Gamma^c \end{array} \right.
$$

Les équations (1), ..., (8) définissent notre problème. Ce problème noté (P), admet une solution unique dans les espaces *ad hoc* comme on le verra dans la suite.

3 Formulations intégrales

Dans ce paragraphe, nous remplaçons les équations de Maxwell dans le milieu extérieur par des représentations intégrales en fonction des charges et courants surfaciques sur Γ. Ceci conduit apr‘es traduction des conditions aux limites à deux équations intégrales. Nous énoçons formellement deux problèmes variationnels qui devraient être équivalents au problème initial.
Le problème (P) est du premier ordre. Il est équivalent à

$$
(P1)\left\{\begin{array}{rcll}
\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{\mu_0} r\vec{o}t \vec{E}(t,x) & = & \vec{0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega^{ext} \\
\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x) - \frac{1}{\varepsilon_0} r\vec{o}t \vec{H}(t,x) & = & -\frac{\vec{j}_s(t,x)}{\varepsilon_0} & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega^{ext} \\
\vec{E}_\Gamma(t,x) & = & \tilde{Z}_{t,x}(\vec{H}(t,x) \wedge \vec{n}) & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma \\
\vec{E}(t,x) & = & \vec{E}^i(t,x) & \text{pour } t \leq 0 \\
\vec{H}(t,x) & = & \vec{H}^i(t,x) & \text{pour } t \leq 0
\end{array}\right.
$$

Théorème 3.1 *Le problème (P1) est équivalent au problème suivant*

$$
(P2)\left\{\begin{array}{l}
\text{on cherche les courants } \vec{j} \text{ et } \vec{m} \text{ liés au champ électromagnétique par} \\
\quad \vec{j}(t,x) = -\vec{H}(t,x) \wedge \vec{n}(x) \\
\quad \vec{m}(t,x) = -\vec{n}(x) \wedge \vec{E}(t,x) \\
\\
\text{qui vérifient la condition de causalité} \\
\vec{j}(t,x) = \vec{m}(t,x) = \vec{0} \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_- \times \Gamma \\
\\
\text{Dans } \mathbb{R} \times \Omega^{ext},\ \vec{E} \text{ et } \vec{H} \text{ ont la représentation intégrale suivante} \\
\begin{array}{rcl}
\vec{E}(t,x) & = & \vec{E}^i(t,x) + \vec{\nabla} \int_\Gamma \frac{\int_0^{t-r/c} \vec{j}(\tau,y)d\tau}{4\varepsilon_0 \pi r} d\Gamma_y \\
 & & -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y - r\vec{o}t \int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\
\vec{H}(t,x) & = & \vec{H}^i(t,x) + \vec{\nabla} \int_\Gamma \frac{\int_0^{t-r/c} \vec{m}(\tau,y)d\tau}{4\mu_0 \pi r} d\Gamma_y \\
 & & -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y + r\vec{o}t \int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y
\end{array} \\
\text{avec } r = |x-y|, \text{l'onde incidente est définie par (1), (2) et (3)} \\
\\
\text{Résoudre le problème revient à imposer la condition aux limites :} \\
\vec{E}_\Gamma = \tilde{Z}_{t,x}(\vec{H}(t,x) \wedge \vec{n}) \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma
\end{array}\right.
$$

□

La trace tangentielle sur Γ des représentations intégrales de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ est donnée par

$$
(9)\quad \left\{
\begin{array}{rcl}
\dfrac{\vec{E}_\Gamma(t,x)}{2} & = & \vec{E}^i_\Gamma(t,x) - \vec{\nabla}_\Gamma \displaystyle\int_\Gamma \frac{\int_0^{t-r/c}\vec{j}(\tau,y)d\tau}{4\varepsilon_0\pi r} d\Gamma_y - \mu_0 \Pi_x \frac{\partial}{\partial t}\int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\
 & - & \Pi_x \displaystyle\int_\Gamma \nabla_x \left(\frac{1}{r}\right) \wedge \left(\vec{m}(t-r/c,y) + \frac{r}{c}\frac{\partial \vec{m}}{\partial t}(t-r/c,y) \right) d\Gamma_y \\
\dfrac{\vec{H}_\Gamma(t,x)}{2} & = & \vec{H}^i_\Gamma(t,x) - \vec{\nabla}_\Gamma \displaystyle\int_\Gamma \frac{\int_0^{t-r/c}\vec{m}(\tau,y)d\tau}{4\mu_0\pi r} d\Gamma_y - \varepsilon_0 \Pi_x \frac{\partial}{\partial t}\int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\
 & + & \Pi_x \displaystyle\int_\Gamma \nabla_x \left(\frac{1}{r}\right) \wedge \left(\vec{j}(t-r/c,y) + \frac{r}{c}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(t-r/c,y) \right) d\Gamma_y
\end{array}
\right.
$$

Pour alléger par la suite l'écriture des formules, nous introduisons les opérateurs surfaciques suivants :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
P^1_t(\vec{j}) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}_\Gamma \displaystyle\int_\Gamma \frac{\int_0^{t-r/c}\vec{j}(\tau,y)d\tau}{4\pi r} d\Gamma_y - \mu_0 \Pi_x \frac{\partial}{\partial t}\int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\
P^2_t(\vec{j}) = -\Pi_x \displaystyle\int_\Gamma \nabla_x \left(\frac{1}{r}\right) \wedge \left(\vec{j}(t-r/c,y) + \frac{r}{c}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(t-r/c,y) \right) d\Gamma_y
\end{array}
\right.
$$

En traduisant la condition aux limites dans la première équation de (9), on vérifie que tout couple $(\vec{j},\vec{m})$ solution du problème (P2) est solution du problème

$$
(\mathrm{P3})\left\{
\begin{array}{ll}
\text{Étant donné } \vec{E}^i_\Gamma \text{ et } \vec{H}^i_\Gamma & \\
\text{trouver } \vec{j} \text{ et } \vec{m} \text{ de type causal tel que} & \\
\vec{m} = \vec{0} & \text{sur } \mathbb{R}\times\Gamma^c \\
-\tilde{Z}_{t,x}(\vec{j}) + \dfrac{\vec{m}\wedge\vec{n}}{2} = \vec{E}^i_\Gamma + P^1_t(\vec{j}) + P^2_t(\vec{m}) & \text{sur } \mathbb{R}\times\Gamma \\
\dfrac{\vec{j}\wedge\vec{n}}{2} = \vec{H}^i_\Gamma + \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}P^1_t(\vec{m}) - P^2_t(\vec{j}) & \text{sur } \mathbb{R}\times\Gamma^z
\end{array}
\right.
$$

Dans le cas particulier où $Z_{t,x}$ est un opérateur inversible sur Γ^z, on note $Z^{-1}_{t,x}$ son inverse. tout couple $(\vec{j},\vec{m})$ solution du problème (P2) est aussi solution du problème

$$
(\mathrm{P4})\left\{
\begin{array}{ll}
\text{Étant donné } \vec{E}^i_\Gamma \text{ et } \vec{H}^i_\Gamma & \\
\text{trouver } \vec{j} \text{ et } \vec{m} \text{ de type causal tel que} & \\
\vec{m} = \vec{0} & \text{sur } \mathbb{R}\times\Gamma^c \\
-\dfrac{\tilde{Z}_{t,x}(\vec{j})}{2} = \vec{E}^i_\Gamma + P^1_t(\vec{j}) + P^2_t(\vec{m}) & \text{sur } \mathbb{R}\times\Gamma \\
\dfrac{\vec{n}\wedge Z^{-1}_{t,x}(\vec{n}\wedge\vec{m})}{2} = \vec{H}^i_\Gamma + \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}P^1_t(\vec{m}) - P^2_t(\vec{j}) & \text{sur } \mathbb{R}\times\Gamma^z
\end{array}
\right.
$$

Nous multiplions la première équation de (P3) par $e^{-2\sigma t}\vec{j}^t$ suffisament régulière sur Γ, et

nous intégrons sur Γ puis sur $\mathbb{R}$. Ensuite, Nous multiplions la deuxième équation de (P3) par $e^{-2\sigma t}\vec{m}^t$ suffisament régulière sur Γ^z, et nous intégrons sur Γ^z puis sur $\mathbb{R}$.
Nous introduisons la définition suivante

$$\langle \vec{j}, \vec{j}^t \rangle_{\sigma,\Gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} \int_{\Gamma} \vec{j}(t,x).\vec{j}^t(t,x) d\Gamma dt$$

Définition 3.2 *nous définissons les deux formes bilinéaires suivantes*

$$\begin{aligned} b_t^s(\vec{j}, \vec{m}, \vec{j}^t, \vec{m}^t) = \quad & \langle \tilde{Z}_{t,x}(\vec{j}), \vec{j}^t \rangle_{\sigma,\Gamma} - \frac{1}{2} \langle \vec{m} \wedge \vec{n}, \vec{j}^t \rangle_{\sigma,\Gamma} + \langle P_t^1(\vec{j}), \vec{j}^t \rangle_{\sigma,\Gamma} + \langle P_t^2(\vec{m}), \vec{j}^t \rangle_{\sigma,\Gamma} \\ & -\frac{1}{2} \langle \vec{j} \wedge \vec{n}, \vec{m}^t \rangle_{\sigma,\Gamma^z} + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \langle P_t^1(\vec{m}), \vec{j}^t \rangle_{\sigma,\Gamma^z} - \langle P_t^2(\vec{j}), \vec{m}^t \rangle_{\sigma,\Gamma^z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_t^c(\vec{j}, \vec{m}, \vec{j}^t, \vec{m}^t) = \quad & \frac{1}{2} \langle \tilde{Z}_{t,x}(\vec{j}), \vec{j}^t \rangle_{\sigma,\Gamma} + \langle P_t^1(\vec{j}), \vec{j}^t \rangle_{\sigma,\Gamma} + \langle P_t^2(\vec{m}), \vec{j}^t \rangle_{\sigma,\Gamma} \\ & \frac{1}{2} \langle Z_{t,x}^{-1}(\vec{n} \wedge \vec{m}), (\vec{n} \wedge \vec{m}^t) \rangle_{\sigma,\Gamma^z} + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \langle P_t^1(\vec{m}), \vec{j}^t \rangle_{\sigma,\Gamma^z} - \langle P_t^2(\vec{j}), \vec{m}^t \rangle_{\sigma,\Gamma^z} \end{aligned}$$

la forme bilinéaire b_t^c n'a de sens que dans le cas particulier où l'opérateur $Z_{t,x}$ est inversible.
Nous définissons aussi

$$L_t(\vec{j}^t, \vec{m}^t) = -\langle \vec{E}^i, \vec{j}^t \rangle_{\sigma,\Gamma} - \langle \vec{H}^i, \vec{m}^t \rangle_{\sigma,\Gamma^z}$$

Formellement, en notant $V_{t,j}^s \times V_{t,m}^s$ l'espace des courants $(\vec{j}, \vec{m})$ admissibles, le problème (P3) admet la formulation variationnelle suivante

$$(P_s^{v,t}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{j}, \vec{m}) \in V_{t,j}^s \times V_{t,m}^s \text{ tel que } \forall\ (\vec{j}^t, \vec{m}^t) \in V_{t,j}^s \times V_{t,m}^s \\ b_t^s(\vec{j}, \vec{m}, \vec{j}^t, \vec{m}^t) = L_t(\vec{j}^t, \vec{m}^t) \end{array} \right.$$

De même, le problème (P4) admet la formulation variationnelle suivante

$$(P_c^{v,t}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{j}, \vec{m}) \in V_{t,j}^c \times V_{t,m}^c \text{ tel que } \forall\ (\vec{j}^t, \vec{m}^t) \in V_{t,j}^c \times V_{t,m}^c \\ b_t^c(\vec{j}, \vec{m}, \vec{j}^t, \vec{m}^t) = L_t(\vec{j}^t, \vec{m}^t) \end{array} \right.$$

4 Domaine fréquentiel

Dans [2], nous avons rappelé un cadre fonctionnel introduit par Isabelle Terrasse [18]. Ce cadre nous a permis de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel grâce à la transformée de Fourier-Laplace, où la fréquence $\omega = \eta + i\sigma$ avec $\sigma > 0$. Dans ce paragraphe, nous étudions le problème fréquentiel et nous démontrons des inégalités et des propriétés qui nous permetteront grâce au théorème de Palay-Wiener de revenir au problème temporel. Ainsi, nous transportons tous les résultats fréquentiels au domaine temporel.

L'équivalent fréquentiel du problème temporel (P1) est le suivant

$$
(\mathrm{P1}^{\omega}) \begin{cases} -i\omega\vec{\mathcal{H}}(x) + \dfrac{1}{\mu_0} r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}(x) = \vec{0} & \text{pour } x \in \Omega^{ext} \\ -i\omega\vec{\mathcal{E}}(x) - \dfrac{1}{\varepsilon_0} r\vec{o}t\vec{\mathcal{H}}(x) = -\dfrac{\vec{j}_s(x)}{\varepsilon_0} & \text{pour } x \in \Omega^{ext} \\ \vec{n} \wedge \vec{\mathcal{E}}(x) \wedge \vec{n} = \tilde{\mathcal{Z}}_x(\vec{\mathcal{H}}(x) \wedge \vec{n}) & \text{pour } x \in \Gamma \end{cases}
$$

Où $\tilde{\mathcal{Z}}_x$ est la transformée de Fourier-Laplace de $\tilde{Z}_{t,x}$.

En fréquence, on introduit une condition de radiation. Dans le problème $(P1^{\omega})$, nous ne raisonnons pas avec une simple transformée de Fourier, mais à l'aide d'une transformée de Fourier-Laplace, possible grâce à la causalité. Prendre ω à partie imaginaire strictement positive fixe le comportement exponentiellement décroissant des inconnues transformées Laplace à l'infini. C'est cette condition qui permet le bon choix de la solution élémentaire :

$$
G(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}
$$

Comme dans le cas temporel, nous introduisons les opérateurs suivants

$$
P^1_{\omega}(\vec{\mathcal{J}}(y)) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\vec{\nabla}_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x,y)\ div_{\Gamma}\vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y + i\omega\mu_0 \Pi_x \int_{\Gamma} G(x,y)\ \vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y
$$
$$
P^2_{\omega}(\vec{\mathcal{J}}(y)) = -\Pi_x \int_{\Gamma} \nabla_x(G(x,y)) \wedge \vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y
$$

Théorème 4.1 *Le problème $(P1^{\omega})$ est équivalent au problème suivant*

$$
(P2^{\omega}) \begin{cases} \textit{On cherche les courants } \vec{j} \textit{ et } \vec{m} \textit{ liés au champ électromagnétique par} \\ \quad \vec{\mathcal{J}}(x) \;=\; -\vec{\mathcal{H}}(x) \wedge \vec{n}(x) \\ \quad \vec{\mathcal{M}}(x) \;=\; -\vec{n}(x) \wedge \vec{\mathcal{E}}(x) \qquad \text{pour } x \in \Gamma \\ \\ \textit{Dans } \Omega^{ext}, \vec{E} \textit{ et } \vec{H} \textit{ ont la représentation intégrale suivante} \\ \quad \dfrac{\vec{\mathcal{E}}_{\Gamma}(x)}{2} \;=\; \vec{\mathcal{E}}^i(x) + P^1_{\omega}(\vec{\mathcal{J}}) + P^2_{\omega}(\vec{\mathcal{M}}) \\ \quad \dfrac{\vec{\mathcal{H}}_{\Gamma}(x)}{2} \;=\; \vec{\mathcal{H}}^i(x) + \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0} P^1_{\omega}(\vec{\mathcal{M}}) - P^2_{\omega}(\vec{\mathcal{J}}) \\ \text{pour } x \in \Gamma; \\ \\ \textit{Résoudre le problème revient à imposer la condition aux limites :} \\ \vec{\mathcal{E}}_{\Gamma} = \tilde{\mathcal{Z}}_x(\vec{\mathcal{H}}(x) \wedge \vec{n}) \qquad \textit{pour } x \in \Gamma \end{cases}
$$

□

Tout couple $(\vec{j}, \vec{m})$ qui vérifie le problème $(P2^{\omega})$ vérifie le problème suivant

$$
(P3^\omega)\left\{
\begin{array}{ll}
\text{Étant donné } \vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma \text{ et } \vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma & \\
\text{trouver } \vec{\mathcal{J}}(x) \text{ et } \vec{\mathcal{M}}(x) \text{ tel que} & \\
\vec{\mathcal{M}} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma^c \\
-\tilde{\mathcal{Z}}_x(\vec{\mathcal{J}}) + \dfrac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{n}}{2} = \vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma + P^1_\omega(\vec{\mathcal{J}}) + P^2_\omega(\vec{\mathcal{M}}) & \text{sur } \Gamma \\
\dfrac{\vec{\mathcal{J}}(x) \wedge \vec{n}}{2} = \vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma + \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0} P^1_\omega(\vec{\mathcal{M}}) - P^2_\omega(\vec{\mathcal{J}}) & \text{sur } \Gamma^z
\end{array}
\right.
$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{Z}_x$ est un opérateur inversible sur Γ^z, nous notons $\mathcal{Z}_x^{-1}$ son inverse. Tout couple $(\vec{j}, \vec{m})$ solution de $(P2^\omega)$ est aussi solution du problème suivant

$$
(P4^\omega)\left\{
\begin{array}{ll}
\text{Étant donné } \vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma \text{ et } \vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma & \\
\text{trouver } \vec{\mathcal{J}}(x) \text{ et } \vec{\mathcal{M}}(x) \text{ tel que} & \\
\vec{\mathcal{M}} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma^c \\
-\dfrac{\tilde{\mathcal{Z}}_x(\vec{\mathcal{J}})}{2} = \vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma + P^1_\omega(\vec{\mathcal{J}}) + P^2_\omega(\vec{\mathcal{M}}) & \text{sur } \Gamma \\
\dfrac{\vec{n} \wedge \mathcal{Z}_x^{-1}(\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{M}})}{2} = \vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma + \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0} P^1_\omega(\vec{\mathcal{M}}) - P^2_\omega(\vec{\mathcal{J}}) & \text{sur } \Gamma^z
\end{array}
\right.
$$

□

Nous multiplions la première (resp. la deuxième équation) de $(P3^\omega)$ respectivement par $\vec{\mathcal{J}}^t$ (resp. par $\vec{\mathcal{M}}^t$) suffisament régulières sur Γ ($\vec{\mathcal{M}}^t = \vec{0}$ sur Γ^c). Nous intégrons sur Γ (resp. sur Γ^z) et nous définissons le produit scalaire

$$
\langle \vec{\mathcal{J}}, \bar{\vec{\mathcal{J}}}^t \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \vec{\mathcal{J}}(x).\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x) d\Gamma
$$

Définition 4.2 *nous définissons les deux formes bilinéaires suivantes*

$$
\begin{aligned}
b^\Gamma_\omega((\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) = \quad & \langle P^1_\omega(\vec{\mathcal{J}}), \vec{\mathcal{J}}^t \rangle_\Gamma + \langle P^2_\omega(\vec{\mathcal{M}}), \vec{\mathcal{J}}^t \rangle_{\Gamma^z} \\
& + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \langle P^1_\omega(\vec{\mathcal{M}}), \vec{\mathcal{M}}^t \rangle_{\Gamma^z} - \langle P^2_\omega(\vec{\mathcal{J}}), \vec{\mathcal{M}}^t \rangle_{\Gamma^z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b^s_\omega(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) \; = \; & \langle \tilde{Z}_{t,x}(\vec{\mathcal{J}}), \vec{\mathcal{J}}^t \rangle_\Gamma - \frac{1}{2} \langle \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{n}, \vec{\mathcal{J}}^t \rangle_{\Gamma^z} - \frac{1}{2} \langle \vec{\mathcal{J}} \wedge \vec{n}, \vec{\mathcal{M}}^t \rangle_{\Gamma^z} \\
+ \; & b^\Gamma_\omega((\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t)
\end{aligned}
$$

$$
b^c_\omega(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) = \frac{1}{2} \langle \tilde{Z}_{t,x}(\vec{\mathcal{J}}), \vec{\mathcal{J}}^t \rangle_\Gamma + \frac{1}{2} \langle Z^{-1}_{t,x}(\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{M}}), (\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{M}}^t) \rangle_{\Gamma^z} + b^\Gamma_\omega((\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t)
$$

la forme bilinéaire b^c_t n'a pas de sens que dans le cas particulier où l'opérateur $Z_{t,x}$ est inversible. Nous définissons aussi

$$
L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) = -\langle \vec{E}^i, \vec{\mathcal{J}}^t \rangle_\Gamma - \langle \vec{H}^i, \vec{\mathcal{M}}^t \rangle_{\Gamma^z}
$$

Formellement, en notant $V^s_{\omega,j} \times V^s_{\omega,m}$ l'espace des courants $(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}})$ admissibles, le problème $(P3^\omega)$ admet la formulation variationnelle suivante

$$(P_s^{v,\omega}) \begin{cases} \text{Trouver } (\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}) \in V^s_{\omega,j} \times V^s_{\omega,m} \text{ tel que } \forall\ (\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) \in V^s_{\omega,j} \times V^s_{\omega,m} \\ b^s_\omega(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) = L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) \end{cases}$$

De même, le problème $(P4^\omega)$ admet la formulation variationnelle suivante

$$(P_c^{v,\omega}) \begin{cases} \text{Trouver } (\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}) \in V^c_{\omega,j} \times V^c_{\omega,m} \text{ tel que } \forall\ (\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) \in V^c_{\omega,j} \times V^c_{\omega,m} \\ b^c_\omega(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) = L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) \end{cases}$$

5 Première application : Approximation de "Engquist-Nédélec" pour les couches minces

Dans ce paragraphe, nous étudions une première application pratique qui peut nous ramener à un problème d'impédance. Nous commençons par présenter le problème temporel. Ensuite nous passons au domaine fréquentiel pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Enfin, nous revenons au domaine temporel pour démontrer des résultats théoriques et pour présenter des résultats de validation numériques.

5.1 Présentation du problème :

Nous considérons un domaine borné Ω^c de surface Γ^0. Nous supposons que Ω est un conducteur parfait recouvert d'une couche mince diélectrique Ω^d d'épaisseur constante δ, de caractéristiques électromagnétiques ε, μ et de surface extérieur Γ^z. $\vec{n}$ ext toujours la normale estérieur à Γ^z. Nous posons $\Omega = \Omega^c \cup \Omega^z$ et Ω^{ext} le complémentaire de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^3$.

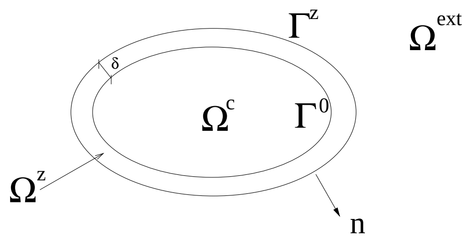


Figure 2:

Nous supposons que l'épaisseur δ est petite devant la longueur d'onde et les autres longueurs caractéristiques. Dans [?], Engquist et Nédélec proposent une condition d'impédance fréquentielle qui approche au premier ordre en δ l'effet de la couche mince :

$$\vec{\mathcal{E}}_{\Gamma^z} = \delta \ \left(-\frac{1}{i\omega\varepsilon}\nabla_{\Gamma^z} \ div_{\Gamma^z}(\vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{n}) + i\omega\mu\vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{n}\right)$$

D'où l'opérateur d'impédance

$$\tilde{\mathcal{Z}}_x(\vec{\mathcal{J}}) = \delta \ \left(-\frac{1}{i\omega\varepsilon}\nabla_{\Gamma^z} \ div_{\Gamma^z}(\vec{\mathcal{J}}) + i\omega\mu\vec{\mathcal{J}}\right)$$

Cette approximation se traduit dans le domaine temporel de la façon suivante

$$\vec{E}_{\Gamma^z}(t,x) = \delta \ \left(-\frac{1}{\varepsilon}\nabla_{\Gamma_0} \ div_{\Gamma_0} \int_0^t \vec{j}(\tau,x)d\tau + \mu\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t,x)\right)$$

Ici, l'opérateur d'impédance sur $\Gamma = \Gamma^z$ s'écrit

$$\tilde{Z}_{t,x}(\vec{j}) = \delta \ \left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla_{\Gamma_0} \ div_{\Gamma_0} \int_0^t \vec{j}(\tau,x)d\tau - \mu\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t,x)\right)$$

5.2 Résultats en fréquence

Dans ce paragraphe, nous allons traiter le problème variationnel ($P_s^{v,t}$). Pour le choix des espaces de travail, remarquons que

$$\langle \tilde{Z}_{t,x}(\vec{\mathcal{J}}), \vec{\mathcal{J}}^t \rangle_\Gamma = \delta \left(\frac{1}{i\omega\varepsilon} \langle div_\Gamma \vec{\mathcal{J}}, div_\Gamma \vec{\mathcal{J}}^t \rangle_\Gamma + i\omega\mu \langle \vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{J}}^t \rangle_\Gamma \right)$$

Ceci suggère de chercher $\vec{\mathcal{J}}$ dans $TH(div,\Gamma)$. Pour $\vec{\mathcal{M}}$, la forme sesquilinéaire b_ω^s est bien définie avec des courants $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{\mathcal{M}}^t$ dans $TH^{-1/2}(div,\Gamma)$. On note

$$\begin{cases} V_{\omega,j} = TH(div,\Gamma) \\ V_{\omega,m} = TH^{-1/2}(div,\Gamma) \\ V_\omega = V_{\omega,j} \times V_{\omega,m} \end{cases}$$

Le problème variationnel associé est le suivant

$$(P_{en}^{v,\omega}) \begin{cases} \text{Trouver } (\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}) \in V_\omega \text{ tel que } \forall \ (\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) \in V_\omega \\ b_\omega^s(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) = L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t) \end{cases}$$

Théorème 5.1 *Pour ($\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i, \vec{\mathcal{H}}_\Gamma^i$) dans ${V_\omega}'$, le problème variationnel ($P_{en}^{v,\omega}$) admet une unique solution ($\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}$) dans V_ω et nous avons la majoration suivante*

$$\begin{aligned} &\left(\delta \|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{0,\omega,div_\Gamma} + |\omega|^{-1} (\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma})\right)^{1/2} \\ &\qquad \le \frac{C}{\sigma} \left(\frac{1}{\delta} \|\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i\|^2_{-1,\omega,rot_\Gamma} + |\omega| \|\vec{\mathcal{H}}_\Gamma^i\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Si $\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i \in TH^{-1/2}(rot,\Gamma)$, on a

$$\begin{aligned} &\left(\delta \|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{0,\omega,div_\Gamma} + |\omega|^{-1} (\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma})\right)^{1/2} \\ &\qquad \le \frac{C}{\sigma} \left(|\omega| \|\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma} + |\omega| \|\vec{\mathcal{H}}_\Gamma^i\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Preuve : La forme sesquilinéaire b_ω^Γ est continue dans $TH^{-1/2}(div,\Gamma) \times TH^{-1/2}(div,\Gamma)$ (voir [2]). Ce qui conduit à dire qu'elle est continue dans V_ω d'après la définition de l'espace $V_\omega \subset TH^{-1/2}(div,\Gamma) \times TH^{-1/2}(div,\Gamma)$. Ceci entraine la continuité de b_ω^s dans V_ω. De plus, elle est coercive. En effet, considérons la partie réelle de b_ω^s

$$\begin{cases} -\Re e(b_\omega^s(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}})) & = & -\Re e(\frac{1}{2} \langle \tilde{Z}_x(\vec{\mathcal{J}}), \vec{\mathcal{J}} \rangle_\Gamma) \\ & + & \frac{1}{2} \Re e(\langle \vec{\mathcal{J}} \wedge \vec{n}, \vec{\mathcal{M}} \rangle_\Gamma + \langle \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{n}, \vec{\mathcal{J}} \rangle_\Gamma) \\ & - & \Re e(b_\omega^\Gamma(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}})) \end{cases}$$

La coercivité du terme $\Re e(b_\omega^\Gamma)$ dans $TH^{-1/2}(div,\Gamma) \times TH^{-1/2}(div,\Gamma)$ a été démontrée dans [2] avec

$$-\Re e(b_\omega^\Gamma(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}})) \ge C\sigma |\omega|^{-1} \left(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} \right)$$

D'après l'expression de l'opérateur $\tilde{Z}_x$, on peut tirer

$$-\Re e(\frac{1}{2}\langle \tilde{Z}_x(\vec{\mathcal{J}}), \vec{\mathcal{J}}\rangle_\Gamma) \geq \delta C\sigma \|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{0,\omega,div_\Gamma}$$

On a de plus

$$\frac{1}{2}\Re e(\langle \vec{\mathcal{J}} \wedge \vec{n}, \vec{\mathcal{M}}\rangle_\Gamma + \langle \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{n}, \vec{\mathcal{J}}\rangle_\Gamma) = 0$$

D'où

$$-\Re e(b^s_\omega(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}})) \ \geq \ C\sigma|\omega|^{-1}\left(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\right) + \ \delta C\sigma\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{0,\omega,div_\Gamma}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, on déduit l'existence et l'unicité de la solution. De plus, on a

$$\begin{aligned}
|b^s_\omega(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}})| &= |L_\omega(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}})| \\
&= |\langle \vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma \ , \ \vec{\mathcal{J}}\rangle_\Gamma + \langle \vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma \ , \ \vec{\mathcal{M}}\rangle_\Gamma| \\
&\leq \left(\frac{1}{\delta}\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{-1,\omega,rot_\Gamma} + |\omega|\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\right)^{1/2} \\
&\quad \left(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{0,\omega,div_\Gamma} + |\omega|^{-1}\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{1}{\delta}\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{-1,\omega,rot_\Gamma} + |\omega|\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\right)^{1/2} \\
&\quad \left(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{0,\omega,div_\Gamma} + |\omega|^{-1}\left(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\right)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

D'où la première inégalité. Pour la deuxième, on écrit

$$|\langle \vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma \ , \ \vec{\mathcal{J}}\rangle_\Gamma| \leq (|\omega|^{1/2}\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|_{-1/2,\omega,rot_\Gamma})(|\omega|^{-1/2}\|\vec{\mathcal{J}}_\Gamma\|_{-1/2,\omega,div_\Gamma})$$

□

5.3 Résultats en temps

Nous allons transporter les résultats fréquentiels au domaine temporel grâce à la transformée de Fourier inverse et à la formule de Parseval. I. Terrasse [18] a introduit des espaces fonctionnels couplant espace-temps. Pour $s \in \mathbb{R}$, nous introduisons les espaces

$$\begin{cases} V_{t,j} = H^s_\sigma(\mathbb{R}_+, TH(div, \Gamma)) \\ V_{t,m} = H^{s-1/2}_\sigma(\mathbb{R}_+, TH^{-1/2}(div, \Gamma)) \\ V_t = V_{t,j} \times V_{t,m} \end{cases}$$

Théorème 5.2 *Le problème variationnel associé au problème (P3) est le suivant*

$$(P^{v,t}_{en})\begin{cases} \textit{Trouver } (\vec{j}, \vec{m}) \textit{ dans } V_t \textit{ tel que :} \\ \forall(\vec{j}^t, \vec{m}^t) \textit{ dans } V_t, \textit{ on a} \\ b^s_t(\vec{j}, \vec{m}, \vec{j}^t, \vec{m}^t) = L_t(\vec{j}^t, \vec{m}^t) \end{cases}$$

avec

$$b_t^s((\vec{j},\vec{m}),(\vec{j}^t,\vec{m}^t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} b_\omega^s((\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{M}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t))d\omega$$
$$L_t(\vec{j}^t,\vec{m}^t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t)d\omega$$

où $\vec{\mathcal{J}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$ sont les transformées Fourier-Laplace de $\vec{j}$ et $\vec{m}$.

Pour $(\vec{E}_\Gamma^i,\vec{H}_\Gamma^i) \in H_\sigma^s(\mathbb{R}_+, TH^{-1}(rot,\Gamma)) \times H_\sigma^{s+1/2}(\mathbb{R}_+, TH^{-1/2}(rot,\Gamma))$, il admet une unique solution et on a la majoration

$$\begin{aligned}\Big(\delta\|\vec{j}\|^2_{s,\sigma,TH(div,\Gamma)} &+ \|\vec{j}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)} + \|\vec{m}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)}\Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\sigma}\Big(\frac{1}{\delta}\|\vec{E}_\Gamma^i\|^2_{s,\sigma,TH^{-1}(rot,\Gamma)} + \|\vec{H}_\Gamma^i\|^2_{s+1/2,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)}\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

Pour $(\vec{E}_\Gamma^i,\vec{H}_\Gamma^i) \in H_\sigma^{s+1/2}(\mathbb{R}_+, TH^{-1/2}(rot,\Gamma)) \times H_\sigma^{s+1/2}(\mathbb{R}_+, TH^{-1/2}(rot,\Gamma))$, il admet une unique solution et on a la majoration

$$\begin{aligned}\Big(\delta\|\vec{j}\|^2_{s,\sigma,TH(div,\Gamma)} &+ \|\vec{j}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)} + \|\vec{m}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)}\Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\sigma}\Big(\|\vec{E}_\Gamma^i\|^2_{s+1/2,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)} + \|\vec{H}_\Gamma^i\|^2_{s+1/2,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)}\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

Preuve : Comme $\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i$ est la transformée de Fourier-Laplace du champ $\vec{E}_\Gamma^i$ qui est causal, le théorème de Paley-Wiener (voir [18] page 50) nous permet d'écrire

$$(\text{pw})\begin{cases}\text{Il existe des constantes } C>0 \text{ et } k\in\mathbb{N} \text{ tel que}\\ \|\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i\|_{-1,\omega,rot_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{H}}_\Gamma^i\|_{-1,\omega,rot_\Gamma} \leq C(1+|\omega|)^k\end{cases}$$

L'inégalité démontrée dans le théorème (5.1) nous permet de déduire que les courants $\vec{\mathcal{J}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$ vérifient une condition similaire à (pw) avec les normes non indéxées. Une deuxième application du théorème de Paley-Wiener entraîne que le couple $(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})$ est la transformée de Fourier-Laplace d'un certain couple temporel causal $(\vec{j},\vec{m})$.
Nous appliquons le théorème de Parseval à la formulation variationnelle fréquentielle

$$b_\omega^s((\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}),(\vec{\mathcal{J}}^t,\bar{\vec{\mathcal{M}}}^t)) = L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t,\bar{\vec{\mathcal{M}}}^t)$$

Nous obtenons le problème variationnel du haut avec

$$\begin{aligned}b_t^s((\vec{j},\vec{m}),(\vec{j}^t,\vec{m}^t)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} b_\omega^s((\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}),(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t))d\omega \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma}\Big(b_\omega^s((\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}),(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t))d\omega + \overline{b_\omega^s((\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}),(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t))}d\omega\Big) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma}\Re e\Big(b_\omega^s((\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}),(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t))d\omega\Big)\end{aligned}$$

Cette forme bilinéaire est coercive et on a existence et unicité de la solution. En multipliant l'inégalité du théorème (5.1) par $|\omega|^{2s}$ et en intégrant entre $-\infty+i\sigma$ et $+\infty+i\sigma$, on obtient les inégalités de continuité. $\square$

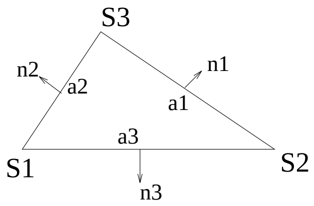
5.4 Discrétisation et résultats numériques

Pour la discrétisation, on va prendre $\sigma = 0$. On discrétise la surface Γ par des triangles et on note τ_h le maillage obtenu. On découpe la demi-droite temps positifs en des intervalles $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ où Δt est déterminé à partir du cfl=$\frac{\Delta t}{\Delta x}$ où Δx est la longueur de la plus grande arête du maillage.
Dans ce qui suit, 1_T désignera la fonction caractéristique d'un élément T de la triangulation τ_h, on note $|T|$ sa mesure. De même $1_{[t_n,t_{n+1}]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$.

On prend des courants surfaciques $\vec{j}$ dans l'espace des éléments finis H(div) de degré 1 (Raviart-Thomas) en espace, polynômes de degrés 1 en temps. Les courants peuvent s'écrire sous la forme : $\vec{j}(t,x) = \sum_{n\geq 0} \vec{j}(t_n, x) = \sum_{n\geq 0} \vec{j}^n(x)\beta^n(t)$
où $\vec{j}^n(x)$ est le courant au temps t_n et $\beta^n(t)$ la fonction de base temps

$$\beta^n(t) = \begin{cases} t - t_n & pour\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ 0 & pour\ t < t_n \\ \Delta t & pour\ t \geq t_{n+1} \end{cases}$$

Localement dans chaque triangle, on note n_i la normal sortante sur a_i.



On désigne par $\lambda^n_{i,T} = \int_{a_i} \vec{j}^n(x).\vec{n}_{i,T} dl_i$ (i=1,2,3) le flux à travers l'arête a_i au temps $t_n = n\Delta t$. $\lambda^n_{i,T}$ est le degrés de liberté associé a a_i. On note $\vec{W}_{i,T}(M) = \frac{\vec{S_iM}}{2|T|}1_T$ la fonction de base espace associée à a_i où S_i est le sommet opposé à cette arête; on aura $div_T\vec{W}_{i,T} = \frac{1_T}{|T|}$. Le courant $\vec{j}(t,x)$ peut alors s'écrire :

$$\vec{j}(t,x) = \sum_{n\geq 1} \vec{j}^n(x)\beta^n(t) = \sum_{n\geq 1} \beta^n(t) \sum_{T\in\tau_h} \sum_{i=1}^{3} \lambda^n_{i,T}\vec{W}_{i,T}(x)$$

Les fonctions tests $\vec{j}^t(t,x)$ sont définies pour chaque pas de temps $t = t_n$

$$\vec{j}^t(t_n, x) = \vec{j}^t(x)\beta^n_0(t_n)$$

avec

$$\beta^n_0(t_n) = \begin{cases} 1 & pour\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

On discrétise $\vec{m}$ de la même manière que $\vec{j}$

$$m(t,x) = \sum_{n\geq 1} \beta^n(t) \sum_{T\in Q\in\tau_{eh}} \sum_{i=1}^{3} \nu^n_{i,T}\frac{\vec{S_iX}}{2|T|}$$

où ν est le flux du champ $\vec{m}$ à travers les arêtes du maillage.

5.5 Schéma numérique

Le système matriciel équivalent à la formulation variationnelle $(P_{en}^{v,t})$ discrète est de la forme

$$\sum_{k=0}^{N} A_1^k \lambda^{n-k} + \sum_{k=0}^{N} C^k \nu^{n-k} = {b_1}^n$$
$$\sum_{k=0}^{N} A_2^k \nu^{n-k} + \sum_{k=0}^{N} C^k \lambda^{n-k} = {b_2}^n$$

où

- N est le nombre des matrices A^i déterminé par la taille de l'objet étudié et le pas de temps Δt.
- λ^n le vecteur flux $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, ...)$ qui correspond au flux du courant surfacique j^n au temps t_n.
- ν^n le vecteur flux $(\nu^1, \nu^2, \nu^3, ...)$ qui correspond au flux du courant surfacique m^n au temps t_n.
- A_1^k *et* A_2^k sont des matrices de dimension (nds, nds) où nds : nombre de degrés de liberté surfaciques du maillage. Elles représentent les interactions électrique-électrique et magnétique-magnétique à distance $k\delta t$.
- C^k sont des matrices de dimension (nds, nds). Elles représentent les termes de couplage à distance $k\delta t$.

On a remarqué que ce schéma est convergent et inconditionnellement stable. Les matrices sont creuses. D'où l'avantage du stockage morse.

5.6 Résultats numériques

Les champs incidents choisis sont des gaussiennes

$$\vec{E}^{inc}(t,x) = f(t - t_0 + \vec{u}.\vec{x})\ \vec{E}_0$$
$$\vec{H}^{inc}(t,x) = f(t - t_0 + \vec{u}.\vec{x})\ \vec{H}_0$$

où $f(\tau) = (1 - \frac{\tau^2}{\sigma^2})e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}$, t_0 est choisi de sorte que l'onde arrive sur l'objet à $t = 0$. $\vec{u}$ est la direction de propagation.

On calcule la SER monostatique après FFT. Rappelons que

$$SERmono = 20log_{10}(\frac{|\vec{\mathcal{E}}^d|}{|\vec{\mathcal{E}}^i|})$$

$$\vec{\mathcal{E}}^d(k,x) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\nabla\int_\Gamma G(x,y)div_\Gamma\vec{\mathcal{J}}(y)dy + i\omega\mu_0\int_\Gamma G(x,y)\vec{\mathcal{J}}(y)dy - \int_\Gamma \nabla_x G(x,y)\wedge\vec{\mathcal{M}}(y)dy$$

où $G(x,y)$ est la solution élémentaire de l'équation de Helmholtz :

$$G(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \ ,$$

Les résultats numériques sont calculés pour une sphère de rayon 1m et un ellipsoïde de grands axes (.3m,.3m,1m) de 720 triangles. Ces dimensions sont calculées pour l'obstacle avec la couche diélectrique. L'incidence est toujours suivant l'axe des z. Pour toute la suite, f_{5pts} veut dire la fréquence qui correspond à 5 points par longueur d'onde dans la couche. δ/λ_{cou} désigne le rapport de l'épaisseur sur la plus petite longueur d'onde (dans la couche) qui donne un bon résultat. Le cfl choisi est de 0.5.

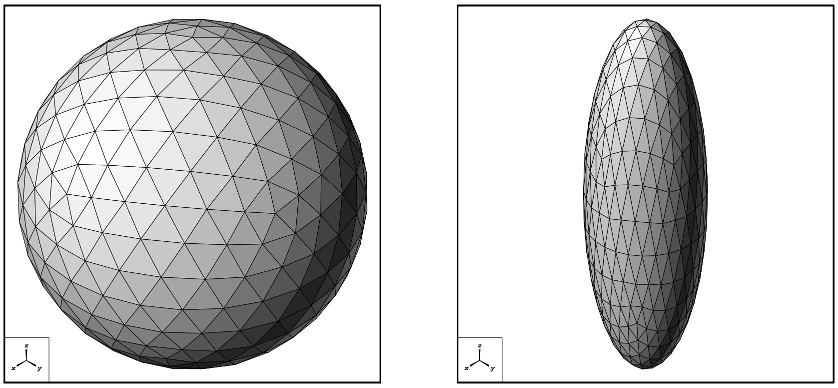


Figure 3: Maillages d'une sphère (rayon=1m) et d'un ellipsoïde (.3m,.3m,1.m) de 720 triangles

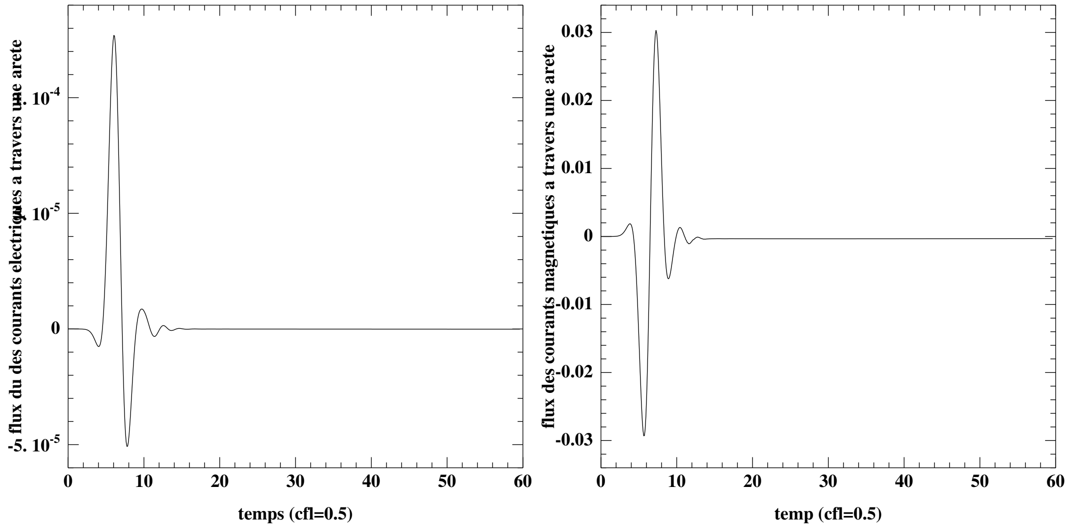


Figure 4: Les flux respectifs des courants électrique et magnétique à travers une arête du maillage. (Maillage de la sphère avec $\sigma = 1.$, cfl $= 0.5$). L'épaisseur de la couche est de .05m

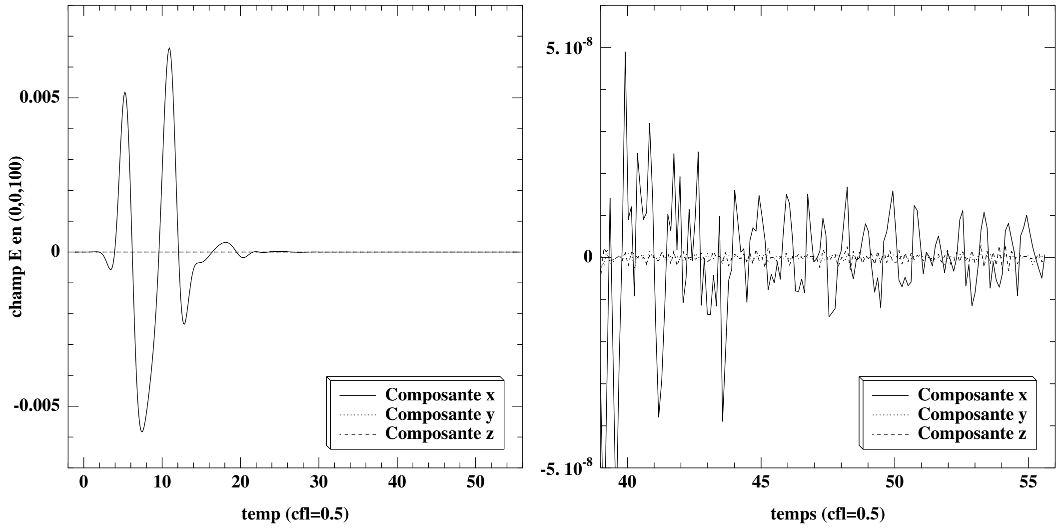


Figure 5: La première figure montre les trois conposantes du champ électrique calculé au point (0,0,100). L'onde incidente est suivant l'axe des z, la polarisation est suivant l'axe des x, ce qui justifie la nullité des deuxième et troisième composantes. La deuxième figure constitue un zoom qui montre comment le champ s'annule. (Maillage de la sphère avec : incidence suivant l'axe des z, $\sigma = 1.$ et cfl $= 0.5$)

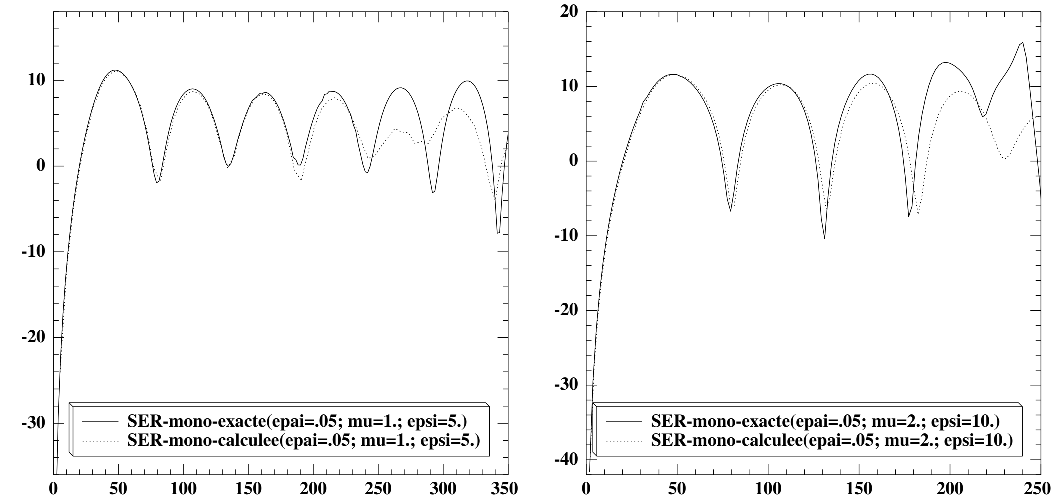


Figure 6: SER monostatique. Maillage de sphère de 720 triangles. L'épaisseur de la couche $= .05$m. f_{5pts} vaut respectivement $118Mhz$ et $56Mhz$. δ/λ_{cou} vaut respectivement 0.075 et 0.07.

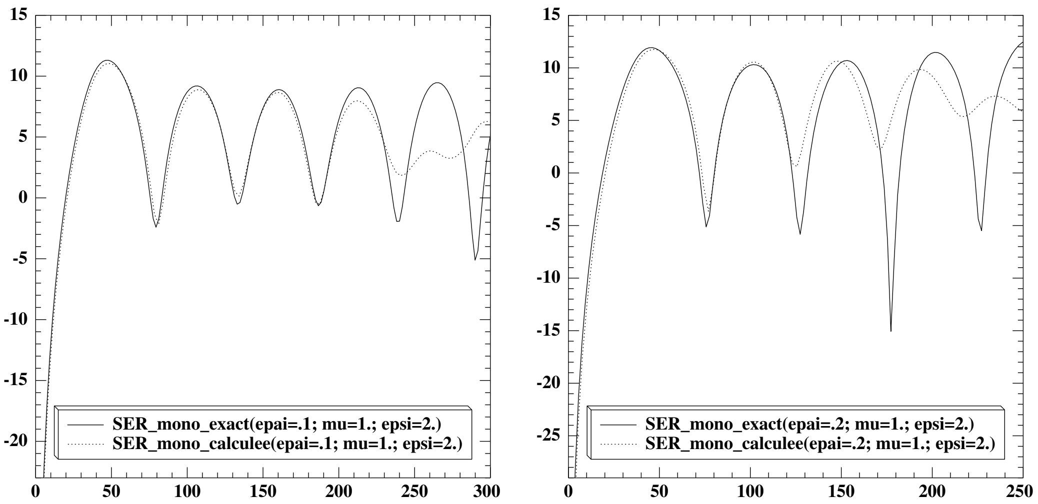


Figure 7: SER monostatique. Maillage de sphère de 720 triangles. Première figure : épaisseur = .1m; Deuxième figure épaisseur = .2m. f_{5pts} vaut $187 Mhz$. δ/λ_{cou} vaut respectivement 0.1 et 0.113.

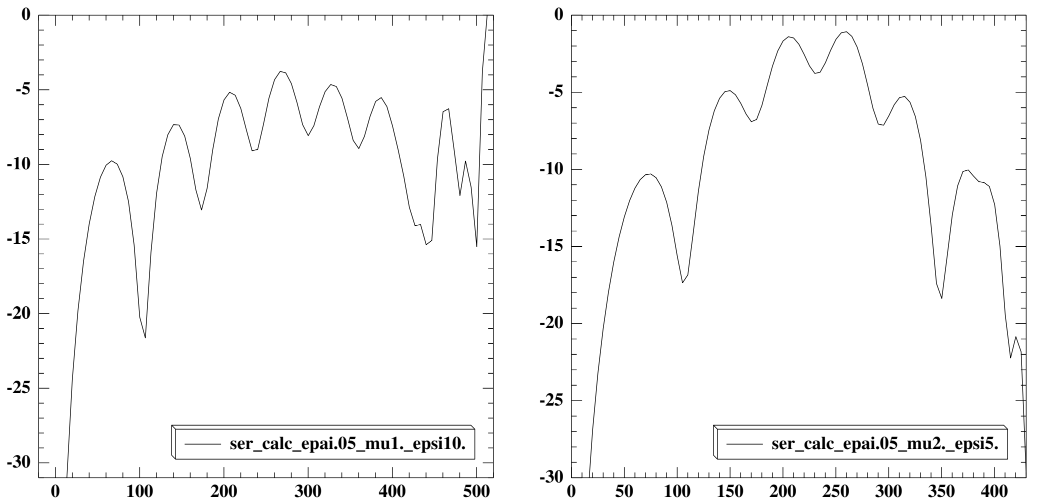


Figure 8: SER monostatique. Maillage de l'ellipsoïde de 720 triangles. L'épaisseur de la couche =.05m. f_{5pts} vaut respectivement $100 Mhz$ et $32 Mhz$.

6 Deuxième application : Couche mince diélectrique avec $\epsilon_r \mu_r$ très grand devant l'unité

Dans cette application, nous reprenons le problème précédent avec les mêmes définitions et notations. Nous introduisons les caractéristiques relatives $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ et $\mu_r = \mu/\mu_0$. Nous supposons de plus que le produit $\varepsilon_r \mu_r$ est très grand devant 1.

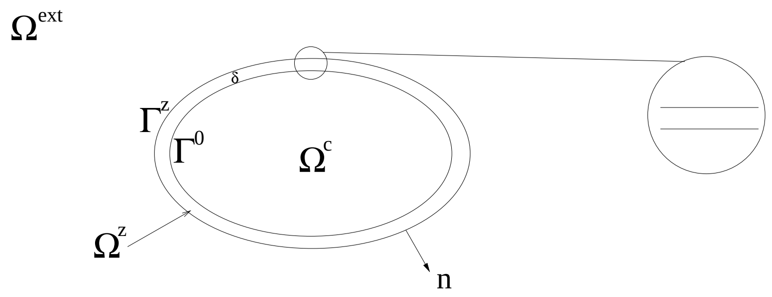


Figure 9: *L'obstacle*

Nous supposons de plus que la surface $\Gamma = \Gamma^z$ est assez régulière. En chaque point x_0, on suppose que l'onde incidente arrive avec une certaine incidence. Elle se réfracte dans la couche diélectrique avec un vecteur d'onde $\vec{k}^1(x_{\Gamma_0})$. Nous posons

$$\alpha = \vec{n}.\vec{k}^1(x_{\Gamma_0})$$

Comme le produit $\varepsilon_r \mu_r$ est grand devant l'unité, nous pouvons approcher α par la relation suivante

$$\alpha = \frac{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}\omega}{c}$$

En fréquentiel, le champ électromagnétique dans Ω peut être approché par les relations

$$\vec{\mathcal{E}}_\Gamma(x) = \vec{\mathcal{E}}_{\Gamma_0}(x_{\Gamma_0}) sin(\alpha(s+\delta))$$
$$\vec{\mathcal{E}}_n(x) = \vec{\mathcal{E}}_n(x_{\Gamma_0}) cos(\alpha(s+\delta))$$

où $\vec{\mathcal{E}}_\Gamma$ et $\vec{\mathcal{E}}_n$ sont respectievement les composantes surfacique et normale du champ, s la variable normale comprise entre $-\delta$ et 0. Les traces du champ électromagnétique vérifient alors sur Γ la relation connue :

$$\vec{\mathcal{E}}_\Gamma = i\omega\mu \frac{tg(\alpha\delta)}{\alpha}(\vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{n}) = -i\omega\mu\delta\vec{\mathcal{J}}$$

Nous supposons que l'épaisseur δ est très petite de sorte qu'on peut approcher $tg(\alpha\delta)$ par $(\alpha\delta)$. On obtient

$$\vec{\mathcal{E}}_\Gamma = i\omega\mu\delta(\vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{n})$$

On remarque bien que cette approximation constitue une partie de l'approximation précédente "Engquist-Nedelec". On peut interpréter cela comme conséquence du fait que le produit $\varepsilon_r \mu_r$ est grand devant l'unité.

On obtient ainsi l'opérateur d'impédance

$$\mathcal{Z}_x(\mathcal{J}) = i\omega\mu\delta\mathcal{J}$$

Dans ce cas particulier, l'opérateur inverse $\mathcal{Z}_x^{-1}$ existe

$$\vec{\mathcal{J}} = -\mathcal{Z}_x^{-1}(\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{M}}) = -\frac{1}{i\omega\mu\delta}(\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{M}})$$

L'équivalent temporel de cette condition d'impédance est

$$\tilde{Z}_{t,x}(\vec{j}) = -\delta\ \mu\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t,x)$$

de même son inverse est défini par

$$Z_{t,x}^{-1}(\vec{n} \wedge \vec{m}) = -\frac{1}{\delta\ \mu}\int_0^t (\vec{n} \wedge \vec{m}(t,x))dt$$

C'est cette relation d'impédance qu'on va étudier.

6.1 Résultats en fréquence

Dans ce paragraphe, on va traiter les deux formulations variationnelles $(P_s^{v,\omega})$ et $(P_c^{v,\omega})$.

On commence par la formulation $(P_s^{v,\omega})$. On choisit $\vec{\mathcal{J}}$ dans $V_{\omega,j}^s = TH^{-1/2}(div,\Gamma) \cap TL^2(\Gamma)$ et $\vec{\mathcal{M}}$ dans $V_{\omega,m}^s = TH^{-1/2}(div,\Gamma)$. On note

$$V_\omega^s = V_{\omega,j}^s \times V_{\omega,m}^s$$

Théorème 6.1 *Le problème variationnel*

$$(P_s^{v,\omega})\begin{cases} \text{Trouver } (\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}) \in V_\omega^s \text{ tel que } \forall\ (\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t) \in V_\omega^s \\ b_\omega^s(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t) = L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t) \end{cases}$$

admet une unique solution pour tout couple $(\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i, \vec{\mathcal{H}}_\Gamma^i)$ dans le dual de V_ω^s. Si $\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i \in TL^2(\Gamma)$ on a

$$\begin{aligned}\Big(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{TL^2(\Gamma)} + |\omega|^{-1}(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} &+ \|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma})\Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\sigma}\left(\frac{1}{\delta}\|\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i\|^2_{TL^2(\Gamma)} + |\omega|\|\vec{\mathcal{H}}_\Gamma^i\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Si $\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i \in TH^{-1/2}(rot,\Gamma)$ on a

$$\begin{aligned}\Big(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{TL^2(\Gamma)} + |\omega|^{-1}(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} &+ \|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma})\Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\sigma}\ |\omega|^{1/2}\left(\|\vec{\mathcal{E}}_\Gamma^i\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{H}}_\Gamma^i\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Preuve : La forme bilinéaire b^s_ω est continue dans V^s_ω. De plus, elle est coersive. En effet, en poursuivant la même démarche suivie dans la première application, on peut tirer tout de suite

$$-\Re e(b^s_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})) \ \geq \ C\sigma\left(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{TL^2(\Gamma)}+|\omega|^{-1}(\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma})\right)$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, on déduit l'existence et l'unicité de la solution. De plus, on a

$$\begin{array}{rcl}
|b^s_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})| & = & |L_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}) \\
& \leq & \left(\frac{1}{\delta}\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{TL^2(\Gamma)}\|+|\omega|\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\right)^{1/2} \\
& & \left(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{TL^2(\Gamma)}+|\omega|^{-1}\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\right)^{1/2} \\
& \leq & \left(\frac{1}{\delta}\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{TL^2(\Gamma)}\|+|\omega|\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\right)^{1/2} \\
& & \left(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{TL^2(\Gamma)}+|\omega|^{-1}\left(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\right)\right)^{1/2}
\end{array}$$

D'où la première inégalité. De plus

$$\begin{array}{rcl}
|b^s_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})| & \leq & \left(|\omega|\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}+|\omega|\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\right)^{1/2} \\
& & \left(|\omega|^{-1}\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}+|\omega|^{-1}\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\right)^{1/2} \\
& \leq & |\omega|^{1/2}\left(\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\right)^{1/2} \\
& & \left(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{L(\Gamma)}+|\omega|^{-1}\left(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\right)\right)^{1/2}
\end{array}$$

D'où la deuxième inégalité. □

Pour traiter la deuxième formulation variationnelle $(P^{v,\omega}_c)$, on va choisir $\vec{\mathcal{J}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$ dans le même espace $V^c_{\omega,j,m}=TH^{-1/2}(div,\Gamma)\cap TL^2(\Gamma)$ et on note

$$V^c_\omega=V^c_{\omega,j,m}\times V^c_{\omega,j,m}$$

Théorème 6.2 *Le problème variationnel*

$$(P^{v,\omega}_c)\left\{\begin{array}{l}
\textit{Trouver } (\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})\in V^c_\omega \textit{ tel que } \forall\ (\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t)\in V^c_\omega \\
b^c_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t)=L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t)
\end{array}\right.$$

admet une unique solution pour tout couple $(\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma,\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma)$ dans le dual de V^c_ω. Si $(\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma,\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma)\in TH^{-1/2}(rot,\Gamma)\times TH^{-1/2}(rot,\Gamma)$ on a

$$\begin{array}{rcl}
\left(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{TL^2(\Gamma)}+\frac{1}{\delta|\omega|^2}\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{TL^2(\Gamma)}\right. & + & \left.\frac{1}{|\omega|}(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma})\right)^{1/2} \\
& \leq & \frac{C}{\sigma}\,|\omega|^{1/2}\left(\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\right)^{1/2}
\end{array}$$

Si $(\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma, \vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma) \in TL^2(\Gamma)\times TL^2(\Gamma)$ *on a*

$$\begin{array}{rcl}\Big(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{TL^2(\Gamma)} + \dfrac{1}{\delta|\omega|^2}\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{TL^2(\Gamma)} & + & \dfrac{1}{|\omega|}(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma})\Big)^{1/2} \\ & \leq & \dfrac{C}{\sigma}\Big(\dfrac{1}{\delta}\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{TL^2(\Gamma)} + \delta|\omega|^2\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{TL^2(\Gamma)}\Big)^{1/2}\end{array}$$

Preuve : La forme bilinéaire b^c_ω est continue sur V^c_ω. De plus, elle est coercive. En effet, en pousuivant la même démarche suivie dans la première application, on peut tirer tout de suite

$$\begin{array}{rcl}-\Re e(b^c_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})) & \geq & C\sigma\Bigg(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{TL^2(\Gamma)} + \dfrac{1}{\delta|\omega|^2}\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{TL^2(\Gamma)} \\ & & |\omega|^{-1}(\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma})\Bigg)\end{array}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, on déduit l'existence et l'unicité de la solution. De plus, on a

$$\begin{array}{rcl}|b^s_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})| & \leq & C\Big(|\omega|\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma} + |\omega|\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\Big)^{1/2} \\ & & \Big(\dfrac{1}{|\omega|}\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \dfrac{1}{|\omega|}\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\Big)^{1/2}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}|b^s_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})| & \leq & |\omega|^{1/2}\Big(\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\Big)^{1/2} \\ & & \Big(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{TL^2(\Gamma)} + \dfrac{1}{\delta|\omega|^2}\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{TL^2(\Gamma)} + |\omega|^{-1}(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma})\Big)^{1/2}\end{array}$$

d'où la première inégalité.

$$\begin{array}{rcl}|b^s_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})| & \leq & \Big(\dfrac{1}{\delta}\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{TL^2(\Gamma)} + \delta|\omega|^2\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{TL^2(\Gamma)}\Big)^{1/2} \\ & & \Big(\delta\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{TL^2(\Gamma)} + \dfrac{1}{\delta|\omega|^2}\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{TL^2(\Gamma)} + |\omega|^{-1}(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma})\Big)^{1/2}\end{array}$$

D'où la deuxième inégalité. □

6.2 Résultats en temps

Nous allons transporter les résultats fréquentiels dans le domaine temporel. Pour $s \in \mathbb{R}$, nous introduisons les espaces

$$\left\{\begin{array}{l} V_{t,j} = H^s_\sigma(\mathbb{R}_+, TL^2(\Gamma)) \cap H^{s-1/2}_\sigma(\mathbb{R}_+, TH^{-1/2}(div,\Gamma)) \\ \\ V^s_{t,m} = H^{s-1/2}_\sigma(\mathbb{R}_+, TH^{-1/2}(div,\Gamma)) \\ V^s_t = V_{t,j}\times V^s_{t,m} \\ \\ V^c_{t,m} = H^{s-1}_\sigma(\mathbb{R}_+, TL^2(\Gamma)) \cap H^{s-1/2}_\sigma(\mathbb{R}_+, TH^{-1/2}(div,\Gamma)) \\ V^c_t = V_{t,j}\times V^c_{t,m}\end{array}\right.$$

Théorème 6.3 *Le problème variationnel associé au problème (P3)*

$$(P_s^{v,t})\begin{cases} \textit{Trouver } (\vec{j},\vec{m}) \textit{ dans } V_t^s \textit{ tel que :} \\ \forall(\vec{j}^t,\vec{m}^t) \textit{ dans } V_t^s, \textit{ on a} \\ b_t^s(\vec{j},\vec{m},\vec{j}^t,\vec{m}^t) = L_t(\vec{j}^t,\vec{m}^t) \end{cases}$$

avec

$$b_t^s((\vec{j},\vec{m}),(\vec{j}^t,\vec{m}^t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} b_\omega^s((\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{M}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t))d\omega$$
$$L_t(\vec{j}^t,\vec{m}^t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t)d\omega$$

Pour $(\vec{E}_\Gamma^i,\vec{H}_\Gamma^i) \in H_\sigma^{s+1/2}(\mathbb{R}_+, TH^{-1/2}(rot,\Gamma)) \times H_\sigma^{s+1/2}(\mathbb{R}_+, TH^{-1/2}(rot,\Gamma))$*, il admet une unique solution et on a la majoration*

$$\begin{aligned}\Big(\|\vec{j}\|^2_{s,\sigma,TL^2(\Gamma)} &+ \|\vec{j}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)} + \|\vec{m}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)}\Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\sigma}\Big(\|\vec{E}_\Gamma^i\|^2_{s+1/2,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)}\|\vec{H}_\Gamma^i\|^2_{s+1/2,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)}\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

Pour $(\vec{E}_\Gamma^i,\vec{H}_\Gamma^i) \in H_\sigma^{s}(\mathbb{R}_+, TL^2(\Gamma)) \times H_\sigma^{s+1}(\mathbb{R}_+, TL^2(\Gamma))$*, il admet une unique solution et on a la majoration*

$$\begin{aligned}\Big(\|\vec{j}\|^2_{s,\sigma,TL^2(\Gamma)} &+ \|\vec{j}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)} + \|\vec{m}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)}\Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\sigma}\Big(\|\vec{E}_\Gamma^i\|^2_{s,\sigma,TL^2(\Gamma)} + \|\vec{H}_\Gamma^i\|^2_{s+1,\sigma,TL^2(\Gamma)}\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

Preuve : Nous appliquons le théorème de Parseval à la formulation variationnelle fréquentielle

$$b_\omega^s((\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}),(\vec{\mathcal{J}}^t,\bar{\vec{\mathcal{M}}}^t)) = L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t,\bar{\vec{\mathcal{M}}}^t)$$

Nous obtenons le problème variationnel du haut avec

$$b_t^s((\vec{j},\vec{m}),(\vec{j}^t,\vec{m}^t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \Re e\Big(b_\omega^s((\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}),(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t))d\omega\Big)$$

La forme bilinéaire b_t^s est coercive. Par le même raisonnement que plus haut, on a l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que l'inégalité de continuité. □

Théorème 6.4 *Le problème variationnel associé au problème (P3)*

$$(P_c^{v,t})\begin{cases} \textit{Trouver } (\vec{j},\vec{m}) \textit{ dans } V_t^c \textit{ tel que :} \\ \forall(\vec{j}^t,\vec{m}^t) \textit{ dans } V_t^{c\prime}, \textit{ on a} \\ b_t^c(\vec{j},\vec{m},\vec{j}^t,\vec{m}^t) = L_t(\vec{j}^t,\vec{m}^t) \end{cases}$$

avec

$$b_t^c((\vec{j},\vec{m}),(\vec{j}^t,\vec{m}^t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} b_\omega^c((\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{M}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t))d\omega$$

$$L_t(\vec{j}^t, \vec{m}^t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t)d\omega$$

Pour $(\vec{E}^i_\Gamma, \vec{H}^i_\Gamma) \in H^{s+1/2}_\sigma(\mathbb{R}_+, TH^{-1/2}(rot,\Gamma)) \times H^{s+1/2}_\sigma(\mathbb{R}_+, TH^{-1/2}(rot,\Gamma))$*, il admet une unique solution et on a la majoration*

$$\begin{aligned}\Big(\|\vec{j}\|^2_{s,\sigma,TL^2(\Gamma)} &+ \|\vec{j}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)} + \|\vec{m}\|^2_{s-1,\sigma,TL^2(\Gamma)} + \|\vec{m}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)}\Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\sigma}\Big(\|\vec{E}^i_\Gamma\|^2_{s+1/2,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)} + \|\vec{H}^i_\Gamma\|^2_{s+1/2,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)}\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

Pour $(\vec{E}^i_\Gamma, \vec{H}^i_\Gamma) \in H^{s}_\sigma(\mathbb{R}_+, TL^2(\Gamma)) \times H^{s+1}_\sigma(\mathbb{R}_+, TL^2(\Gamma))$*,il admet une unique solution et on a la majoration*

$$\begin{aligned}\Big(\|\vec{j}\|^2_{s,\sigma,TL^2(\Gamma)} &+ \|\vec{j}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)} + \|\vec{m}\|^2_{s-1,\sigma,TL^2(\Gamma)} + \|\vec{m}\|^2_{s-1/2,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)}\Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\sigma}\Big(\|\vec{E}^i_\Gamma\|^2_{s,\sigma,TL^2(\Gamma)} + \|\vec{H}^i_\Gamma\|^2_{s+1,\sigma,TL^2(\Gamma)}\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

Preuve : Nous appliquons le théorème de Parseval à la formulation variationnelle fréquentielle

$$b^c_\omega((\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}), (\vec{\mathcal{J}}^t, \bar{\vec{\mathcal{M}}}^t)) = L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t, \bar{\vec{\mathcal{M}}}^t)$$

Nous obtenons le problème variationnel du haut avec

$$b^c_t((\vec{j}, \vec{m}), (\vec{j}^t, \vec{m}^t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \Re e\Big(b^c_\omega((\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}), (\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t))d\omega\Big)$$

Nous obtenons ainsi la coercivité de la forme bilinéaire b^s_t. Ceci donne l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que l'inégalité de continuité. □

6.3 Résultats numériques

Dans cette application, on adopte la même méthode de discrétisation introduite par la première application, ainsi que les même types d'éléments finis. Nous présentons des résultats de SER monostatiques pour la même sphère (de rayon 1m) maillée en 720 triangles recouverte d'une couche diélectrique.

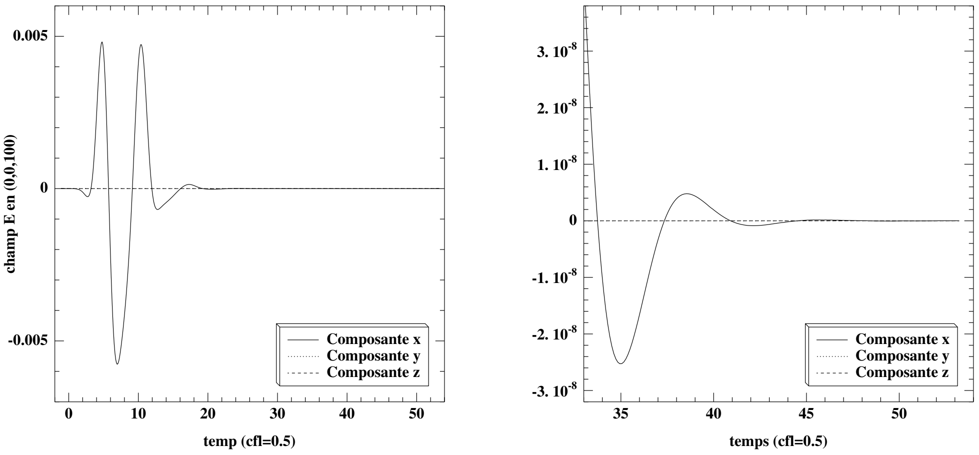


Figure 10: La première figure montre les trois composantes du champ électrique calculé au point (0,0,100). La deuxième constitue un Zoom qui montre comment le champ s'annule.

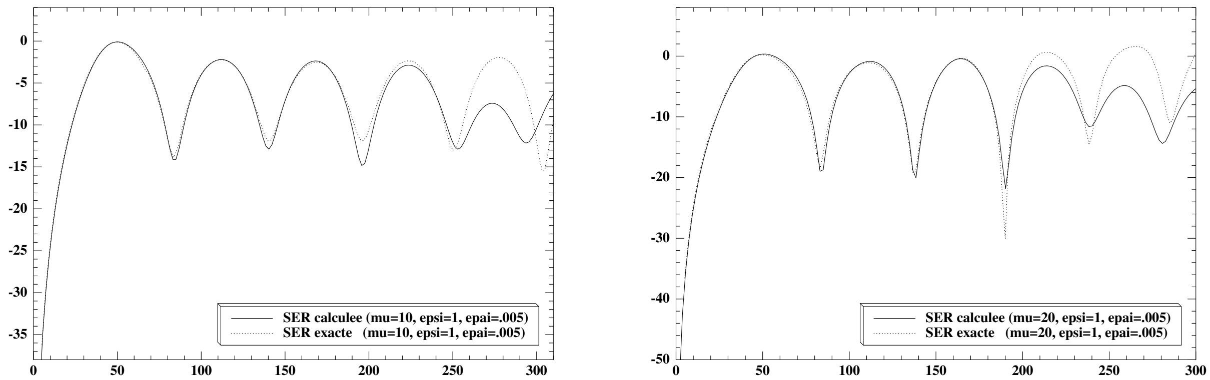


Figure 11: SER monostatique. Maillage de sphère de 720 triangles. L'épaisseur de la couche est de .005m. f_{5pts} vaut respectivement $83Mhz$ et $58Mhz$.

6.4 Extension

Dans le paragraphe précédent, on a présenté des résultats numériques pour la condition d'impédance

$$\vec{\mathcal{E}}_{\Gamma^z} = i\omega\mu\frac{tg(\alpha\delta)}{\alpha}(\vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{n})$$

Ceci en exprimant le terme $tg(\alpha)/\alpha$ au premier ordre. Dans ce paragraphe, on va pousser le développement á l'ordre trois :

$$\vec{\mathcal{E}}_{\Gamma^z} = i\omega\mu\delta(\vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{n}) - \frac{(i\omega)^3}{3}\varepsilon\mu^2\delta^3(\vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{n})$$

À part la précision, l'avantage de ce developpement est de faire apparaitre la permitivité ε afin de pouvoir la varier. L'équivalent temporel est

$$\vec{E}_\Gamma(t,x) = -\mu\delta\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{3}\mu^2\delta^3\frac{\partial^3\vec{H}}{\partial t^3}$$

Les résultats numériques sont calculés pour une couche diélectrique d'épaisseur .005.

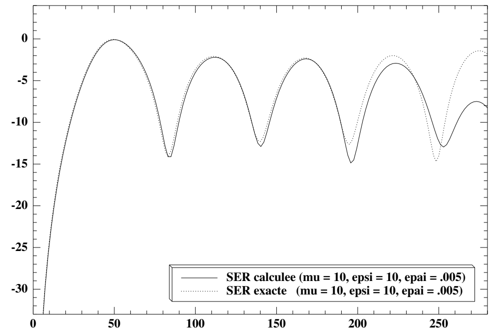


Figure 12: SER monostatique. Maillage de sphère de 720 triangles. L'épaisseur de la couche est de .005m. f_{5pts} vaut $30Mhz$.

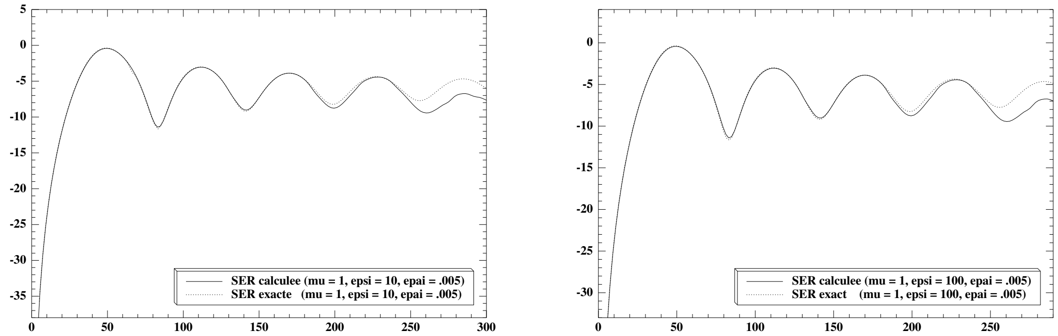


Figure 13: SER monostatique. Maillage de sphère de 720 triangles. L'épaisseur de la couche est de .005m. f_{5pts} vaut respectivement $83Mhz$ et $30Mhz$.

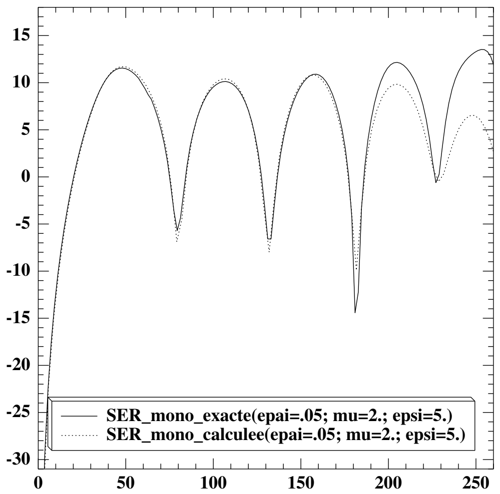
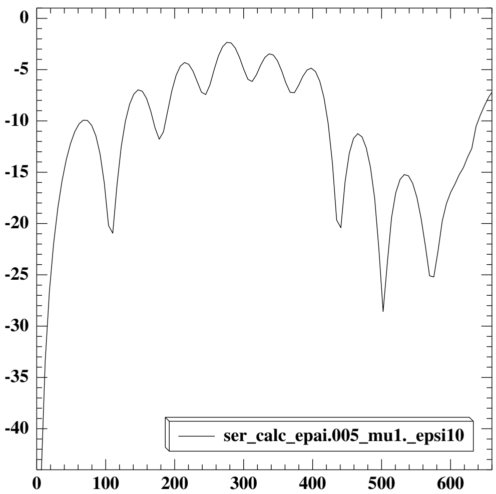


Figure 14: SER monostatique. Maillage de sphère de 720 triangles. L'épaisseur de la couche est de .005m. f_{5pts} vaut $83Mhz$.



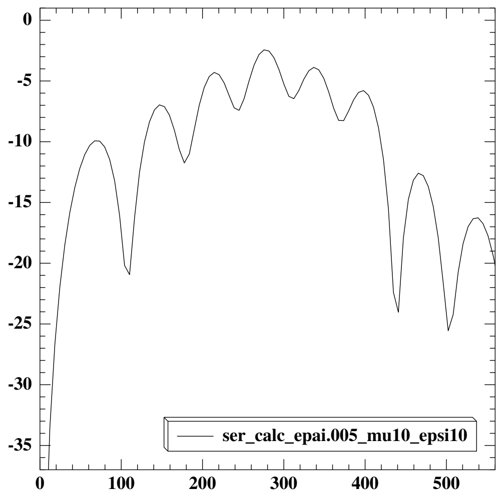


Figure 15: SER monostatique. Maillage d'un ellipsoïde de 720 triangles. f_{5pts} vaut respectivement $100Mhz$ et $32Mhz$. L'épaisseur est .005m

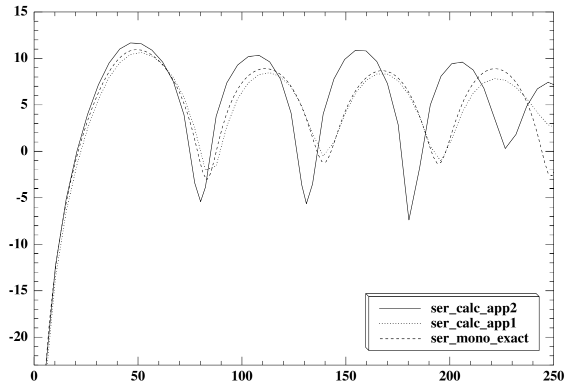


Figure 16: Comparaison de la SER monostatique entre la première et la deuxième application. Maillage de la sphère de 720 triangles, recouvert d'une couche diélectrique d'épaisseur .05, de caractéristiques électromagnétiques $\mu_r = 2.$ et $\varepsilon_r = 1.$, f_{5pts} vaut $185 Mhz$. Remarquons que la condition d'Engquist-Nedelec est bien meilleur que la condition de Leontovith car le produit $\varepsilon_r \mu_r = 2$ n'est pas grand devant l'unité.

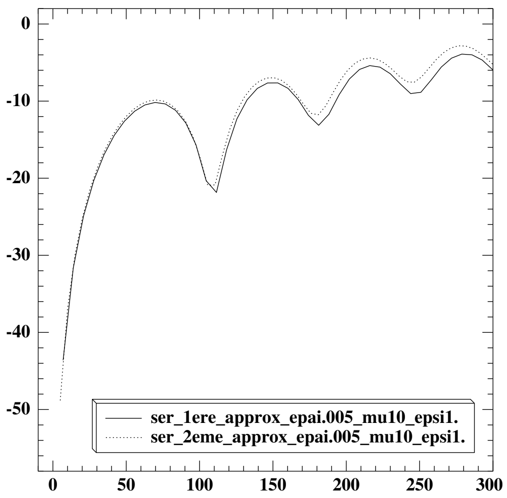


Figure 17: Comparaison de la SER monostatique entre la première application et la deuxième application dans le cas où la couche vérifie les conditions nécessaires pour les deux applications (épaisseur petite, $\varepsilon_r \mu_r$ grand devant l'unité). Maillage d'ellipsoïde de 720 triangles, recouvert d'une couche diélectrique d'épaisseur .005, de caractéristique $\mu = 10$ et $\varepsilon = 1.$ f_{5pts} vaut $83 Mhz$

References

[1] T. Abboud & T. SAYAH, *Couplage Equations de Maxwell - Potentiels Retardés pour les Milieux Hétérogènes , Rapport interne au CMAP No 374*, Ecole polytechnique, 1997.

[2] T. Abboud & T. SAYAH, *Couplage Equations de Maxwell - Potentiels Retardés pour les Milieux Hétérogènes (Suite), Rapport interne au CMAP No 382*, Ecole polytechnique, 1998.

[3] H. Ammari & J.C.Nedelec Time-harmonic electromagnetic fields in the thin chiral curved layers, *SIAM J. Numer.Anal.*, 29(2), 1998, 395-423

[4] A. Bachelot, L. Bounhoure & A. Pujols, *Couplage éléments finis-potentiels retardés pour la diffraction électromagnétique par un obstacle inhomogène*, Rapport interne Université Bordeaux I, No. 98006, (1998).

[5] A. Bendali & K.Lemrabet, *The Effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmotz equation, SIAM J. Numer.Anal.*, 56(6), 1996, 1664-1693.

[6] A. Bendali, *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques,Thèse d'Etat*, Paris-VI, 1984.

[7] A. Bendali & L. Vernhet, *Résolution par éléments finis de frontière d'un problème de diffraction d'onde comportant une condition aux limites d'impédance généralisée*, C.R.A.S. Paris t. 321 (1995), no. 6, 791-797.

[8] A. Bamberger & T. Ha-Duong, *Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé d'une onde acoustique,* Math. Meth. Appl. Sci., 8, 1986

[9] E. Becache, *Résolution par une méthode d'équations intégrales d'un problème de diffraction d'ondes élastiques transitoires par une fissure,Thèse de Doctorat*, Paris-VI, 1991.

[10] A. Bachelot & A. Pujols, *Équations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell*, C.R. Acad. Sci. Paris t. 314, Série I, (1992), p. 639,644.

[11] Y. Ding, *Méthodes numériques sur l'équation intégrale aux bords pour le problème des ondes acoustiques diffractées par une surface rigide en 3D,Thèse de Doctorat*, Paris-11, 1985.

[12] M. Costabel & E.P. Stephan, *Coupling of finite and boundary element methods for an elastoplastic interface problem, SIAM J. Numer.Anal.*, 27, 1990, 1212-1226.

[13] V. Lange, *Équations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif, Thèse de Doctorat*, Université de Bordeaux I, 1995.

[14] C. Johnson & J.C. Nedelec, *On the coupling of boundary integral and finite element methods, Math. of Comp.*, (152) 35, 1980, 1063-1079.

[15] V. LUBET, *Couplage Potentiels retardés-Eléments finis pour la résolution d'un problème de diffraction d'ondes par un obstacle inhomogène,Thèse de Doctorat*, Université de Bordeaux I, 1991.

[16] V. LEVILLAIN, *Couplage élements finis équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*, *Thèse de Doctorat*, Ecole Polytechnique, 1991.

[17] C. MULLER, *Foundations of the mathematical theory of electromagetic waves*, *Mc Graw Hill*, 1953.

[18] I. TERRASSE, *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retardés*, *Thèse de Doctorat*, Ecole Polytechnique, 1993.