Potentiels Retardés pour les obstacles homogènes par morceaux

Toufic ABBOUD*† Toni SAYAH †

Abstract

We are interested by the scattering of a transient electromagnetic wave by a bounded homogeneous dielectric obstacle. We use the retarded potential method to solve this transmission problem. We use Laplace-Fourier transform to analyse the problem and propose a symmetric coercive variational formulation. This leads to a stable numerical method. We show some validation results on a dielectric sphere.

1 Introduction

La méthode des équations intégrales sous la forme variationnelle espace-temps a été d'abord étudiée par A. Bamberger et T. Ha-Duong [6] en 1986, pour résoudre le problème de diffraction d'ondes acoustiques. Plusieurs auteurs ont par la suite utilisé cette méthode pour résoudre différents problèmes d'ondes. Nous citons les travaux de Y. Ding [12] pour les ondes acoustiques, de E. Bécache [7] pour les ondes élastiques. A. Pujols [5] a suivi la même démarche et a effectué une expérimentation numérique en dimension 2, pour résoudre le problème de diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle parfaitement conducteur. I. Terrasse [18] a poursuivi les travaux en 3D toujours pour un obstacle parfaitement conducteur. Elle a introduit de nouveaux espaces fonctionnels qui ont permis d'avoir des résultats optimaux de regularité. Elle a présenté des résultats théoriques et numériques 3D.

Dans [1] et [2], nous avons traité le problème de diffraction des ondes électromagnétiques par un obstacle hétérogène en couplant les équations de Maxwell dans Ω avec les équations intégrales sur Γ. Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution de deux formulations variationnelles symétriques. Nous avons validé la méthode en comparant les résultats numériques avec la solution exacte dans le cas d'une sphère conductrice recouverte d'une couche de diélectrique.

Dans ce rapport, nous traitons le problème de diffraction des ondes électromagnétiques par un obstacle homogène par morceaux. C'est un problème de transmission qu'on traite complètement avec les potentiels retardés : nous remplaçons les équations de Maxwell par des représentations intégrales en fontions des courants surfaciques électrique et magnétique puis nous tranduisons la continuité des composantes tangentielles des champs à travers

*Centre de Mathématiques Appliquées - CNRS UMR 7641 Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

†IMACS - Ingénierie Mathématique et Calcul Scientifique - École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

l'interface. Nous proposons une formulation variationnelle symétrique que nous étudions théoriquement et numériquement. Enfin, nous comparons pour une sphère de diélectrique homogène la SER monostatique avec la solution de Mie.

2 Position du problème

Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^3$ et nous considérons un obstacle diélectrique borné Ω de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. La normale unitaire $\vec{n}$ est orientée vers l'extérieur de Ω sur Γ. Ω est caractérisé par la permittivité électrique $\varepsilon(x) = \varepsilon_d$ et la perméabilité magnétique $\mu(x) = \mu_d$ constantes. L'ouvert extérieur Ω^{ext} est le complémentaire de l'obstacle $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^3$. Dans Ω^{ext}, $\varepsilon(x) = \varepsilon_0$ et $\mu(x) = \mu_0$. Nous notons les grandeurs relatives $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ et $\mu_r = \mu/\mu_0$. La célérité de la lumière est $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ dans Ω^{ext} et $c' = c/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ dans Ω.

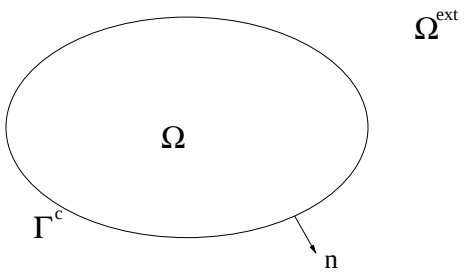


Figure 1: *L'obstacle*

Cet obstacle est éclairé par une onde incidente transitoire. On note $\vec{E}^i$ et $\vec{H}^i$ les champs électrique et magnétique incidents qui vérifient les équations de Maxwell :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}^i}{\partial t}(t,x) + r\vec{o}t\vec{E}^i(t,x) & = & \vec{0} & \\ \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}^i}{\partial t}(t,x) - r\vec{o}t\vec{H}^i(t,x) & = & -\vec{j}_s(t,x) & \\ div\ \varepsilon_0\vec{E}^i(t,x) & = & \rho_s & \\ div\ \mu_0\vec{H}^i(t,x) & = & 0 & \end{array} \right. \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

où $\vec{j}_s$ et ρ_s sont les courants et charges sources à support dans le milieu extérieur. Ils vérifient l'équation de continuité (ou équation de conservation de la charge) :

$$(2) \qquad \frac{\partial \rho_s}{\partial t}(t,x) + div\vec{j}_s(t,x) = 0 \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

On suppose qu'au temps $t = 0$, l'onde incidente n'a pas encore atteint l'obstacle :

$$(3) \qquad \vec{E}^i(t,x) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{H}^i(t,x) = \vec{0} \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_- \times \Omega$$

On note $\vec{E}^d$ et $\vec{H}^d$ les champs diffractés et $\vec{E}$ et $\vec{H}$ les champs totaux :

$$(4) \qquad \vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^d \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^d$$

Le champ électromagnétique total vérifie les équations de Maxwell :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{rcll} \mu\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t,x)+r\vec{o}t\vec{E}(t,x) &=& \vec{0} & \\ \varepsilon\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x)-r\vec{o}t\vec{H}(t,x) &=& -\vec{j}_s(t,x) & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ div\varepsilon\vec{E}(t,x) &=& \rho_s & \\ div\mu\vec{H}(t,x) &=& 0 & \end{array}\right.$$

avec

$$(6)\qquad \vec{E}^d(t,x)=\vec{0}\quad\text{et}\quad \vec{H}^d(t,x)=\vec{0}\quad\text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}^3$$

Ceci exprime la causalité.

Sur la frontière, nous avons les conditions de transmission suivantes (conséquence des équations de Maxwell) :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{rcl} [\vec{E}(t,x)\wedge\vec{n}(x)] &=& \vec{0} \\ [\vec{H}(t,x)\wedge\vec{n}(x)] &=& 0 \end{array}\right.\quad\text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma$$

Les équations (1), ..., (6) définissent notre problème. Ce problème noté (P), admet une solution unique dans les espaces *ad hoc* comme on le verra dans la suite.

3 Formulation intégrale

Notons $\Omega^1=\Omega\cup\Omega^{ext}=\mathbb{R}^3\setminus\Gamma$. Dans ce paragraphe, nous remplaçons les équations de Maxwell dans Ω^1 par des représentations intégrales en fonction des charges et courants surfaciques sur Γ. Ceci conduit après traduction des conditions de transmission (7) à deux équations intégrales. Nous énonçons formellement un problème variationnel qui devrait être équivalent au problème initial.

Remarquons d'abord que le problème (P) est équivalent à

$$(\mathrm{P1})\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}(t,x)+\dfrac{1}{\mu}r\vec{o}t\vec{E}(t,x) &=& \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega^1 \\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x)-\dfrac{1}{\varepsilon}r\vec{o}t\vec{H}(t,x) &=& -\dfrac{\vec{j}_s(t,x)}{\varepsilon} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega^1 \\ [\vec{E}\wedge\vec{n}] &=& \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma \\ [\vec{H}\wedge\vec{n}] &=& \vec{0} & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Gamma \\ \vec{E}(t,x) &=& \vec{E}^i(t,x) & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}^3 \\ \vec{H}(t,x) &=& \vec{H}^i(t,x) & \text{pour } (t,x)\in\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}^3 \end{array}\right.$$

Théorème 3.1 *Le problème (P1) est équivalent au problème suivant*

(P2)
$$\left\{\begin{array}{l}
\text{On cherche les courants électrique } \vec{j} \text{ et magnétique } \vec{m} \\
\vec{j}(t,x) = -\vec{H}(t,x) \wedge \vec{n}(x) \\
\vec{m}(t,x) = -\vec{n}(x) \wedge \vec{E}(t,x) \\
\text{qui vérifient la condition de causalité} \\
\vec{j}(t,x) = \vec{m}(t,x) = \vec{0} \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_- \times \Gamma \\
\\
\text{Dans } \mathbb{R} \times \Omega^{ext},\ \vec{E} \text{ et } \vec{H} \text{ ont la représentation intégrale suivante} \\
\vec{E}(t,x) = \vec{E}^i(t,x) + \vec{\nabla} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\int_0^{t-r/c} div_\Gamma \vec{j}(\tau,y) d\tau}{4\varepsilon_0 \pi r} d\Gamma_y \\
\qquad -\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y - \vec{rot} \int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\
\vec{H}(t,x) = \vec{H}^i(t,x) + \vec{\nabla} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\int_0^{t-r/c} div_\Gamma \vec{m}(\tau,y) d\tau}{4\mu_0 \pi r} d\Gamma_y \\
\qquad -\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y + \vec{rot} \int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\
\\
\text{Dans } \mathbb{R} \times \Omega,\ \vec{E} \text{ et } \vec{H} \text{ ont la représentation intégrale suivante} \\
\vec{E}(t,x) = -\vec{\nabla} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\int_0^{t-r/c'} div_\Gamma \vec{j}(\tau,y) d\tau}{4\varepsilon_d \pi r} d\Gamma_y \\
\qquad +\mu_d \dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c',y)}{4\pi r} d\Gamma_y + \vec{rot} \int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-r/c',y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\
\vec{H}(t,x) = -\vec{\nabla} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\int_0^{t-r/c'} div_\Gamma \vec{m}(\tau,y) d\tau}{4\mu_d \pi r} d\Gamma_y \\
\qquad +\varepsilon_d \dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\vec{m}(t-r/c',y)}{4\pi r} d\Gamma_y - \vec{rot} \int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c',y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\
\\
\text{avec } r = |x-y|, \text{l'onde incidente est définie par (1), (2) et (3)} \\
\\
\text{Résoudre le problème revient à imposer les conditions de transmission :} \\
[\vec{E} \wedge \vec{n}] = \vec{0} \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma \\
[\vec{H} \wedge \vec{n}] = \vec{0} \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma
\end{array}\right.$$

Preuve : Pour la démonstration de ce théorème, on se base sur le théorème de représentation intégrale que vérifient les solutions causales des équations de Maxwell (voir [1]). Dans un premier temps, nous considérons le champ électromagnétique diffracté dans Ω^{ext} qu'on prolonge dans Ω par l'opposé du champ incident. Il est causal et donc les équations de Maxwell dans Ω^{ext} sont équivalentes à la représentation intégrale en fonction des courants surfaciques électrique et magnétique. D'où la démonstration de la première partie du théorème. Ensuite, on considère le champ électromagnétique total dans Ω, on le prolonge par $\vec{0}$ dans Ω^{ext}. Il est également causal. Le même théorème de représentation intégrale nous permet de représenter le champ total en fonction des mêmes courants surfaciques électrique et magnétique. D'où le résultat. □

Pour alléger par la suite l'écriture des formules, nous introduisons les opérateurs surfaciques suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} P^1_{t,c}(\vec{j}) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}_\Gamma \displaystyle\int_\Gamma \frac{\int_0^{t-r/c} div_\Gamma \vec{j}(\tau,y)d\tau}{4\pi r} d\Gamma_y - \mu_0 \Pi_x \frac{\partial}{\partial t}\int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c,y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\ P^1_{t,c'}(\vec{j}) = \dfrac{1}{\varepsilon_d}\vec{\nabla}_\Gamma \displaystyle\int_\Gamma \frac{\int_0^{t-r/c'} div_\Gamma \vec{j}(\tau,y)d\tau}{4\pi r} d\Gamma_y - \mu_d \Pi_x \frac{\partial}{\partial t}\int_\Gamma \frac{\vec{j}(t-r/c',y)}{4\pi r} d\Gamma_y \\ P^2_{t,c}(\vec{j}) = -\Pi_x \displaystyle\int_\Gamma \nabla_x\left(\frac{1}{r}\right) \wedge \left(\vec{j}(t-r/c,y) + \frac{r}{c}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(t-r/c,y) \right) d\Gamma_y \\ P^2_{t,c'}(\vec{j}) = -\Pi_x \displaystyle\int_\Gamma \nabla_x\left(\frac{1}{r}\right) \wedge \left(\vec{j}(t-r/c',y) + \frac{r}{c}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(t-r/c',y) \right) d\Gamma_y \end{array}\right.$$

En utilisant le théorème de représentation (voir [1] page 6), on trouve que les traces tangentielles sur Γ des représentations de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ provenant de Ω^{ext} sont données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\vec{E}_\Gamma(t,x)}{2} & = & \vec{E}^i_\Gamma(t,x) + P^1_{t,c}(\vec{j}) + P^2_{t,c}(\vec{m}) \\ \dfrac{\vec{H}_\Gamma(t,x)}{2} & = & \vec{H}^i_\Gamma(t,x) + \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0} P^1_{t,c}(\vec{m}) - P^2_{t,c}(\vec{j}) \end{array}\right. \tag{8}$$

alors que les traces tangentielles provenant de Ω conduisent aux relations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\vec{E}_\Gamma(t,x)}{2} & = & -P^1_{t,c'}(\vec{j}) - P^2_{t,c'}(\vec{m}) \\ \dfrac{\vec{H}_\Gamma(t,x)}{2} & = & -\dfrac{\varepsilon_d}{\mu_d} P^1_{t,c'}(\vec{m}) + P^2_{t,c'}(\vec{j}) \end{array}\right. \tag{9}$$

Le problème de transmission s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} P^1_{t,c}(\vec{j}) + P^2_{t,c}(\vec{m}) + P^1_{t,c'}(\vec{j}) + P^2_{t,c'}(\vec{m}) & = & -\vec{E}^i_\Gamma(t,x) \\ \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0} P^1_{t,c}(\vec{m}) - P^2_{t,c}(\vec{j}) + \dfrac{\varepsilon_d}{\mu_d} P^1_{t,c'}(\vec{m}) - P^2_{t,c'}(\vec{j}) & = & -\vec{H}^i_\Gamma(t,x) \end{array}\right. \tag{10}$$

pour $(t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma$.

Soit $\sigma > 0$ fixé. Pour trouver la formulation variationnelle, nous multiplions la première équation de (10) par un courant électrique test $e^{-2\sigma t}\vec{j}^t$ et la deuxième équation par un courant magnétique test $e^{-2\sigma t}\vec{m}^t$ et en intégrant en temps et en espace sur Γ.

Nous définissons les formes bilinéaires suivantes

$$\begin{array}{rcl} b^\Gamma_{t,c}(\vec{j},\vec{m},\vec{j}^t,\vec{m}^t) & = & \langle P^1_{t,c}(\vec{j}),\vec{j}^t\rangle_{\sigma,\Gamma} + \langle P^2_{t,c}(\vec{m}),\vec{j}^t\rangle_{\sigma,\Gamma} + \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}\langle P^1_{t,c}(\vec{m}),\vec{m}^t\rangle_{\sigma,\Gamma} - \langle P^2_{t,c}(\vec{j}),\vec{m}^t\rangle_{\sigma,\Gamma} \\ b^\Gamma_{t,c'}(\vec{j},\vec{m},\vec{j}^t,\vec{m}^t) & = & \langle P^1_{t,c'}(\vec{j}),\vec{j}^t\rangle_{\sigma,\Gamma} + \langle P^2_{t,c'}(\vec{m}),\vec{j}^t\rangle_{\sigma,\Gamma} + \dfrac{\varepsilon_d}{\mu_d}\langle P^1_{t,c'}(\vec{m}),\vec{m}^t\rangle_{\sigma,\Gamma} - \langle P^2_{t,c'}(\vec{j}),\vec{m}^t\rangle_{\sigma,\Gamma} \end{array}$$

On note $b_t = b^\Gamma_{t,c} + b^\Gamma_{t,c'}$. Nous définissons aussi la forme linéaire

$$L_t(\vec{j}^t,\vec{m}^t) = -\langle \vec{E}^i,\vec{j}^t\rangle_{\sigma,\Gamma} - \langle \vec{H}^i,\vec{m}^t\rangle_{\sigma,\Gamma}$$

avec

$$\langle \vec{u}, \vec{u}^t \rangle_{\sigma,\Gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \vec{u}(t,x).\vec{u}^t(t,x) d\Gamma dt$$

Formellement, en notant V l'espace des courants $(\vec{j}, \vec{m})$ admissibles, le problème de transmission (10) admet la formulation variationnelle suivante :

$$(P_v) \begin{cases} \text{Trouver } (\vec{j}, \vec{m}) \in V \text{ tel que } \forall\ (\vec{j}^t, \vec{m}^t) \in V \\ b_t(\vec{j}, \vec{m}, \vec{j}^t, \vec{m}^t) = L_t(\vec{j}^t, \vec{m}^t) \end{cases}$$

4 Étude dans le domaine fréquentiel

Dans [2], nous avons rappelé le cadre fonctionnel introduit par Isabelle Terrasse [18]. Ce cadre nous a permis de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel grâce à la transformée de Fourier-Laplace, où la fréquence $\omega = \eta + i\sigma$ avec $\sigma > 0$. Dans ce paragraphe, nous étudions le problème fréquentiel et nous démontrons des inégalités et des propriétés qui nous permettront grâce au théorème de Paley-Wiener et la formule de Parseval de revenir au problème temporel. Ainsi, nous transportons tous les résultats fréquentiels dans le domaine temporel.

L'équivalent fréquentiel du problème temporel (P1) est le suivant

$$(\mathrm{P}1^\omega) \begin{cases} -i\omega\vec{\mathcal{H}}(x) + \dfrac{1}{\mu} r\vec{o}t\vec{\mathcal{E}}(x) &=& \vec{0} \\ -i\omega\vec{\mathcal{E}}(x) - \dfrac{1}{\varepsilon} r\vec{o}t\vec{\mathcal{H}}(x) &=& -\dfrac{\vec{j}_s(x)}{\varepsilon} \end{cases} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^3$$

En fréquence, on introduit une condition de radiation. Dans le problème $(P1^\omega)$, nous ne raisonnons pas avec une simple transformée de Fourier, mais à l'aide d'une transformée de Fourier-Laplace, possible grâce à la causalité. Prendre ω à partie imaginaire strictement positive fixe le comportement exponentiellement décroissant des inconnues transformées de Fourier-Laplace à l'infini. C'est cette condition qui permet le bon choix de la solution élémentaire :

$$G_c(x,y) = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

Comme dans le cas temporel, nous introduisons les opérateurs surfaciques suivants

$$P^1_{\omega,c}(\vec{\mathcal{J}}(y)) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\vec{\nabla}_\Gamma \int_\Gamma G_c(x,y)\ div_\Gamma \vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y + i\omega\mu_0 \Pi_x \int_\Gamma G_c(x,y)\ \vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y$$

$$P^1_{\omega,c'}(\vec{\mathcal{J}}(y)) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_d}\vec{\nabla}_\Gamma \int_\Gamma G_{c'}(x,y)\ div_\Gamma \vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y + i\omega\mu_d \Pi_x \int_\Gamma G_{c'}(x,y)\ \vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y$$

$$P^2_{\omega,c}(\vec{\mathcal{J}}(y)) = -\Pi_x \int_\Gamma \nabla_x(G_c(x,y)) \wedge \vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y$$

$$P^2_{\omega,c'}(\vec{\mathcal{J}}(y)) = -\Pi_x \int_\Gamma \nabla_x(G_{c'}(x,y)) \wedge \vec{\mathcal{J}}(y) d\Gamma_y$$

Théorème 4.1 *Toute solution du problème $(P1^\omega)$ est solution du problème suivant*

$$(P2^\omega)\begin{cases} \text{On cherche les courants électrique } \vec{\downarrow} \text{ et magnétique } \vec{\Updownarrow} \\ \quad \vec{\mathcal{J}}(x) = -\vec{\mathcal{H}}(x)\wedge\vec{n}(x) \\ \quad \vec{\mathcal{M}}(x) = -\vec{n}(x)\wedge\vec{\mathcal{E}}(x) \qquad \text{pour } x\in\Gamma \\ \text{qui vérifient les équations suivantes sur } \Gamma \\ \quad P^1_{\omega,c}(\vec{\mathcal{J}})+P^2_{\omega,c}(\vec{\mathcal{M}})+P^1_{\omega,c'}(\vec{\mathcal{J}})+P^2_{\omega,c'}(\vec{\mathcal{M}}) = -\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma \\ \quad \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}P^1_{\omega,c}(\vec{\mathcal{M}})-P^2_{\omega,c}(\vec{\mathcal{J}})+\frac{\varepsilon_d}{\mu_d}P^1_{\omega,c'}(\vec{\mathcal{M}})-P^2_{\omega,c'}(\vec{\mathcal{J}}) = -\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma \end{cases}$$

Preuve : Comme dans le cas temporel, nous remplaçons les équations de Maxwell dans Ω^{ext} par des représentations intégrales en fonction des courants surfaciques électrique et magnétique (voir [2]). De même, nous remplaçons les équations de Maxwell dans Ω par des représentations intégrales en fonction des mêmes courants surfaciques (comme dans le cas temporel en prolongeant le champs total par $\vec{0}$ dans Ω^{ext}). La continuités des traces tangentielles des champs nous ramène au problème $(P2^\omega)$. □

Nous multiplions la première (resp. la deuxième) équation de $(P2^\omega)$ par $\vec{\mathcal{J}}^t$ (respectivement par $\vec{\mathcal{M}}^t$) suffisament régulières sur Γ. Nous intégrons sur Γ. Nous définissons le produit scalaire

$$\langle\vec{\mathcal{J}},\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t\rangle_\Gamma=\int_\Gamma\vec{\mathcal{J}}(x).\bar{\vec{\mathcal{J}}}^t(x)d\Gamma$$

Nous définissons les formes sésquilinéaires suivantes

$$b^\Gamma_{\omega,c}(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t) = \langle P^1_{\omega,c}\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{J}}^t\rangle_\Gamma+\langle P^2_{\omega,c}\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}^t\rangle_\Gamma+\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\langle P^1_{\omega,c}\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{M}}^t\rangle_\Gamma-\langle P^2_{\omega,c}\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}^t\rangle_\Gamma$$

$$b^\Gamma_{\omega,c'}(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t) = \langle P^1_{\omega,c'}\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{J}}^t\rangle_\Gamma+\langle P^2_{\omega,c'}\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}^t\rangle_\Gamma+\frac{\varepsilon_d}{\mu_d}\langle P^1_{\omega,c'}\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{M}}^t\rangle_\Gamma-\langle P^2_{\omega,c'}\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}}^t\rangle_\Gamma$$

On note $b_\omega=b^\Gamma_{\omega,c}+b^\Gamma_{\omega,c'}$. Nous définissons aussi

$$L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t)=-\langle\vec{E}^i,\vec{\mathcal{J}}^t\rangle_\Gamma-\langle\vec{H}^i,\vec{\mathcal{M}}^t\rangle_\Gamma$$

D'après les expressions des formes sesquilinéaires du haut, il est naturel de choisir $(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})$ dans

$$V_\omega=TH^{-1/2}(div,\Gamma)\times TH^{-1/2}(div,\Gamma)$$

Ce qui nous conduit au problème variationel suivant :

$$(P_{v,\omega})\begin{cases} \text{Trouver } (\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})\in V_\omega \text{ tel que } \forall\ (\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t)\in V_\omega \\ b_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t)=L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t) \end{cases}$$

Théorème 4.2 *Pour $(\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma,\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma)$ dans $V_\omega{}'$, le problème variationnel $(P_{v,\omega})$ admet une unique solution $(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})$ dans V_ω et nous avons la majoration suivante*

$$\left(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\right)^{1/2}\le\frac{C|\omega|}{\sigma}\left(\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\right)^{1/2}$$

Preuve : Les formes sesquilinéaires $b^{\Gamma}_{\omega,c}$ et $b^{\Gamma}_{\omega,c'}$ sont continues et coercives dans $TH^{-1/2}(div,\Gamma)\times TH^{-1/2}(div,\Gamma)$ (voir [2]), ce qui entraine la coecivité de b_ω :

$$-\Re e(b_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})) \geq C\sigma|\omega|^{-1}\left(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\right)$$

Le thérème de Lax-Milgam assure l'existence et l'unicité de la solution. De plus, on a

$$\begin{aligned}
|b_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})| &= |L_\omega(\vec{\mathcal{J}},\vec{\mathcal{M}})| \\
&= |\langle\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\ ,\ \vec{\mathcal{J}}\rangle_\Gamma+\langle\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\ ,\ \vec{\mathcal{M}}\rangle_\Gamma| \\
&\leq \left(\|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|^2_{-1/2,\omega,rot_\Gamma}\right)^{1/2} \\
&\quad \left(\|\vec{\mathcal{J}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}+\|\vec{\mathcal{M}}\|^2_{-1/2,\omega,div_\Gamma}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité de continuité. □

5 Résultats en temps

Nous allons transporter les résultats fréquentiels au domaine temporel grâce à la transformée de Fourier-Laplace inverse et à la formule de Parseval. I. Terrasse [18] a introduit des espaces fonctionnels couplant espace-temps. Pour $s\in\mathbb{R}$, nous notons

$$\begin{cases} V = H^s_\sigma(\mathbb{R}_+,\, TH^{-1/2}(rot,\Gamma)) \\ W = H^{s-1}_\sigma(\mathbb{R}_+,\, TH^{-1/2}(div,\Gamma)) \end{cases}$$

Théorème 5.1 *Le problème variationnel associé au problème (P3) est le suivant*

$$(P_{v,t})\begin{cases} \text{Trouver } (\vec{j},\vec{m}) \text{ dans } W\times W \text{ tel que :} \\ \forall(\vec{j}^t,\vec{m}^t) \text{ dans } W\times W, \text{ on a} \\ b_t(\vec{j},\vec{m},\vec{j}^t,\vec{m}^t) = L_t(\vec{j}^t,\vec{m}^t) \end{cases}$$

avec

$$b_t((\vec{j},\vec{m}),(\vec{j}^t,\vec{m}^t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} b_\omega((\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{J}}),(\vec{\mathcal{M}}^t,\vec{\mathcal{J}}^t))d\omega$$

$$L_t(\vec{j}^t,\vec{m}^t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t,\vec{\mathcal{M}}^t)d\omega$$

où $\vec{\mathcal{J}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$ sont les transformées Fourier-Laplace de $\vec{j}$ et $\vec{m}$.

Pour $(\vec{E}^i_\Gamma,\vec{H}^i_\Gamma)\ \in\ V\times V$, il admet une unique solution et on a la majoration

$$\begin{aligned}
\left(\|\vec{j}\|^2_{s-1,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)}\right. &+ \left.\|\vec{m}\|^2_{s-1,\sigma,TH^{-1/2}(div,\Gamma)}\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{C}{\sigma}\left(\|\vec{E}^i_\Gamma\|^2_{s,\sigma,TH^{-1}(rot,\Gamma)}+\|\vec{H}^i_\Gamma\|^2_{s,\sigma,TH^{-1/2}(rot,\Gamma)}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Preuve : Comme $\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma$ est la transformée de Fourier-Laplace du champ $\vec{E}^i_\Gamma$ qui est causal, le théorème de Paley-Wiener (voir [18] page 50) nous permet d'écrire

$$(\text{pw}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe des constantes } C > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N} \text{ tel que} \\ \|\vec{\mathcal{E}}^i_\Gamma\|_{-1,\omega,rot_\Gamma} + \|\vec{\mathcal{H}}^i_\Gamma\|_{-1,\omega,rot_\Gamma} \leq C(1+|\omega|)^k \end{array} \right.$$

L'inégalité démontrée dans le théorème (4.3) nous permet de déduire que les courants $\vec{\mathcal{J}}$ et $\vec{\mathcal{M}}$ vérifient une condition similaire à (pw) avec les normes non indéxées. Une deuxième application du théorème de Paley-Wiener entraîne que le couple $(\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}})$ est la transformée de Fourier-Laplace d'un certain couple temporel causal $(\vec{j}, \vec{m})$.
Nous appliquons le théorème de Parseval à la formulation variationnelle fréquentielle

$$b_\omega((\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}), (\vec{\mathcal{J}}^t, \bar{\vec{\mathcal{M}}}^t)) = L_\omega(\vec{\mathcal{J}}^t, \bar{\vec{\mathcal{M}}}^t)$$

Nous obtenons le problème variationnel du haut avec

$$\begin{aligned} b_t((\vec{j}, \vec{m}), (\vec{j}^t, \vec{m}^t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} b_\omega((\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}), (\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t)) d\omega \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \Big(b_\omega((\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}), (\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t)) d\omega + \overline{b_\omega((\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}), (\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t))} d\omega \Big) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \Re e \Big(b_\omega((\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{M}}), (\vec{\mathcal{J}}^t, \vec{\mathcal{M}}^t)) d\omega \Big) \end{aligned}$$

Cette forme bilinéaire est coercive et on a existence et unicité de la solution. En multipliant l'inégalité du théorème (5.1) par $|\omega|^{2s}$ et en intégrant entre $-\infty+i\sigma$ et $+\infty+i\sigma$, on obtient les inégalités de continuité. □

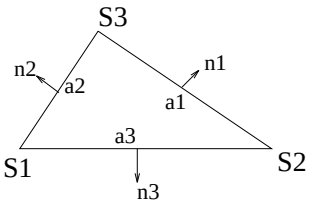
6 Discrétisation et résultats numériques

Pour la discrétisation, on va prendre $\sigma = 0$. On discrétise la surface Γ par des triangles et on note τ_h le maillage obtenu. On découpe la demi-droite temps positifs en des intervalles $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ où Δt est déterminé à partir du cfl=$\frac{\Delta t}{\Delta x}$ où Δx est la longueur de la plus grande arête du maillage.
Dans ce qui suit, 1_T désignera la fonction caractéristique d'un élément T de la triangulation τ_h, on note $|T|$ sa mesure. De même $1_{[t_n, t_{n+1}]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$.

On prend des courants surfaciques $\vec{j}$ dans l'espace des éléments finis H(div) de degré 1 (Raviart-Thomas) en espace, polynômes de degrés 1 en temps. Les courants peuvent s'écrire sous la forme : $\vec{j}(t,x) = \sum_{n\geq 0} \vec{j}(t_n, x) = \sum_{n\geq 0} \vec{j}^n(x)\beta^n(t)$
où $\vec{j}^n(x)$ est le courant au temps t_n et $\beta^n(t)$ la fonction de base temps

$$\beta^n(t) = \left\{ \begin{array}{ll} t - t_n & pour\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ 0 & pour\ t < t_n \\ \Delta t & pour\ t \geq t_{n+1} \end{array} \right.$$

Localement dans chaque triangle, on note n_i la normal sortante sur a_i.



On désigne par $\lambda^n_{i,T} = \int_{a_i} \vec{j}^n(x).\vec{n}_{i,T}dl_i$ (i=1,2,3) le flux à travers l'arête a_i au temps $t_n = n\Delta t$. $\lambda^n_{i,T}$ est le degrés de liberté associé a a_i. On note $\vec{W}_{i,T}(M) = \frac{S_i\vec{M}}{2|T|}1_T$ la fonction de base espace associée à a_i où S_i est le sommet opposé à cette arête; on aura $div_T\vec{W}_{i,T} = \frac{1_T}{|T|}$. Le courant $\vec{j}(t,x)$ peut alors s'écrire :

$$\vec{j}(t,x) = \sum_{n\geq 1} \vec{j}^n(x)\beta^n(t) = \sum_{n\geq 1} \beta^n(t) \sum_{T\in\tau_h} \sum_{i=1}^{3} \lambda^n_{i,T}\vec{W}_{i,T}(x)$$

Les fonctions tests $\vec{j}^t(t,x)$ sont définies pour chaque pas de temps $t = t_n$

$$\vec{j}^t(t_n,x) = \vec{j}^t(x)\beta^n_0(t_n)$$

avec

$$\beta^n_0(t_n) = \begin{cases} 1 & pour\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

On discrétise $\vec{m}$ de la même manière que $\vec{j}$

$$m(t,x) = \sum_{n\geq 1} \beta^n(t) \sum_{T\in Q\in\tau_{eh}} \sum_{i=1}^{3} \nu^n_{i,T}\frac{S_i\vec{X}}{2|T|}$$

où ν est le flux du champ $\vec{m}$ à travers les arêtes du maillage.

7 Schéma numérique

Le système matriciel équivalent à la formulation variationnelle $(P^{v,t}_{en})$ discrète est de la forme

$$\sum_{k=0}^{N} A^k_1\lambda^{n-k} + \sum_{k=0}^{N} C^k\nu^{n-k} = {b_1}^n$$

$$\sum_{k=0}^{N} A^k_2\nu^{n-k} + \sum_{k=0}^{N} C^k\lambda^{n-k} = {b_2}^n$$

où

- N est le nombre des matrices A^i déterminé par la taille de l'objet étudié et le pas de temps Δt.
- λ^n le vecteur flux $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, ...)$ qui correspond au flux du courant surfacique j^n au temps t_n.

- ν^n le vecteur flux $(\nu^1, \nu^2, \nu^3, ...)$ qui correspond au flux du courant surfacique m^n au temps t_n.
- $A_1^k \ et \ A_2^k$ sont des matrices de dimension (nds, nds) où nds : nombre de degrés de liberté surfaciques du maillage. Elles représentent les interactions électrique-électrique et magnétique-magnétique à distance $k\delta t$.
- C^k sont des matrices de dimension (nds, nds). Elles représentent les termes de couplage à distance $k\delta t$.

On a remarqué que ce schéma est convergent et inconditionnellement stable. Les matrices sont creuses. D'où l'avantage du stockage morse.

8 Résultats numériques

Les champs incidents choisis sont des gaussiennes

$$\vec{E}^{inc}(t,x) = f(t - t_0 + \vec{u}.\vec{x})\ \vec{E}_0$$
$$\vec{H}^{inc}(t,x) = f(t - t_0 + \vec{u}.\vec{x})\ \vec{H}_0$$

où $f(\tau) = (1 - \frac{\tau^2}{\sigma^2})e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}$, t_0 est choisi de sorte que l'onde arrive sur l'objet à $t = 0$. $\vec{u}$ est la direction de propagation.

On calcule la SER monostatique après FFT. Rappelons que

$$SERmono = 20log_{10}(\frac{|\vec{\mathcal{E}}^d|}{|\vec{\mathcal{E}}^i|})$$

$$\vec{\mathcal{E}}^d(k,x) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\nabla\int_\Gamma G(x,y)div_\Gamma\vec{\mathcal{J}}(y)dy + i\omega\mu_0\int_\Gamma G(x,y)\vec{\mathcal{J}}(y)dy - \int_\Gamma \nabla_x G(x,y)\wedge\vec{\mathcal{M}}(y)dy$$

où $G(x,y)$ est la solution élémentaire de l'équation de Helmholtz :

$$G(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\ ,$$

Les résultats numériques sont calculés pour une sphère de rayon 1m maillée avec 320 triangles. L'incidence est toujours suivant l'axe des z. Pour toute la suite, f_{5pts} veut dire la fréquence qui correspond à 5 points de maillage par longueur d'onde dans le diélectrique. Le cfl choisi est de 0.5.

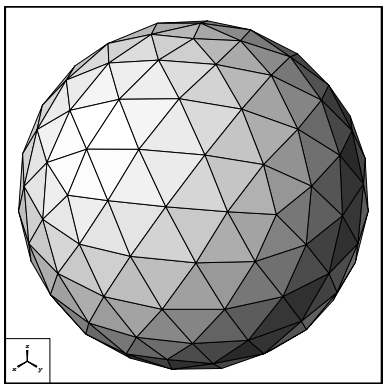


Figure 2: Maillages d'une sphère (rayon=1m) de 320 triangles

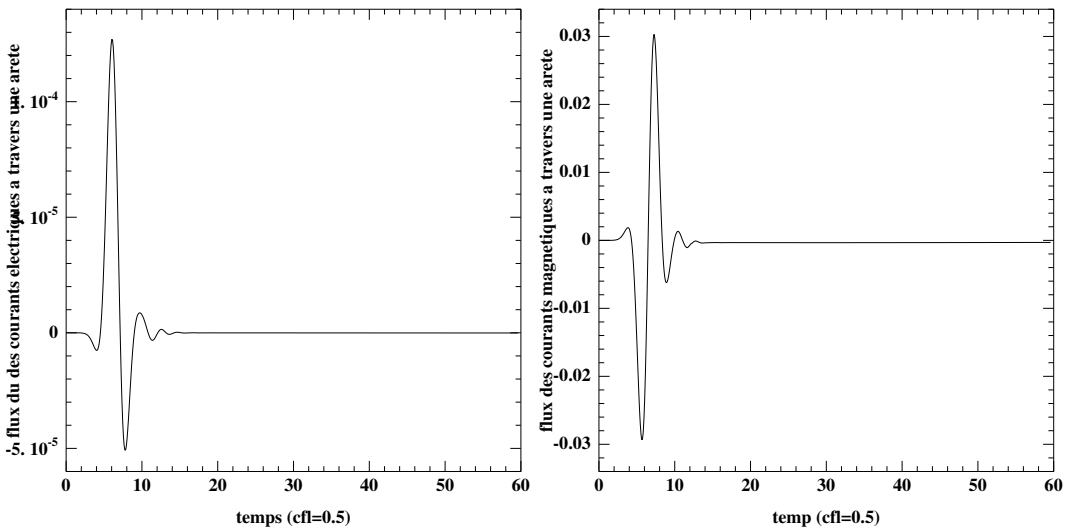


Figure 3: Les flux respectifs des courants électrique et magnétique à travers une arête du maillage. ($\sigma = 1.$, cfl $= 0.5$). $\varepsilon_r = 2.$ et $\mu_r = 1.$

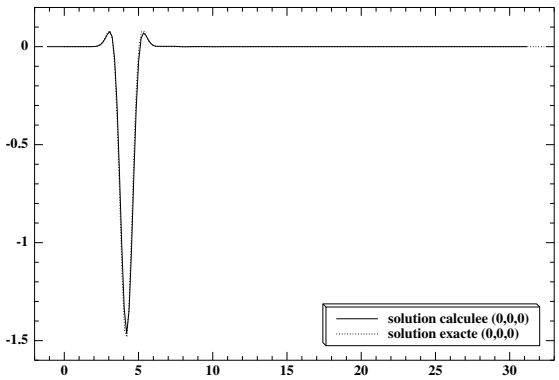


Figure 4: Comparaison entre la solution calculée et la solution exacte de la première composante du champs électrique calculé au point (0,0,0). L'onde incidente est suivant l'axe des z, la polarisation est suivant l'axe des x. (Maillage de la sphère avec : incidence suivant l'axe des z, $\sigma = .5$ et cfl $= 0.5$)

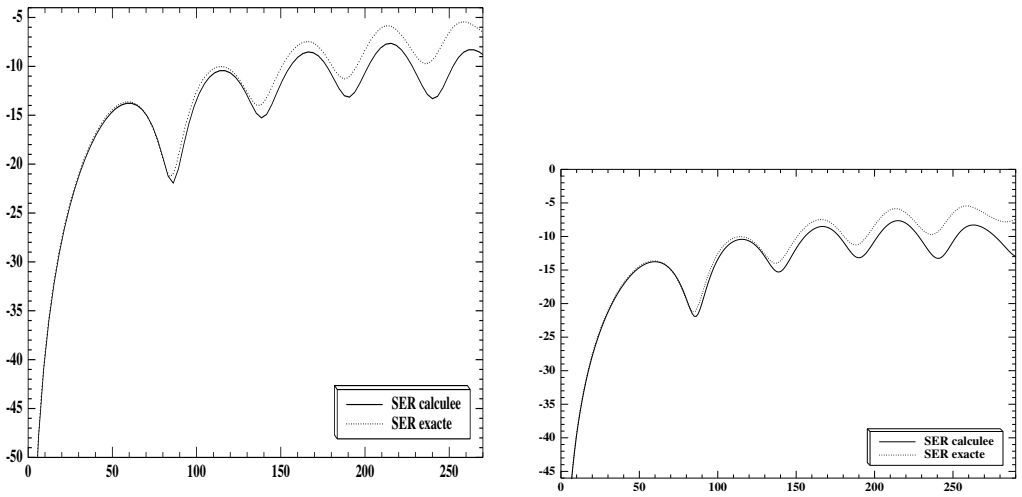


Figure 5: SER monostatique. Maillage de sphère de 320 triangles. La première figure montre une comparaison entre la SER monostatique calculée et la SER exacte pour $\varepsilon_r = 2.$ et $\mu_r = 1.$ et la deuxième pour $\varepsilon_r = 1.$ et $\mu_r = 2.$ f_{5pts} vaut $127Mhz$.

References

[1] T. Abboud & T. SAYAH, *Couplage Equations de Maxwell - Potentiels Retardés pour les Milieux Hétérogènes* , *Rapport interne au CMAP No 374*, École Polytechnique, 1997.

[2] T. Abboud & T. SAYAH, *Couplage Equations de Maxwell - Potentiels Retardés pour les Milieux Hétérogènes (Suite)*, *Rapport interne au CMAP No 382*, École Polytechnique, 1998.

[3] T. Abboud & T. SAYAH, *Potentiels Retardés pour les équations de Maxwell avec condition d'impédance généralisée*, *Rapport interne du CMAP No 387*, École Polytechnique, 1998.

[4] A. Bachelot, L. Bounhoure & A. Pujols, *Couplage éléments finis-potentiels retardés pour la diffraction électromagnétique par un obstacle inhomogène*, Rapport interne Université Bordeaux I, No. 98006, (1998).

[5] A. Bachelot & A. Pujols, *Équations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell*, C.R. Acad. Sci. Paris t. 314, Série I, (1992), p. 639,644.

[6] A. Bamberger & T. Ha-Duong, *Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé d'une onde acoustique,* Math. Meth. Appl. Sci., 8, 1986

[7] E. Becache, *Résolution par une méthode d'équations intégrales d'un problème de diffraction d'ondes élastiques transitoires par une fissure,Thèse de Doctorat*, Paris-VI, 1991.

[8] A. Bendali & K.Lemrabet, *The Effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmotz equation*, *SIAM J. Numer.Anal.*, 56(6), 1996, 1664-1693.

[9] A. Bendali, *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques,Thèse d'Etat*, Paris-VI, 1984.

[10] A. Bendali & L. Vernhet, *Résolution par éléments finis de frontière d'un problème de diffraction d'onde comportant une condition aux limites d'impédance généralisée*, C.R.A.S. Paris t. 321 (1995), no. 6, 791-797.

[11] M. Costabel & E.P. Stephan, *Coupling of finite and boundary element methods for an elastoplastic interface problem*, *SIAM J. Numer.Anal.*, 27, 1990, 1212-1226.

[12] Y. Ding, *Méthodes numériques sur l'équation intégrale aux bords pour le problème des ondes acoustiques diffractées par une surface rigide en 3D,Thèse de Doctorat*, Paris-11, 1985.

[13] C. Johnson & J.C. Nedelec, *On the coupling of boundary integral and finite element methods*, *Math. of Comp.*, (152) 35, 1980, 1063-1079.

[14] V. Lange, *Équations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif*, *Thèse de Doctorat*, Université de Bordeaux I, 1995.

[15] V. Lubet, *Couplage Potentiels retardés-Eléments finis pour la résolution d'un problème de diffraction d'ondes par un obstacle inhomogène,Thèse de Doctorat*, Université de Bordeaux I, 1991.

[16] V. Levillain, *Couplage élements finis équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*, *Thèse de Doctorat*, Ecole Polytechnique, 1991.

[17] C. Muller, *Foundations of the mathematical theory of electromagetic waves*, *Mc Graw Hill*, 1953.

[18] I. Terrasse, *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retardés*, *Thèse de Doctorat*, Ecole Polytechnique, 1993.