Processus dans un milieu irregulier. Une approche par les formes de Dirichlet

Paul SEIGNOUREL

9 juin 1998

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

1 Introduction

On s'intéresse aux processus de Markov sur $\mathbb{R}^d$ définis formellement par l'équation :

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2}\nabla W(X_t)dt \quad , \qquad W \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d) \tag{1}$$

Cette équation modélise le mouvement d'une particule soumise à deux forces : une force de diffusion représentée par le mouvement Brownien $\{B_t, t \geq 0\}$, et une force provenant du milieu $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, qui agit par l'intermédiaire de son gradient.
Dans le cas où W est régulier, le processus sera simplement la solution de l'équation différentielle stochastique ci-dessus, où B_t est un mouvement Brownien de dimension d. Mais les physiciens s'intéressent également à des cas où le milieu est non-régulier, par exemple lorsque W est lui-même une réalisation d'un processus aléatoire (voir [1]). Et il est clair que l'E.D.S. ci-dessus n'a plus de sens dès lors que W n'est plus diffétentiable. Dans le cas général où W est seulement dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on peut cependant définir un processus via la forme de Dirichlet :

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u(x).\nabla v(x) m(dx) \quad , \qquad u,v \in H^1(m)$$

où l'on note $m(x) = e^{-W(x)}$ et par abus de notations, $m(dx) = m(x)dx$. Notons que cette forme est ici considérée comme agissant sur un sous-espace de $L^2(m)$ et que le processus associé, qui est à trajectoires continues, est donc m-symmétrique (voir [2]). Signalons également que la loi du processus, que nous noterons dorénavant X_t, n'est pas définie partant de tout point, mais de quasi-tout point (voir [2], théorème 4.3.6.). Il nous faut enfin préciser que, lorsque W est régulier, le processus associé est solution de l'E.D.S. (1).
Les questions que nous nous poserons au sujet de ces processus sont les suivantes :

- que peut-on dire de la structure du processus, peut-on identifier sa partie martingale et sa partie à énergie nulle, et quand le processus est-il une semi-martingale ?

- existe-il une version particulière du processus telle que l'on puisse parler sans ambiguité de la loi du processus partant de tout point ?

– que peut-on obtenir comme théorèmes de convergence lorsque W varie ?

– quel est le comportement de X_t lorsque t tend vers $+\infty$?

Il n'existe à notre connaissance aucune réponse même partielle à la première question. Nous montrerons que la partie martingale du processus est toujours un mouvement Brownien, et nous trouverons en dimension 1 une condition nécessaire et suffisante pour que X_t soit une semi-martingale. Dans ce cas justement, toujours en dimension 1 et lorsque W est également continu, nous pourrons exprimer la partie à variations finies du processus en termes de temps local. En dimension plus grande, nous verrons que la même condition est suffisante mais non nécessaire pour que X_t soit une semi-martingale.
Pour la deuxième question, nous prouverons les estimées d'Aronson dans le cas où W est borné, ce qui assurera l'existence d'une densité continue $p(t, x, y)$ correspondant au semi-groupe associé. Ce résultat est déjà démontré dans Sturm [15],[16] et [17], il est également annoncé dans Lyons-Zheng [8] et utilisé dans Zheng [20]. Nous en donnerons une nouvelle preuve, basée sur une méthode de Stroock [14], et par rapport aux résultats précédents, nous étudierons la dépendance des constantes qui apparaissent dans les estimées d'Aronson pas rapport aux bornes de W. Nous pourrons ainsi étendre le résultat d'existence d'une densité continue lorsque W ne croit (et ne décroit) pas trop vite à l'infini.
Pour la troisième question, il existe deja de nombreux resultats. Un critère de tension avec densités initiales se trouve dans Takeda [18], qui utilise la décomposition en Backward et Forward Martingale telle qu'on la trouve dans Lyons-Weian [6]. En complétant ce résultat avec celui de Lyons-Zhang [7], on a la convergence en loi lorsque les potentiels considérés sont uniformément bornés. Citons également le résultat de Kuwae-Uemaura [5], qui se base sur les travaux de Sturm et qui montre la convergence lorsque les potentiels ne croissent pas trop vite à l'infini.
Nous obtiendrons deux résultats de convergence en loi. Le premier sera une généralisation de [18] et [6], puisque nous montrerons la convergence avec densités initiales avec comme seule contrainte le fait que le processus associé au potentiel limite soit conservatif. Nous démontrerons à l'occasion un théorème de convergence des temps de sortie, basé sur un résultat de Mathieu [9].
Nous montrerons ensuite, dans le cas de potentiels uniformément bornés, un résultat de convergence pour toutes lois initiales. Ce théorème est à notre connaissance le premier de ce type. Son application principale sera le résultat aux limites suivant : si $W(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$, alors :

$$\frac{X_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \to \infty]{} \mathcal{N}(0, 1)$$

Ce théorème correspond intuitivement à la situation où "il ne se passe rien à l'infini", ou plus précisément : à la limite, tout se passe comme si l'on avait un mouvement Brownien tout seul.
Nous n'avons pas pour l'instant obtenu d'autres résultats aux limites. Sur ce sujet, on pourra consulter les travaux de Kawasu-Tanaka [19] pour un milieu aléatoire $Brownien + drift$ en dimension 1, ceux de Hu-Shi [3] pour un milieu $Brownien$, et les travaux de Pierre Mathieu en dimension supérieure [11] [12] [10] [9]. Pour un résultat aux limites sur les temps d'occupation, on consultera l'article de Mück [13].

2 Structure des Processus

2.1 Décomposition en fonctionnelles additives

Rappelons que pour une forme de Dirichlet générale de domaine $\mathcal{F}$, et pour toute fonction $u \in \mathcal{F}$, il existe une unique décomposition en fonctionnelles additives de la forme :

$$\tilde{u}(X_t) - \tilde{u}(X_0) = M_t + N_t$$

où :

- $\tilde{u}$ est une version quasi-continue de u.
- M_t est une martingale d'énergie finie.
- N_t est une fonctionnelle additive d'énergie nulle.

Pour les processus qui nous occupent, la fonction i^e coordonnée n'est pas en général dans le domaine de la forme. Pour donner la décomposition du processus X_t lui-même, il nous faut étendre celle donnée par Fukushima à des fonctions qui sont localement dans $\mathcal{F}$.
On dit que u est localement dans $\mathcal{F}$, soit $u \in \mathcal{F}_{loc}$, si pour tout ensemble G ouvert relativement compact de X (où X est l'espace de Hausdorff relativement compact et séparable de référence, pour nous $X = \mathbb{R}^d$) il existe $v \in \mathcal{F}$ telle que $u = v$ *m.p.s. sur* G. On a alors le :

Lemme 1 *toute fonction $u \in \mathcal{F}_{loc}$ admet une version quasi-continue.*

Prenons en effet des G_n ouverts relativement compacts tels que $G_n \nearrow X$. Pour chaque G_n, choisissons v_n quasi-continue telle que $v_n = u$ *m.p.s* sur G_n. Remarquons ensuite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_{n+1} \; q.e. \; sur \; G_n$$

car $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_{n+1}$ *m.p.s. sur* G_n et v_n et v_{n+1} sont quasi-continues (voir Fukushima, lemme 3.1.4.).
Soit maintenant $N = \{x \in X, \exists n \in \mathbb{N}, v_n(x) \neq v_{n+1}(x) \; et \; x \in G_n\}$, on a d'après ce qui précède $Cap(N) = 0$, et l'on peut définir :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} v_n(x) \; si \; x \in G_n \setminus N \\ 0 \; si \; x \in N \end{cases}$$

Il est clair que $\tilde{u}$ est une version de u, et si l'on fixe $\varepsilon > 0$, on peut choisir pour tout $n \in \mathbb{N}$ un ouvert θ_n tel que :

- v_n restreinte à $X \setminus \theta_n$ est continue.
- $Cap(\theta_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$.

On a alors :

$$Cap(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \theta_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et l'on peut trouver un ouvert G tel que :

- $N \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \theta_n) \subset G$
- $Cap(G) < \varepsilon$

D'autre part, $\tilde{u}$ restreinte à $X \setminus G$ est continue, ce qui prouve que $\tilde{u}$ est quasi-continue. □
On dit qu'une fonctionnelle additive M est dans $\dot{\mathcal{M}}_{loc}$ lorsque pour tout ouvert G relativement compact, il existe M^G appartenant à $\dot{\mathcal{M}}$ telle que :

$$M_t = M_t^G \quad \forall t < \sigma_{X\setminus G} \ P_x.p.s.,\ q.e.\ x \in X \quad (\text{où } \sigma_{X\setminus G} = \{t > 0 : X_t \notin G\})$$

On définit de même $\mathcal{N}_{c,loc}$ par rapport à $\mathcal{N}_c$ et l'on a :

Théorème 2 *pour $u \in \mathcal{F}_{loc}$, il existe une unique décomposition de la forme :*

$$\tilde{u}(X_t) - \tilde{u}(X_0) = M_t^u + N_t^u$$

avec M^u appartenant à $\dot{\mathcal{M}}_{loc}$ et N^u à $\mathcal{N}_{c,loc}$, l'unicité étant définie au sens de l'équivalence pour les fonctionnelles additives.

Pour l'existence, il suffit de choisir des G_n ouverts relativement compacts tels que $G_n \nearrow X$, et des v_n dans $\mathcal{F}$ telles que $v_n = u$ *m.p.s. sur* G_n. Grâce au lemme 5.4.6. (Fukushima), on peut définir de façon cohérente $M_t^u = M_t^{v_n} \quad \forall t < \sigma_{X\setminus G_n}\ P_x.p.s.,\ q.e.\ x \in X$, ainsi que $N_t^u = \tilde{u}(X_t) - \tilde{u}(X_0) - M_t^u$, et il est évident grâce à ce même lemme que M^u (respectivement N^u) est dans $\dot{\mathcal{M}}_{loc}$ (respectivement $\mathcal{N}_{c,loc}$).
Pour l'unicité, soit $N \in \dot{\mathcal{M}}_{loc} \cap \mathcal{N}_{c,loc}$, il faut montrer que $N = 0\ P_x.p.s.,\ q.e.\ x \in X$. Il est clair tout d'abord par définition de $\dot{\mathcal{M}}_{loc}$ que $q.e.\ x \in X$, $(N_t, \mathcal{F}_t, P_x)$ est une martingale locale, et qu'il existe une unique fonctionnelle additive positive et continue (PCAF) notée $\langle N \rangle$ telle que $q.e.\ x \in X$, $(\langle N \rangle_t, \mathcal{F}_t, P_x)$ est le crochet de la martingale locale $(N_t, \mathcal{F}_t, P_x)$.
Soit ensuite $p \in \mathbb{N}$ et N^p appartenant à $\mathcal{N}_c$ tels que $N_t^p = N_t$ pour $t < \sigma_p$ (où σ_p est le temps de sortie d'un ouvert relativement compact G_p avec $G_p \nearrow X$ losque $p \to \infty$), $P_x.p.s.,\ q.e.\ x \in X$. On sait alors (5.2.10.) que pour tout $T > 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{nT} \left(N^p_{\frac{k+1}{n}} - N^p_{\frac{k}{n}} \right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \ dans\ L^1(P_m)$$

donc aussi que :

$$\sum_{k=1}^{nT} \left(N_{\frac{k+1}{n}} - N_{\frac{k}{n}} \right)^2 \mathbb{1}_{\left\{\frac{k+1}{n} < \sigma_p\right\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ dans\ L^1(P_m)$$

On fixe $T > 0$ et par procédé diagonal, on peut extraire une sous-suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n_i T} \left(N_{\frac{k+1}{n_i}} - N_{\frac{k}{n_i}} \right)^2 \mathbb{1}_{\left\{\sigma_p > \frac{k+1}{n_i}\right\}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 \quad P_m.p.s.$$

Mais $P_m.p.s.$, la trajectoire $t \to X_t$ est càd.làg, et l'on peut toujours trouver p assez grand pour que $\sigma_p > T + 1$ [1]. On a donc :

$$P_m.p.s. \quad \sum_{k=1}^{n_i T} \left(N_{\frac{k+1}{n_i}} - N_{\frac{k}{n_i}} \right)^2 \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 \tag{2}$$

[1] Pour ne pas alourdir la démonstration, nous avons ici supposé que $N_t < +\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$ et $P_m.p.s.$ Si ce n'est pas le cas, il suffit de considérer le processus tué en dehors d'ouverts relativement compacts qui tendent vers X et de passer à la limite.

Ceci prouve que $\langle N\rangle_T = 0$ $P_m.p.s.$ $\forall T \geq 0$, et pour terminer la démonstration, nous utiliserons le lemme général suivant [2] :

Lemme 3 *soit $A \in A_c^+$ (A_c^+ étant l'ensemble des fonctionnelles additives continues et positives). Si $\forall t \geq 0\,,\ A_t = 0\ \ P_m.p.s.$, alors q.e. $x \in X,\ P_x.p.s.\ \ A_t = 0\ \ \forall t \geq 0$*

On peut supposer que A est un PCAF parfait, puisque dans le cas général, on peut trouver N proprement exceptionnel tel que A est parfait pour le processus restreint à $X \setminus N$. Posons :

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{+\infty} e^{-t} dA_t\right]$$

On a par hypothèse $u(x) = 0$ $m.p.s.$ et d'autre part :

$$\begin{aligned} e^{-t} p_t u(x) &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{X_t}[\int_0^{+\infty} e^{-(t+s)} dA_s]\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\int_t^{+\infty} e^{-s} dA_s\right] \end{aligned}$$

ce qui prouve que u est $1-$excessive, et donc finement continue. D'après le lemme 4.2.5. de Fukushima, on a donc $u(x) = 0$ $q.e.$ $x \in X$.
On déduit de ce lemme que N est équivalent à la fonctionnelle additive nulle au sens de Fukushima et on a bien l'unicité. □
Dans le cas des formes de Dirichlet du type :

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u.\nabla v)(x) e^{-W(x)} dx$$

l'exemple 5.2.1. traité par Fukushima montre que la mesure lisse associée au crochet de la martingale est donnée pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ par :

$$\mu_{\langle M^u\rangle}(dx) = (\nabla u)^2(x) e^{-W(x)} dx$$

et donc que :

$$\langle M^u\rangle_t = \int_0^t (\nabla u)^2(X_s) ds$$

Par passage à la limite, la même formule est valable pour $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (remarquons que $C^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}_{loc}$). Par pôlarisation, on a également pour u et v dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\langle M^u, M^v\rangle_t = \int_0^t (\nabla u.\nabla v)(X_s) ds$$

Si pour $x = (x_1, \ldots, x_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, on pose $u^i(x) = x_i$ et $M^i = M^{u_i}$ on a donc $\langle M^i, M^j\rangle_t = \delta_{ij}.t$, et la décomposition en fonctionnelles additives (multi-dimensionnelles) du processus X_t s'écrit :

$$X_t = X_0 + B_t + N_t$$

où B_t suit la loi du mouvement Brownien sous P_x, $q.e.$ $x \in X$.

[2]cette démonstration prouve également que la décomposition est unique sous la forme : $\tilde{u}(X_t) - \tilde{u}(X_0) = M_t + N_t$ avec $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale locale et $(N_t)_{t\geq 0}$ processus de variation quadratique nulle au sens de (2).

2.2 Cas de la dimension 1

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la question de savoir quand le processus X_t est-il une semi-martingale. En dimension 1, la situation est considérablement simplifiée grâce au lemme suivant :

Lemme 4 *en dimension* 1, *pour tout compact* $K \subset I\!R$, *il existe une constante* $c \geq 0$ *telle que* $Cap(x) \geq c, \ \forall x \in K$.

Dans le cas où W est borné, le résultat est évident puisque la forme de Dirichlet associée à W est équivalente à celle du mouvement Brownien, au sens où il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall u \in H^1(\mathrm{I\!R}) \quad \frac{1}{c}.\mathcal{E}'(u) \leq \mathcal{E}(u) \leq c.\mathcal{E}'(u)$$

(On a noté $\mathcal{E}$ la forme de Dirichlet associée à W et $\mathcal{E}'$ celle associée au mouvement Brownien, c'est-à-dire pour $W' \equiv 0$). Ainsi on a également $Cap(B) \geq c.Cap'(B)$ pour tout borélien B et le lemme s'en déduit puisqu'il est vrai pour le mouvement Brownien.
Dans le cas général, raisonnons par l'absurde. Si le résultat est faux, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathrm{I\!N}}$ convergeant vers un certain point x et telle que $Cap(x_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $x_n \geq x$ pour tout $n \in \mathrm{I\!N}$, le raisonnement étant le même si $x_n \leq x$. Pour $y \in \mathrm{I\!R}$, notons :

$$u_y(z) = \mathrm{I\!E}_z[e^{-\sigma_y}]$$

D'après le théorème 4.3.5. de Fukushima, on a $u_{x_n} \to 0$ dans $\mathcal{E}_1$ losrque $n \to \infty$, donc dans $L^1(m)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $u_{x_n} \to 0$ $m.p.s.$. Mais d'autre part, on a pour $m-$presque tout $y > x$, par continuité des trajectoires, le fait que pour n assez grand, $\sigma_x \geq \sigma_{x_n}$ $P_y.p.s.$, et donc $u_x(y) \leq u_{x_n}(y)$.
On en déduit que pour $m-$presque tout $y > x$, $u_x(y) = 0$, soit $\sigma_x = +\infty$ $P_y.p.s.$ Considérons maintenant le processus réfléchi sur $[x, x+1]$, dont on notera $\hat{P}_y$, $\hat{u}_y$, $\widehat{Cap}(B)$ les notions correspondantes. On note également :

$$\hat{m}(dy) = 1\!\!1_{\{y\in[x,x+1]\}}m(dy)$$

qui est sa mesure réversible. Montrons que le résultat précédent est valable pour le processus réfléchi, c'est-à-dire que $\hat{m}.p.s.$ $\hat{P}_y[\hat{\sigma}_x < +\infty] = 0$. Pour $y \in]x, x+1[$ fixé, on introduit :

$$\begin{array}{rcl}
\hat{T}_1^y & = & \inf\{t \geq 0, \ \hat{X}_t = x+1\} \\
\hat{T}_1^y & = & \inf\{t \geq \hat{T}_1^y, \ \hat{X}_t = y\} \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hat{T}_{2p+1}^y & = & \inf\{t \geq \hat{T}_{2p}^y, \ \hat{X}_t = y\} \\
\hat{T}_{2p+2}^y & = & \inf\{t \geq \hat{T}_{2p+1}^y, \ \hat{X}_t = y\} \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

On a alors pour $\hat{m}-$presque tout y :

$$\begin{array}{rcl}
\hat{P}_y[\hat{\sigma}_x < +\infty] & = & \hat{P}_y[\hat{\sigma}_x < +\infty, \, \hat{\sigma}_x < \hat{T}_1^y] + \hat{P}_y[\hat{\sigma}_x < +\infty, \, \hat{\sigma}_x > \hat{T}_1^y] \\
& = & P_y[\sigma_x < +\infty, \, \sigma_x < T_1^y] + \hat{P}_y[\hat{\sigma}_x < +\infty, \, \hat{\sigma}_x > \hat{T}_2^y]
\end{array}$$

d'où $\hat{P}_y[\hat{\sigma}_x < +\infty] = \hat{P}_y[\hat{\sigma}_x < +\infty,\, \hat{\sigma}_x > \hat{T}_2^y]$.
Par récurrence et grâce à la propriété de Markov, on a ainsi :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \hat{P}_y[\hat{\sigma}_x < +\infty] = \hat{P}_y[\hat{\sigma}_x < +\infty,\, \hat{\sigma}_x > \hat{T}_{2p}^y]$$

et comme $\hat{m}.p.s.$, $\hat{T}_p^y \to +\infty$ losrque $p \to \infty$, on a bien pour $\hat{m}-$presque tout y :

$$\hat{P}_y[\hat{\sigma}_x < +\infty] = 0$$

Ceci implique que $\widehat{Cap}(\{x\}) = 0$. Or on sait que le processus réfléchi est associé à la forme de Dirichlet :

$$\begin{cases} \mathcal{D}[\hat{\mathcal{E}}] = H^1([x, x+1]) \\ \hat{\mathcal{E}}(u, v) = \frac{1}{2}\int_x^{x+1} u'(y)v'(y)e^{-W(y)}dy \quad pour\ u, v \in \mathcal{D}[\hat{\mathcal{E}}] \end{cases}$$

et comme W est borné sur $[x, x+1]$, cette forme est équivalente à celle du Brownien réfléchi sur $[x, x+1]$, et l'on en déduit que la capacité du singleton $\{x\}$ pour le Brownien réfléchi est nulle, ce que l'on sait être faux. □
Ce lemme a de nombreuses conséquences. Tout d'abord, comme il n'y a pas d'autre ensemble exceptionnel que l'ensemble vide, on sait d'après le théorème 4.3.4. que $p_t(x, \bullet)$ est absolument continue par rapport à m, et donc par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, d'après le théorème 4.3.6., $p_t(x, \bullet)$ est parfaitement déterminée, en tant que mesure, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Enfin, le lemme implique que les fonctions quasi-continues sont exactement les fonctions continues, et que les mesures lisses sont les mesures de Radon sur $\mathbb{R}$. Nous allons ainsi pouvoir répondre à la question : quand le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est-il une semi-martingale ?
Fixons une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $u_n(x) = x$ pour $x \in [-n, n]$. Il est clair, par approximation par des temps d'arrêt d'une part, grâce à la formule d'Itô d'autre part, que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une semi-martingale si et seulement si $(u_n(X_t)_{t\geq 0})$ est une semi-martingale pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par unicité de la décomposition en fonctionnelles additives et grâce au théorème 5.3.2., ceci est vrai si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une mesure de Radon (signée) ν_n telle que :

$$\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \mathcal{E}(u_n, v) = \langle \nu_n, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} v(x)\nu_n(dx)$$

La propriété locale implique d'autre part que $\mathcal{E}(u_n, v) = \mathcal{E}(u_{n+1}, v)$ pour $v \in C_0^\infty(]-n, n[)$, et donc que ν_{n+1} et ν_n restreintes à $]-n, n[$ sont égales. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une semi-martingale, il existe donc une mesure de Radon ν telle que :

$$\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \qquad \int_{\mathbb{R}} v(x)\nu(dx) = \mathcal{E}(I, v)$$

où I est l'application identité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (Remarquons que l'on peut toujours définir $\mathcal{E}(u, v)$ pour $u \in \mathcal{F}_{loc}$ et $v \in \mathcal{F}$, v à support compact, en choisissant $w \in \mathcal{F}$ telle que $w \equiv u$ sur un voisinage du support de v, et en posant $\mathcal{E}(u, v) = \mathcal{E}(w, v)$; cette définition ne dépend pas du choix de w grâce à la propriété locale.) Ceci s'écrit :

$$\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} v'(x)e^{-W(X)}dx = \int_{\mathbb{R}} v(x)\nu(dx)$$

On en déduit que e^{-W} admet comme dérivée au sens des distributions la mesure de Radon signée 2ν, et que e^{-W}, et donc W, sont à varitations finies.

Inversement, si W est à variations finies, c'est également le cas de e^{-W}, dont la dérivée au sens des distributions est une mesure de Radon signée ν. Mais pour $n \in \mathbb{N}$, u'_n est dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $u'_n.e^{-W}$ est donc également à variations finies (voir le théorème 5.3.2. du livre de Ziemer) : on a bien l'existence d'une mesure de Radon signée ν_n telle que :

$$\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} v'(x)u'_n(x)e^{-W(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} v(x)\nu_n(dx)$$

(Remarquons que pour cette deuxième partie de la démonstration, nous n'avons pas utilisé le Lemme 4, et comme une mesure de Radon est toujours une mesure lisse, on a démontré en dimension quelconque que si W est à variations finies, le processus est une semi-martingale.)

Théorème 5 *en dimension* 1, $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une semi-martingale si et seulement si* W *est à variations finies.*

2.3 Dimension supérieure à 1

Nous avons montré qu'en dimension 1, le processus est une semi-martingale si et seulement si W est à variations finies, et nous avons vu au cours de la démonstration que l'une des implications était valable en dimension quelconque. Nous avons ainsi le :

Théorème 6 *en dimension quelconque, si* W *est à variations finies, alors le processus associé est une semi-martingale.*

Nous allons maintenant utiliser ce résultat pour montrer que la réciproque est fausse. Considérons sur $\mathbb{R}^d$ $(d > 1)$ le potentiel :

$$W(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{|x|}) \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}$$

et notons $(X_t)_{t\geq 0}$ le processus associé. Ce potentiel étant borné, la forme de Dirichlet associée est équivalente à celle du mouvement Brownien $d-$dimensionnel, et l'on en déduit que le singleton $\{0\}$ est de capacité nulle. Ceci sécrit :

$$q.e. \ x \in \mathbb{R}^d, \ P_x.p.s. \quad \sigma_0 = +\infty \tag{3}$$

Introduisons maintenant les temps d'arrêt $t_n = \inf\{t > 0 : |X_t| \leq \frac{1}{n}\}$ et les potentiels :

$$W_n(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{|x|}) \ si \ |x| \geq \frac{1}{n} \\ \sin(\frac{1}{n}) \ si \ |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

ainsi que les processus respectifs associés $(X_t^n)_{t\geq 0}$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n est borné et à variations finies, ce qui implique que X^n est une semi-martingale. Mais comme X^n et X tués en t_n sont équivalents (au sens du théorème 4.3.6. de Fukushima), on en déduit que $q.e.$ $x \in \mathbb{R}^d$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X_{t\wedge t_n})_{t\geq 0}$ est une semi-martingale. Combiné avec (3), ceci prouve que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une semi-martingale partant de $q.e.$tout point.
L'équivalence du théorème 5, valable en dimension 1, n'est donc plus vraie en dimension plus grande. Notre contre-exemple, cependant, pose plusieurs questions : est-ce que le processus associé est une semi-martingale si et seulement si W est à variations finies sauf sur un ensemble de capacité nulle ? D'autre part, nous pourrons bientôt définir, dans le cas d'un potentiel borné, la loi du processus partant de tout point. Est-ce que, dans l'exemple ci-dessus, le processus est une semi-martingale partant de tout point différent de 0 ? Est-ce que c'est une semi-martingale partant de 0 ?

3 Un théorème de convergence en loi

On peut déduire comme cas particulier de Lyons-Zhang [7] le résultat suivant, dont on tire facilement un théorème sur la convergence des lois fini-dimensionnelle :

Proposition 7 *si W, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des potentiels uniformément bornés sur $\mathbb{R}^d$ tels que $W_n \to W$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$ lorsque $n \to \infty$, et si l'on note T_t, T_t^n les semi-groupes respectifs associés, alors pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ et pout tout $t \geq 0$:*

$$T_t^n f \to T_t f \text{ fortement dans } L^2(\mathbb{R}^d, dx) \text{ lorsque } n \to \infty$$

La preuve de ce résultat est strictement analytique, et basée sur la monographie de Kato [4]. Nous allons commencer par donner une preuve probabiliste d'un résultat plus faible, où l'on suppose que les W_n convergent uniformément vers le potentiel limite W.

3.1 Convergence des lois fini-dimensionnelles

3.1.1 Notations et préliminaires

On considère une suite $(W_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ de fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant :

$$W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} W_\infty \ \ uniform\acute{e}ment\ sur\ \mathbb{R}^d$$

En notant $\mu_n(x) = \exp\{-W_n(x)\}$ pour $n \in \overline{\mathbb{N}}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, et $(\mathcal{E}^n, \mathcal{F}^n)$ les formes de Dirichlet respectives associées, on a les propriétés suivantes, dont la démonstration est immédiate :

- $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_\infty$ *uniformément sur* $\mathbb{R}^d$
- $\forall n \in \overline{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}^n = H^1(dx)$ *et* $L^2(\mu_n) = L^2(dx)$ où dx est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$
- il existe $k_1, k_2 > 0$ tels que $\forall n \in \overline{\mathbb{N}},\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ k_1 \leq \mu_n(x) \leq k_2$
- il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que :
$$\forall n, m \in \overline{\mathbb{N}}, \quad \forall u \in H^1(dx), \quad c_1\ \mathcal{E}^n(u) \leq \mathcal{E}^m(u) \leq c_2\ \mathcal{E}^n(u) \tag{4}$$
$$et \quad \forall u \in \mathrm{L}^2(dx), \quad c_1\ \|\|_{L^2(\mu_n)} \leq \|u\|_{L^2(\mu_m)} \leq c_2\ \|u\|_{L^2(\mu_n)} \tag{5}$$
- il existe $K > 0$ tel que si l'on note $(T_t^n)_{t\geq 0}$ les semi-groupes respectifs associés aux $(\mathcal{E}^n, \mathcal{F}^n)$, on a :
$$\forall n, m \in \overline{\mathbb{N}},\ \forall t \geq 0,\ \forall f \in L^2(dx), \quad \|T_t^n f\|_{L^2(\mu_m)} \leq K\|f\|_{L^2(\mu_m)} \tag{6}$$
- en utilisant la formule $\mathcal{E}_\alpha^n(R_\alpha^n f) = (R_\alpha^n f, f)_{L^2(\mu_n)}$ on voit qu'il existe une constante K' telle que :
$$\forall f \in L^2(\mu_\infty),\ \forall n \in \overline{\mathbb{N}}, \forall \alpha > 0, \quad \mathcal{E}_\alpha^\infty(R_\alpha^n) \leq \frac{K'}{\sqrt{\alpha}}\|f\|_{L^2(\mu_\infty)} \tag{7}$$
- soient d'autre part $f, g \in L^2(dx)$ et $\varepsilon > 0$, pour n assez grand on a :
$$\left|(f,g)_{L^2(\mu_n)} - (f,g)_{L^2(\mu_\infty)}\right| \ \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)g(x)|\,|\mu_n(x) - \mu_\infty(x)|\ dx \ \leq\ \varepsilon\,\|f\|_{L^2(dx)}\|g\|_{L^2(dx)}$$
ce qui prouve que
$$(f,g)_{L^2(\mu_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} (f,g)_{L^2(\mu_\infty)} \tag{8}$$

– on peut sans peine généraliser ce qui précède : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites bornées dans $L^2(dx)$, alors :

$$\left|(f_n,g_n)_{L^2(\mu_n)}-(f_n,g_n)_{L^2(\mu_\infty)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{9}$$

– les mêmes résultats, par le même raisonnement, sont valables en remplaçant les produits scalaires par les formes de Dirichlet correspondantes. En particulier, soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées dans $\mathcal{F}^\infty$, et $\alpha\geq 0$, on a :

$$|\mathcal{E}^n_\alpha(f_n,g_n)-\mathcal{E}^\infty_\alpha(f_n,g_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{10}$$

Dans la suite, ces propriétés seront fréquemment utilisées, parfois sans que cela soit spécifié et en conservant les notations ci-dessus pour les constantes K,k_1,k_2,c_1 et c_2.

3.1.2 Convergence des résolvantes

On fixe $f\in L^2(dx)$ et $\alpha>0$, et on considère les résolvantes $R^n_\alpha f=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\,T^n_t f\,dt$ pour $n\in\overline{\mathbb{N}}$. Nous allons prouver que :

$$R^n_\alpha f \xrightarrow[n\to\infty]{} R^\infty_\alpha f \quad \textit{fortement dans } (\mathcal{E}^\infty_\alpha,\mathcal{F}^\infty) \tag{11}$$

Pour cela, il suffit de montrer que de toute sous-suite $(R^{n_k}_\alpha)_{k\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-sous-suite telle que (11) est vraie. Or d'après (6), on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|R^n_\alpha f\|_{L^2(\mu_\infty)}\leq \frac{K}{\alpha}\,\|f\|_{L^2(\mu_\infty)} \tag{12}$$

Par compacité faible de la boule unité dans $L^2(\mu_\infty)$, on peut donc trouver une sous-suite, que l'on notera encore $(R^n_\alpha f)_{n\in\mathbb{N}}$, et un élément $h\in L^2(\mu_\infty)$, tels que :

$$R^n_\alpha f \xrightarrow[n\to\infty]{} h \quad \textit{faiblement dans } L^2(\mu_\infty)$$

Pour identifier h et $R^\infty_\alpha f$, montrons tout d'abord que $(R^n_\alpha f)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de Cauchy dans $(\mathcal{E}^\infty_\alpha,\mathcal{F}^\infty)$. Soient $j,k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^\infty_\alpha(R^j_\alpha f-R^k_\alpha f) &= \mathcal{E}^j_\alpha(R^j_\alpha f)+\mathcal{E}^k_\alpha(R^k_\alpha f)-2\,\mathcal{E}^j_\alpha(R^j_\alpha f,R^k_\alpha f)+\textit{reste}\\ &= (f,R^j_\alpha f)_{L^2(\mu_j)}+(f,R^k_\alpha f)_{L^2(\mu_k)}-2\,(f,R^k_\alpha f)_{L^2(\mu_j)}+\textit{reste}\\ &= (f,R^j_\alpha f)_{L^2(\mu_\infty)}+(f,R^k_\alpha f)_{L^2(\mu_\infty)}-2\,(f,R^k_\alpha f)_{L^2(\mu_\infty)}+\textit{reste}\end{aligned}$$

où le reste tend vers 0 lorsque $j,k\to\infty$ en vertu de (7), de (9), de (10) et de (12).
Par convergence faible dans $L^2(\mu_\infty)$ de $R^n_\alpha f$ vers h, on en déduit que $\mathcal{E}^\infty_\alpha(R^j_\alpha f-R^k_\alpha f)\to 0$ lorsque $j,k\to\infty$. On a donc montré le critère de Cauchy et par identification, on voit que $h\in\mathcal{F}^\infty$ et que :

$$R^n_\alpha f \xrightarrow[n\to\infty]{} h \quad \textit{fortement dans } (\mathcal{E}^\infty_\alpha,\mathcal{F}^\infty) \tag{13}$$

Il nous reste à prouver que $h=R^\infty_\alpha f\ \ \mu_\infty.p.s.$ Pour cela, remarquons que pour $g\in\mathcal{F}^\infty$:

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{E}^j_\alpha(R^j_\alpha f,g)-\mathcal{E}^\infty_\alpha(h,g)\right| &\leq \left|\mathcal{E}^j_\alpha(R^j_\alpha f-h,g)\right|+\left|\mathcal{E}^j_\alpha(h,g)-\mathcal{E}^\infty_\alpha(h,g)\right|\\ &\leq c_2\left|\mathcal{E}^\infty_\alpha(R^j_\alpha f-h)\right|^{\frac12}|\mathcal{E}^\infty_\alpha(g)|^{\frac12}+\left|\mathcal{E}^j_\alpha(h,g)-\mathcal{E}^\infty_\alpha(h,g)\right|\end{aligned}$$

et chacun des deux termes tend vers 0 lorsque $j \to \infty$, d'aprés (13) et (10) respectivement. Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\alpha^\infty(h,g) &= \lim_{j\to\infty} \mathcal{E}_\alpha^j(R_\alpha^j f, g)\\ &= \lim_{j\to\infty} (f,g)_{L^2(\mu_j)}\\ &= (f,g)_{L^2(\mu_\infty)}\\ &= \mathcal{E}_\alpha^\infty(R_\alpha^\infty f, g)\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que $h = R_\alpha^\infty f \quad \mu_\infty.p.s$
Nous avons donc montré la :

Proposition 8 $\forall \alpha > 0,\ \forall f \in L^2(dx),\quad R_\alpha^n f \xrightarrow[n\to\infty]{} R_\alpha^\infty f$ *fortement dans* $(\mathcal{E}_\alpha^\infty, \mathcal{F}^\infty)$

3.1.3 Convergence des semi-groupes

Pour étudier la convergence des semi-groupes, nous aurons besoin d'une propriété de continuité forte uniforme des semi-groupes. Nous utiliserons pour cela le théorème suivant, qui est une généralisation d'un résultat dû à Mathieu :

Théorème 9 *Soient D un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathcal{L}(\partial D) = 0$ (où $\mathcal{L}(.)$ est la mesure de Lebesgue), $(W_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ uniformément bornées sur $\overline{D}$ et $(h^n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ des densités uniformément bornées sur $\overline{D}$ telles que :*

- $h^n \xrightarrow[n\to\infty]{} h^\infty$ *dans* $L^1(D, dx)$.
- $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} W_\infty$ *presque partout sur* $\overline{D}$.

Si l'on note X^n le processus associé à W_n, τ^n son temps de sortie de D et $Q_{h^n}^n$ la loi du processus X^n pour la loi initiale h^n, alors la loi de $(\tau^n, X^n(\tau^n))$ sous $Q_{h^n}^n$ converge vers la loi de $(\tau^\infty, X^\infty(\tau^\infty))$ sous $Q_{h^\infty}^\infty$ lorsque $n \to \infty$.

Comme on ne s'intéresse pas à ce que deviennent les processus après qu'ils ont quitté D, on peut supposer que les potentiels W_n sont uniformément bornés sur tout $\mathbb{R}^d$. Ceci nous permet d'employer sans ambiguité l'expression q.e., puisque la notion de capacité nulle est la même pour tous les processus considérés.
Notons tout d'abord $(\mathcal{E}^{n,D}, \mathcal{F}^D)$ la plus petite extension fermée de la forme $(\mathcal{E}^{n,D}, C^\infty(\overline{D}))$ où pour toutes fonctions $u, v \in C^\infty(\overline{D})$ on a :

$$\mathcal{E}^{n,D}(u,v) = \frac{1}{2}\int_D (\nabla u.\nabla v)(x) e^{-W_n(x)} dx$$

On sait (Fukushima) que c'est une forme de Dirichlet régulière possédant la propriété locale, et l'on remarque que son domaine est indépendant de n puisque les potentiels sont tous bornés sur D.
Soit $F \in C^\infty(\overline{D})$ et $\lambda \geq 0$, notons pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$ et tout $x \in \overline{D}$:

$$hF_\lambda^n(x) = \mathbb{E}_x^n\left[e^{-\lambda\tau} F(X_\tau^n)\right]$$

où τ est le temps de sortie de D pour chacun des processus. Notons également $\mathcal{F}_D = \{u \in \mathcal{F}^D : \tilde{u} = 0 \ q.e. \ sur \ \partial D\}$ (où $\tilde{u}$ est une version quasi-continue de u), on sait alors (voir Fukushima) que hF_λ^n est dans $\mathcal{F}^D$, est quasi-continue et caractérisée par :

$$\begin{aligned} hF_\lambda^n &= F \ q.e. \ sur \ \partial D && (14) \\ \mathcal{E}_\lambda^{n,D}(v, hF_\lambda^n) &= 0 \ \ \forall v \in \mathcal{F}_D && (15) \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} hF_\lambda^n &\in F + \mathcal{F}_D && (16) \\ \mathcal{E}_\lambda^{n,D}(hF_\lambda^n) &= \inf_{u \in F+\mathcal{F}_D} \mathcal{E}_\lambda^{n,D}(u) && (17) \end{aligned}$$

Remarquons en conséquence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{E}_\lambda^{\infty,D}(hF_\lambda^\infty) = \mathcal{E}_\lambda^{\infty,D}(hF_\lambda^\infty, hF_\lambda^n)$$

puisque $hF_\lambda^\infty - hF_\lambda^n$ appartient à $\mathcal{F}_D$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda^{\infty,D}(hF_\lambda^\infty - hF_\lambda^n) &= \mathcal{E}_\lambda^{\infty,D}(hF_\lambda^n) - \mathcal{E}_\lambda^{\infty,D}(hF_\lambda^\infty) \\ &= \left[\mathcal{E}_\lambda^{n,D}(hF_\lambda^n) - \mathcal{E}_\lambda^{\infty,D}(hF_\lambda^\infty)\right] + \left[\mathcal{E}_\lambda^{\infty,D}(hF_\lambda^n) - \mathcal{E}_\lambda^{n,D}(hF_\lambda^n)\right] \\ &\leq \left[\mathcal{E}_\lambda^{n,D}(hF_\lambda^\infty) - \mathcal{E}_\lambda^{\infty,D}(hF_\lambda^\infty)\right] + \left[\mathcal{E}_\lambda^{\infty,D}(hF_\lambda^n) - \mathcal{E}_\lambda^{n,D}(hF_\lambda^n)\right] \end{aligned}$$

et chacun des deux termes tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ par convergence dominée. Ceci prouve en particulier la convergence de hF_λ^n vers hF_λ^∞ dans $L^2(D, dx)$. Il est alors évident, en utilisant les hypothèses sur les densités initiales, d'en déduire le résultat cherché. □

Soit maintenant $(W_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ (resp. $(h^n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$) une suite de potentiels (resp. de densités) uniformément bornés sur tout compact et tels que :

- $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} W_\infty$ uniformément sur $\mathbb{R}^d$.
- $h^n \xrightarrow[n\to\infty]{} h^\infty$ dans $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, et donnons-nous une partition $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^d$ et des points $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^d$ tels que :

- $\forall i \in \mathbb{N},\ x_i \in P_i$
- tout compact de $\mathbb{R}^d$ est recouvert par un nombre fini de P_i
- $\forall i \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in (P_i)^2,\ |y - x| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Notons :

- $B_i = B\left(x_i, \frac{2\varepsilon}{3}\right)$
- $h_i^n = h^n_{|P_i}$.

On remarque que :

- $P_i \subset B_i$
- $h_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} h_i^\infty$ *dans* $L^1(B_i, dx)$.

On peut donc appliquer le théorème 9. Notons τ_i^n le temps de sortie de B_i pour le processus X^n, alors la loi de $(\tau_i^n, X^n(\tau_i^n))$ sous $Q^n_{h_i^n}$ converge vers la loi de $(\tau_i^\infty, X^\infty(\tau_i^\infty))$ sous $Q^\infty_{h_i^\infty}$.

Fixons maintenant $i_1, \ldots, i_p$ tels que :

$$\forall n \in \overline{\mathbb{N}},\ \tilde{h}^n\left((P_{i_1} \cup \ldots \cup P_{i_p})^c\right) \leq \frac{\eta}{2} \ \ (où\ \tilde{h}^n(dx) = h^n(x)dx)$$

ce qui est possible grâce à la tension des mesures $(\tilde{h}^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Utilisons maintenant la tension de $Q^\infty_{h^\infty}$ sur $C([0,\infty])$:

$$\exists\delta > 0 \ tel\ que\ Q^\infty_{h^\infty}(\{\sup_{t\le 2\delta}|X^\infty_t - X^\infty_0| \ge \frac{\varepsilon}{3}\}) \le \frac{\eta}{3p}$$

Comme $|X^\infty_0 - x_i| \le \frac{\varepsilon}{3}$ $h^\infty_i.p.s.$, ceci implique que :

$$\forall i = i_1,\ldots,i_p \ :\ Q^\infty_{h^\infty_i}(\{\sup_{t\le 2\delta}|X^\infty_t - x_i| \ge \frac{2\varepsilon}{3}\}) \le \frac{\eta}{3p}$$

et donc que $Q^\infty_{h^\infty_i}(\{\tau^\infty_i \le \delta\}) \le \frac{\eta}{3p}$.
Par convergence de la loi de τ^n_i vers celle de τ^∞_i, et du fait que $]-\infty;\delta]$ est un fermé, on en déduit qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \ge N,\ \forall i = i_1,\ldots,i_p \ :\ Q^n_{h^n_i}(\{\sup_{t\le\delta}|X^n_t - x_i| \ge \frac{2\varepsilon}{3}\}) \le \frac{\eta}{2p}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} Q^n_{h^n}(\{\sup_{t\le\delta}|X^n_t - X^n_0| \ge \varepsilon\}) &\le \frac{\eta}{2} + \sum_{k=1}^{p} Q^n_{h^n_{i_k}}(\{\sup_{t\le\delta}|X^n_t - x_{i_k}| \ge \frac{2\varepsilon}{3}\}) \\ &\le \eta \end{aligned}$$

En utilisant la tension pour les indices $n < N$, on a donc le :

Lemme 10 *Soit $(W_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ (resp. $(h^n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$) une suite de potentiels (resp. de densités) uniformément bornés sur tout compact et tels que :*

- $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} W_\infty$ *uniformément sur $\mathbb{R}^d$.*
- $h^n \xrightarrow[n\to\infty]{} h^\infty$ *dans $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$.*

Alors pour tous $\varepsilon, \eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad Q^n_{h^n}(\{\sup_{t\le\delta}|X^n_t - X^n_0| \ge \varepsilon\}) \le \eta$$

Soit maintenant f une fonction continue à support inclus dans un certain compact K, f est alors uniformément continue et bornée, en valeur absolue, par une certaine constante $M > 0$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on choisit tout d'abord $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ (x-y)^2 \le \alpha \implies (f(x) - f(y))^2 \le \frac{\varepsilon}{4\sup_{n\in\mathbb{N}}\mu_n(K)}$$

puis $\delta > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Q^n_{\nu_n}(\{\sup_{t\le\delta}|X^n_t - X^n_0| \ge \sqrt{\alpha}\}) \le \frac{\varepsilon}{16M^2}$$

où ν_n est la mesure μ_n restreinte au compact K.
En utilisant l'invariance, puis la réversibilité du processus X^n, on voit alors que pour $n \in \mathbb{N}$,

$\delta' \leq \delta$ et $t \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^n_{\mu_n}\left[\left(f(X^n_{t+\delta'}) - f(X^n_t)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}^n_{\mu_n}\left[\left(f(X^n_{\delta'}) - f(X^n_0)\right)^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}^n_{\mu_n}\left[\left(f(X^n_{\delta'}) - f(X^n_0)\right)^2 \left(1\!\!1_{\{X^n_0 \in K\}} + 1\!\!1_{\{X^n_{\delta'} \in K\}}\right)\right] \\
&= 2\,\mathbb{E}^n_{\nu_n}\left[\left(f(X^n_{\delta'}) - f(X^n_0)\right)^2\right] \\
&= 2\,\mathbb{E}^n_{\nu_n}\left[\left(f(X^n_{\delta'}) - f(X^n_0)\right)^2 1\!\!1_{\{(X^n_{\delta'}-X^n_0)^2 \leq \alpha\}}\right] + 2\,\mathbb{E}^n_{\nu_n}\left[\left(f(X^n_{\delta'}) - f(X^n_0)\right)^2 1\!\!1_{\{(X^n_{\delta'}-X^n_0)^2 \geq \alpha\}}\right] \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 8M^2\, Q^n_{\nu_n}(\{\sup_{t\leq\delta} |X^n_t - X^n_0| \geq \sqrt{\alpha}\}) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

On est ainsi en mesure de démontrer le résultat suivant :

Lemme 11 *Sous les conditions du Lemme 10, soit $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$\forall \delta' \leq \delta,\ \forall t \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad \int_{\mathbb{R}^d} \left(T^n_{t+\delta'} f - T^n_t f\right)^2 \mu_n(dx) \leq \varepsilon$$

Il suffit en effet de constater que :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \left(T^n_{t+\delta'} f - T^n_t f\right)^2 \mu_n(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^n_x \left[f(X^n_{t+\delta'}) - f(X^n_t)\right]^2 \mu_n(dx) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^n_x \left[\left(f(X^n_{t+\delta'}) - f(X^n_t)\right)^2\right] \mu_n(dx) \\
&= \mathbb{E}^n_{\mu_n}\left[\left(f(X^n_{t+\delta'}) - f(X^n_t)\right)^2\right]
\end{aligned}$$

et d'utiliser ce qui précède. On étend d'ailleurs sans difficultés ce résultat à toute fonction $f \in L^2(dx)$, en choisissant une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $C_0(\mathbb{R}^d)$ approchant f en norme L^2 et en utilisant la propriété (6) de contraction uniforme des semi-groupes. On a ainsi la :

Proposition 12 *soit $f \in L^2(dx)$, alors $T^n_{t+\delta} f \xrightarrow[\delta\to 0]{} T^n_t f$ fortement dans $L^2(dx)$, et uniformément en t et en n.*

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la convergence des semi-groupes. Soit $f \in L^2(dx)$ fixée, pour tout $t \geq 0$ la suite $(T^n_t f)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(dx)$, et on peut donc en extraire une sous-suite qui converge faiblement. En fait, par procédé diagonal, on peut trouver une sous-suite telle que :

$$\forall t \in \mathbb{Q},\ T^n_t f \xrightarrow[n\to\infty]{} T_t f \text{ faiblement dans } L^2(dx)$$

où pour chaque $t \in \mathbb{Q}$, $T_t f$ est un élément de $L^2(dx)$.
Fixons maintenant $g \in L^2(dx)$, il est facile de voir grâce à la Proposition 12 que pour tout $T > 0$, la famille des suites

$$\left(\left(\int g\, T^n_t f\, d\mu_\infty\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{t\in[0,T]\cap\mathbb{Q}}$$

est uniformément de Cauchy, et donc qu'elle converge uniformément. On en déduit, en utilisant à nouveau la Proposition 12, que $(\int g\, T^n_t f d\mu_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy pour $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
On note alors

$$\varphi_t(g) = \lim_{n\to\infty} \int g\, T^n_t f\, d\mu_\infty$$

et on remarque que l'application $g \mapsto \varphi_t(g)$ est linéaire et continue, ce qui prouve qu'il existe un élément $T_t f \in L^2(dx)$ tel que :

$$T_t^n f \xrightarrow[n\to\infty]{} T_t f \ \textit{faiblement dans}\ L^2(dx)$$

Enfin, une nouvelle application de la Proposition 12 montre que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[0,T]$ (cette fois sans supposer que $t \in \mathbb{Q}$), et, par le théorème de Weierstrass, que l'application $t \mapsto T_t f$ est faiblement continue dans $L^2(dx)$.
On obtient ainsi la :

Proposition 13 *pour toute fonction $f \in L^2(dx)$, il existe une famille $(T_t f)_{t\geq 0}$ et une sous-suite (que l'on notera abusivement comme la suite de départ) telles que :*

$$\forall t \geq 0,\ T_t^n f \xrightarrow[n\to\infty]{} T_t f \ \textit{faiblement dans}\ L^2(dx)$$

De plus, la famille $(T_t f)_{t\geq 0}$ est faiblement continue dans $L^2(dx)$.

Il nous faut maintenant identifier $T_t f$ et $T_t^\infty f$. Tout d'abord, il est clair par convergence dominée que :

$$\forall \alpha > 0,\ R_\alpha^n f \xrightarrow[n\to\infty]{} R_\alpha f \ \textit{faiblement dans}\ L^2(dx)$$

où l'on définit $R_\alpha f$ par :

$$(R_\alpha f, g)_{L^2(\mu_\infty)} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) T_t f(x) \mu_\infty(dx) \qquad \forall g \in L^2(\mu_\infty)$$

Grâce à la Proposition 8, on en déduit par identification que $\forall \alpha > 0,\ R_\alpha f = R_\alpha^\infty f\ \mu_\infty\text{-}p.s.$, ce qui prouve que $\forall t \geq 0,\ T_t f = T_t^\infty f\ \mu_\infty\text{-}p.s.$ Comme $t \mapsto T_t^n f$ et $t \mapsto T_t f$ sont respectivement fortement et faiblement continues dans $L^2(dx)$, le résultat est vrai pour tout $t \geq 0$. Ceci démontre que :

$$\forall t \geq 0,\ T_t^n f \xrightarrow[n\to\infty]{} T_t^\infty f \ \textit{faiblement dans}\ L^2(dx)$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \left| \int (T_t^n f)^2 \, d\mu_\infty - \int f T_{2t}^n f \, d\mu_\infty \right| \ &\leq \ \int (T_t^n f)^2 \, d|\mu_n - \mu_\infty| + \int |f T_{2t}^n f| \, d|\mu_n - \mu_\infty| \\ &\to 0 \quad \textit{lorsque}\ n \to \infty \end{aligned}$$

on voit que :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int (T_t^n f)^2 \, d\mu_\infty &= \lim_{n\to\infty} \int f T_{2t}^n f \, d\mu_\infty \\ &= \int f T_{2t}^\infty f \, d\mu_\infty \\ &= \int (T_t^\infty f)^2 \, d\mu_\infty \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &\int (T_t^n f - T_t^\infty f)^2 \, d\mu_\infty \\ &\quad = \int (T_t^n f)^2 \, d\mu_\infty + \int (T_t^\infty f)^2 \, d\mu_\infty - 2 \int T_t^n f T_t^\infty f \, d\mu_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré la :

Proposition 14 $\forall t \geq 0,\ T_t^n f \xrightarrow[n\to\infty]{} T_t^\infty f$ *fortement dans* $L^2(dx)$

Remarquons qu'en réalité, nous n'avons jusqu'ici démontré ce résultat que pour une sous-suite de la suite de départ. Mais en l'appliquant à toutes les sous-suites et en utilisant le fait que la convergence ici considérée est une convergence dans un espace métrique, on voit qu'il est tout aussi vrai pour la suite de départ.

3.1.4 Convergence des lois fini-dimensionnelles

Le résultat que nous avons obtenu est moins général que celui de la Proposition 7. Nous allons donc utiliser celle-ci pour démontrer un théorème de convergence des lois fini-diemsionnelles. Remarquons tout d'abord qu'il est facile de généraliser la Proposition 7 de la façon suivante : pour tous $f_1, \ldots, f_k$ dans $L^2(dx)$, pour tous $s_1, \ldots, s_{k-1}$ positifs, on a :

$$f_1 T_{s_1}^n(\ldots f_{k-1} T_{s_{k-1}}^n(f_k)\ldots) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_1 T_{s_1}^\infty(\ldots f_{k-1} T_{s_{k-1}}^\infty(f_k)\ldots) \textit{ fortement dans } L^2(dx)$$

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le :

Théorème 15 *Soient des fonctions* $(W_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ *et des densités* $(h_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *telles que :*

- $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} W_\infty$ *presque partout dans* $\mathbb{R}^d$
- $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} h_\infty$ *fortement dans* $L^1(dx)$
- h_∞ *est bornée sur* $\mathbb{R}^d$.

Alors les lois fini-dimensionnelles des processus X^n *sous les lois respectives* $Q_{h_n}^n$, *convergent lorsque* $n \to \infty$ *vers celles du processus* X^∞ *sous la loi* $Q_{h_\infty}^\infty$.

L'hypothèse h_∞ bornée assure que toute convergence dans $L^2(dx)$ a lieu également dans $L^2(h_\infty)$. Considérons $t_0, t_1, \ldots, t_k$ des réels positifs tels que $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k$, et $f_0, \ldots, f_k$ des fonctions continues à supports compacts. En posant $s_i = t_i - t_{i-1}$ pour $i = 1, \ldots, k$, on constate que :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{h_n}^n\left[f_0(X_{t_0}^n)\ldots f_k(X_{t_k}^n)\right] &= \lim_{n\to\infty} \int f_0 T_{s_1}^n(\ldots f_{k-1} T_{s_k}^n(f_k)\ldots)\, dh_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f_0 T_{s_1}^n(\ldots f_{k-1} T_{s_k}^n(f_k)\ldots)\, dh_\infty \\
&= \int f_0 T_{s_1}^\infty(\ldots T_{s_k}^\infty(f_k)\ldots) dh_\infty \\
&= \mathbb{E}_{h_\infty}^\infty\left[f_0(X_{t_0}^\infty)\ldots f_k(X_{t_k}^\infty)\right]
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché.

3.2 Tension et convergence des processus

3.2.1 Résultats préliminaires

Pour montrer la tension des processus X^n, il nous faudra considérer les processus associés réfléchis sur le bord d'un ouvert régulier relativement compact. Pour que cette démarche ait un sens, il faut prouver que les processus X^n sortent peu (en probabilité) d'un compact suffisamment grand, et ceci uniformément en n. C'est le sens du lemme suivant :

Lemme 16 *soient* $(W_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ *dans* $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ *et des densités* $(h_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *telles que :*

- *les suites* $(W_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ *et* $(h_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ *sont uniformément bornées sur tout compact.*
- *le processus* X^∞ *associé à* W_∞ *est conservatif (c'est-à-dire que pour quasi-tout point* $x\in\mathbb{R}^d$*, l'on a :* P_x*.p.s.* $\forall t\geq 0 \quad |X^\infty_t|<+\infty$*).*
- $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} W_\infty$ *presque partout sur* $\mathbb{R}^d$*.*
- $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} h_\infty$ *fortement dans* $L^1(\mathbb{R}^d,dx)$*.*

Alors pour tous $T,\eta>0$*, il existe un entier* $N\in\mathbb{N}$ *et un compact* $K\subset\mathbb{R}^d$ *tels que :*

$$\forall n\geq N,\ Q^n_{h_n}(\{\exists s\in[0,T]\ :\ X^n_s\notin K\})\leq\eta$$

Pour montrer ce résultat, remarquons tout d'abord que tout compact de $C([0,T])$ est inclus dans un ensemble de la forme $\{\omega\in C([0,T]) : \forall s\in[0,T],\ \omega_s\notin K\}$ où K est un compact de $\mathbb{R}^d$. Grâce à la conservativité de X^∞, il existe donc K' ouvert régulier relativement compact de $\mathbb{R}^d$ tel que :

$$Q^\infty_{h_\infty}(\{\exists s\in[0,T+1] : X^\infty_s\notin K'\})\leq\frac{\eta}{2}$$

ce qui implique que :

$$Q^\infty_{h_\infty}(\{\tau^\infty\leq T\})\leq\frac{\eta}{2}$$

(où l'on a noté τ^n le temps de sortie de K' pour le processus X^n)

Grâce au théorème (9), on sait que les τ^n convergent en loi vers τ^∞ lorsque $n\to\infty$. Comme $[0,T]$ est un fermé, on en déduit qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geq N,\ Q^n_{h_n}(\{\tau^n\leq T\})\leq\eta$$

d'où également :

$$Q^n_{h_n}(\{\exists s\in[0,T] : X^n_s\notin K\})\leq\eta$$

(où K est un compact contenant K'). Ceci démontre le résultat cherché.
Remarque : pour appliquer tel quel le théorème (9), il faut que les densités initiales soient à support dans l'ouvert considéré. Mais comme le temps de sortie d'un ouvert D est nul dès que $X_0\notin D$, le résultat s'applique dans notre cas.

Nous allons maintenant montrer un résultat de tension concernant des processus réfléchis, toujours dans l'idée d'approcher les processus considérés par des processus réfléchis correspondants. Précisons ce que nous entendons par processus réfléchi.
Soit $W\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et D un ouvert connexe borné à bord régulier (par exemple C^∞), on sait que l'on peut construire un processus $(X^r_t,t\geq 0)$, réversible pour la mesure μ_D (où μ_D est la mesure μ habituelle restreinte à l'ouvert D) et solution de l'E.D.S. :

$$X^r_t = X^r_0 \ +\ B_t\ -\ \frac{1}{2}\int_0^t \nabla W(X^r_s)ds\ +\ \int_0^t \vec{n}(X^r_s)\mu(X^r_s)dL_s$$

où $(B_t,t\geq 0)$ est un Brownien partant de 0, $\vec{n}$ la normale au bord de D et $(L_t,t\geq 0)$ un processus croissant qui ne croit que lorsque X^r est sur le bord de D. Le processus X^r peut également être défini comme le processus associé à la forme de Dirichlet $\mathcal{E}(u,v)=\frac{1}{2}\int_D(\nabla u,\nabla v)d\mu$ restreinte à $H^1(D)$.
Remarquons que si l'on note τ le temps de sortie de D et $(X_t,t\geq 0)$ le processus habituel (non réfléchi) associé à W, il est clair que $(X_t,t<\tau)$ et $(X^r_t,t<\tau)$ ont même loi, puisqu'ils sont solution de la même E.D.S. Nous pouvons maintenant énoncer le :

Lemme 17 *soient $(W_i)_{i\in I}$ une famille dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(h_i)_{i\in I}$ une famille dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, D un ouvert connexe borné à bord régulier tel que les familles $(W_i)_{i\in I}$ et $(h_i)_{i\in I}$ soient uniformément bornées sur $\overline{D}$, K un compact inclus dans D et $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ une fonction C^2 à support dans K. Si l'on note $(X^{i,r})_{i\in I}$ les processus réfléchis associés et $(Q^i)_{i\in I}$ les lois correspondantes avec densités initiales respectives h_i restreintes à D, alors la famille des processus $(f(X^{i,r}))_{i\in I}$ sous les lois correspondantes Q^i forme une famille tendue sur $C([0,T])$ pour tout $T>0$.*

Notons $X^{i,r}_{j,s}$ la j^e coordonnée de $X^{i,r}_s$ pour $j=1,\dots,d$ et :

- $A^i f(x) = -\frac{1}{2}(\nabla W_i.\nabla f)(x) + \frac{1}{2}\Delta f(x)$ pour $i\in I$
- P^i la loi associée au processus réfléchi $X^{i,r}$ pour la densité initiale μ_i restreinte à D

Comme f est à support dans K, $\nabla f(x)$ est nul lorsque $x\in\partial D$ et la formule d'Itô nous donne :

$$f(X^{i,r}_t) = f(X^{i,r}_0) \;+\; \sum_{j=1}^d \int_0^t \nabla_j f(X^{i,r}_s)dB^i_{j,s} \;+\; \int_0^t A^i f(X^{i,r}_s)ds$$

avec $B^i_t=(B^i_{1,t},\dots,B^i_{d,t}),t\geq 0)$ un mouvement Brownien *d_dimensionnel* sous la loi P^i, partant de 0 et de masse $\mu_i(D)$, soit :

$$\mathbb{E}^{P_i}\left[F(B^i_t,t\geq 0)\right] = \mu_i(D)\;\mathcal{W}^d(F)$$

où $\mathcal{W}^d$ est la mesure de Wiener sur $(C([0,\infty)))^d$ et F une fonction mesurable positive sur ce même espace. De même, par réversibilité des mesures P^i, on peut écrire pour $T\geq 0$ et en notant $\overline{X}^{i,r}_t = X^{i,r}_{T-t}$ pour $t\in[0,T]$:

$$f(\overline{X}^{i,r}_t) = f(\overline{X}^{i,r}_0) \;+\; \sum_{j=1}^d \int_0^t \nabla_j f(\overline{X}^{i,r}_s)d\overline{B}^i_{j,s} \;+\; \int_0^t A^i f(\overline{X}^{i,r}_s)ds$$

avec $(\overline{B}^i_t,t\geq 0)$ Brownien *d_dimensionnel* sous P^i, partant de 0 et de masse $\mu_i(D)$. Si l'on note :

- $Y^i_t = \sum_{j=1}^d \int_0^t \nabla_j f(X^{i,r}_s)dB^i_{j,s}$
- $\overline{Y}^i_t = \sum_{j=1}^d \int_0^t \nabla_j f(\overline{X}^{i,r}_s)d\overline{B}^i_{j,s}$

un calcul simple montre que :

$$f(X^{i,r}_t) = f(X^{i,r}_0) + \frac{1}{2}(Y^i_t + \overline{Y}^i_{T-t} - \overline{Y}_T)$$

Pour montrer la tension des lois des $(Y^i)_{i\in I}$, on va utiliser un critère de moments. D'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{P^i}\left[(Y^i_t - Y^i_s)^4\right] &\leq C_4\;\mathbb{E}^{P^i}\left[\left(\langle Y^i,Y^i\rangle^t_s\right)^2\right]\\
&= C_4\;\mathbb{E}^{P^i}\left[\left(\int_s^t \sum_j (\nabla_j f)^2(X^{i,r}_u)du\right)^2\right]\\
&\leq Cste\;(t-s)^2
\end{aligned}$$

pour tout $i\in I$ et tous $s,t\in\mathbb{R}_+$. Comme les fonctions $h_i(x)$ et $\mu_i(x)$ sont uniformément bornées sur D, on en déduit que :

$$\mathbb{E}^{Q^i}\left[(Y^i_t - Y^i_s)^4\right] \leq Cste\;(t-s)^4$$

Ceci prouve la tension des lois des $(Y^i_t, 0\leq t\leq T)$, et de la même façon on montre celle des $(\overline{Y}^i_t, 0\leq t\leq T)$. La tension étant conservée par sommation et par retournement du temps, on en déduit le résultat cherché.

3.2.2 Convergence des processus

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant, qui suppose que les potentiels considérés sont réguliers :

Proposition 18 *soient* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, W *dans* $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* h *dans* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *tels que :*

- *les* h_n *et les* W_n *sont uniformément bornés sur tout compact.*
- $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} W$ *presque partout sur* $\mathbb{R}^d$.
- $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} h$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^d)$.
- *le processus* X *est conservatif.*

Avec les notations habituelles, on a :

$$X^n \overset{(loi)}{\longrightarrow} X \text{ au sens des processus lorsque } n\to\infty$$

c'est-à-dire que pour tout $T\geq 0$ *et pour toute fonction continue bornée* F *de* $C([0,T])$ *dans* $\mathbb{R}$ *l'on a :*

$$\mathbb{E}^{Q^n}\left[F(X^n_t, 0\leq t\leq T)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}^{Q}\left[F(X_t, 0\leq t\leq T)\right]$$

avec la convention $F(\omega_t, 0\leq t\leq T)=0$ *s'il existe* $t\leq T$ *tel que* $\omega_t=\Delta$, *où* Δ *est le point cimetière. (Ceci ne peut se produire que lorsque le processus n'est pas conservatif, et signifie que la trajectoire est "partie" en temps fini à l'infini).*

Supposons d'abord que les potentiels considérés sont uniformément bornés sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, ce qui implique en particulier qu'ils sont tous conservatifs, et montrons la tension. Soient $\varepsilon,\eta>0$, on peut d'après le Lemme 16 choisir un compact $K\subset\mathbb{R}^d$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ Q^n(\{\exists s\in[0,T]: X^n_s\notin K\})\leq\frac{\eta}{2}$$

Donnons-nous ensuite K' compact, D ouvert connexe borné à bord régulier et des fonctions $f_1,\dots,f_d$ dans $C^2(\mathbb{R}^d)$ et à support dans K' tels que :

- $K\subset K'\subset D$
- $\forall j=1,\dots,d: f_j(x)=x_j$ si $x\in K$ (où x_j est la j^e coordonnée de x)

Si pour tout $n\in\mathbb{N}$ on note $X^{n,r}$ le processus réfléchi sur ∂D correspondant à W_n, on sait d'après le Lemme 17 que pour tout $j=1,\dots,d$, les processus $(f_j(X^{n,r}))_{n\in\mathbb{N}}$ de densités initiales respectives h^D_n (où l'on note $h^D_n(x)=\mathbb{1}_{\{x\in D\}}h_n(x)$) forment une suite tendue. On peut donc pour tout j choisir δ_j tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ Q^n_{h^D_n}(\{\sup_{|t-s|\leq\delta_j}|f_j(X^{n,r}_t)-f_j(X^{n,r}_s)|\geq\frac{\varepsilon}{d}\})\leq\frac{\eta}{2d}$$

En posant $\delta=\min_j(\delta_j)$, il est clair que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ Q^n_{h^D_n}(\{\sup_{|t-s|\leq\delta}\|X^{n,r}_t-X^{n,r}_s\|\geq\varepsilon\}\cap\{\forall u\in[0,T]: X^{n,r}_u\in K\})\leq\frac{\eta}{2}$$

Mais si l'on note T^n_K (respectivement $T^{n,r}_K$) le temps de sortie de K pour le processus X^n (respectivement $X^{n,r}$), il est clair que $(X^n_t, t\leq T^n_K)$ et $(X^{n,r}_t, t\leq T^{n,r}_K)$ ont même loi. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & Q^n_{h_n^D}(\{\sup_{|t-s|\leq\delta} \|X_t^{n,r} - X_s^{n,r}\| \geq \varepsilon\}) \\ \leq\ & Q^n(\{\exists s \in [0,T] : X_s^n \notin K\}) \\ +\ & Q^n_{h_n^D}(\{\sup_{|t-s|\leq\delta} \|X_t^{n,r} - X_s^{n,r}\| \geq \varepsilon\} \cap \{\forall u \in [0,T] : X_u^{n,r} \in K\}) \\ \leq\ & \eta \end{aligned}$$

Ceci démontre la tension, et dans le cas où h est (essentiellement) bornée sur $\mathbb{R}^d$ le théorème 15 assure la convergence des lois fini-dimensionnelles, ce qui prouve la convergence en loi au sens des processus. Dans le cadre plus général de la Proposition 18, remarquons tout d'abord que les hypothèses entrainent que h est bornée sur tout compact.
Si $K \in \mathbb{R}^d$ est compact et si :

$$F : (C([0,T]))^d \to \mathbb{R}$$

est continue bornée et à support dans

$$\Omega_K = \{\omega \in (C([0,T]))^d : \omega_t \in K\ \forall t \in [0,T]\}$$

on peut procéder par "lissage" en dehors de K. Plus précisément, on se donne $\widetilde{W}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $(\widetilde{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\tilde{h}$, $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et G ouvert borné contenant K tels que :

- $\forall x \in G,\ \widetilde{W}(x) = W(x),\ \tilde{h}(x) = h(x)$.
- $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{N},\ \widetilde{W}_n(x) = W_n(x),\ \tilde{h}_n(x) = h_n(x)$.
- $\widetilde{W}$, $\tilde{h}$, les $\widetilde{W}_n$ et les $\tilde{h}_n$ sont uniformément bornés sur $\mathbb{R}^d$.
- $\tilde{h}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{h}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$
- $\widetilde{W}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \widetilde{W}$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$

Si l'on note $\tilde{Q}^n, \tilde{Q}, \tilde{X}^n, \tilde{X}$ les lois et processus associés, on a alors d'après ce qui précède :

$$\mathbb{E}^{\tilde{Q}^n}\left[F(\tilde{X}_t^n, 0 \leq t \leq T)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}^{\tilde{Q}}\left[F(\tilde{X}_t, 0 \leq t \leq T)\right]$$

Comme d'autre part les formes de Dirichlet $\mathcal{E}^n$ et $\tilde{\mathcal{E}}^n$ coincident sur $C_0^\infty(G)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (de même que $\mathcal{E}$ et $\tilde{\mathcal{E}}$), on sait d'après Fukushima (théorème 4.2.2.) que $(X_t^n, 0 \leq t \leq T \wedge T_G^n)$ et $(\tilde{X}_t^n, 0 \leq t \leq T \wedge \tilde{T}_G^n)$ ont même loi, et on a donc :

$$\mathbb{E}^{Q^n}\left[F(X_t^n, 0 \leq t \leq T)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}^{Q}\left[F(X_t, 0 \leq t \leq T)\right]$$

Supposons maintenant F continue et bornée par 1, mais à support quelconque. Soit $\varepsilon > 0$, on peut d'après le Lemme 16 trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ et un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ tels que pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$ tel que $n \geq N$ (avec la convention $X^\infty = X$ et $Q^\infty = Q$) :

$$Q^n(\{\exists s \in [0,T] : X_s^n \notin K\}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

On se donne ensuite K' compact contenant K, et F' continue, bornée par 1, à support dans $\Omega_{K'}$ et coincidant avec F sur Ω_K, et l'on observe que :

- $\forall n \geq N,\ \left|\mathbb{E}^{Q^n}[F(X_t^n, 0 \leq t \leq T)] - \mathbb{E}^{Q^n}[F'(X_t^n, 0 \leq t \leq T)]\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

– $\mathbb{E}^{Q^n}[F'(X_t^n, 0 \leq t \leq T)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}^Q[F'(X_t, 0 \leq t \leq T)]$

On en déduit que :

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \mathbb{E}^{Q^n}[F(X_t^n, 0 \leq t \leq T)] - \mathbb{E}^Q[F(X_t, 0 \leq t \leq T)] \right| \leq \varepsilon$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute F continue bornée par 1, on a bien la convergence en loi au sens des processus. Remarquons que nous n'avons utilisé la régularité des W_n que pour démontrer la tension dans le cas des processus uniformément bornés, la suite du raisonnement étant valable pour des potentiels localement bornés. Nous pouvons ainsi généraliser la Proposition 18 :

Théorème 19 *soient $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, W dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et h dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ tels que :*

- *les h_n et les W_n sont uniformément bornés sur tout compact.*
- *$W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} W$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$.*
- *$h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} h$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.*
- *le processus X est conservatif.*

Avec les notations habituelles, on a :

$$X^n \xrightarrow{(loi)} X \text{ au sens des processus lorsque } n \to \infty$$

Comme pour la Proposition 18, on suppose tout d'abord que les W_n et les h_n sont uniformément bornés sur $\mathbb{R}^d$ tout entier. La méthode consiste alors à approcher chaque W_n par une suite $(W_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ de potentiels réguliers et à appliquer la Proposition 18.
Donnons-nous une double-suite $(W_{n,p})_{n\in\mathbb{N},p\in\mathbb{N}}$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifiant :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n,p} \xrightarrow[p\to\infty]{} W_n$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$.
- la double suite $(W_{n,p})_{n\in\mathbb{N},p\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur tout $\mathbb{R}^d$.

On notera $Q^{n,p}$ la loi associée à $W_{n,p}$ avec densité initiale h_n, et $X^{n,p}$ le processus correspondant. Il est clair d'après la Proposition 18 que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X^{n,p} \xrightarrow[p\to\infty]{} X^n \text{ en loi au sens des processus} \tag{18}$$

et d'après le théorème 9 que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d),\ \tau_B^{n,p} \xrightarrow{(loi)} \tau_B^n \tag{19}$$

Soit maintenant $\eta > 0$, d'après le lemme 16 on peut trouver K compact tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Q^n(\{\exists s \in [0, T+1] : X_s^n \notin K\}) \leq \frac{\eta}{4}$$

Grâce à (19), on voit alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N_n \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall p \geq N_n,\ Q^{n,p}(\{\exists s \in [0,T] : X_s^{n,p} \notin K\}) \leq \frac{\eta}{2}$$

Comme dans la démonstration de la Proposition 18, on peut en déduire en utilisant les processus réfléchis et en appliquant le Lemme 17 que la famille $(X^{n,p})_{n\in\mathbb{N},p\geq N_n}$ est tendue. Or :

Lemme 20 *soit une famille tendue $(Q^{n,p})_{n\in\mathbb{N},p\in\mathbb{N}}$ et une suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de probabilités sur $C([0,T])$ telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $Q^{n,p}$ converge étroitement vers Q^n lorsque $p\to\infty$.*
Alors la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue.

La tension des $Q^n\pi_0^{-1}$ (lois initiales) est triviale, il nous reste à montrer le critère concernant le module de continuité. Soient $\varepsilon,\eta>0$, il existe $\delta>0$ tel que :

$$\forall n,p\in\mathbb{N},\ Q^{n,p}(\{x\in C([0,T]):w_x(\delta)>\varepsilon\})\leq\eta$$

Par le théorème de Portmanteau et la continuité en x de $w_x(\delta)$, on en déduit que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ Q^{n}(\{x\in C([0,T]):w_x(\delta)>\varepsilon\})\leq\eta$$

ce qui démontre le lemme.
Remarquons que d'une part le résultat obtenu sur $C([0,T])$ se transporte immédiatement sur $(C([0,T]))^d$, et que d'autre part il est toujours valable si la double suite $Q^{n,p}$ est indicée seulement pour $p>N_n$.
On peut ainsi terminer la démonstration du théorème 19 : grâce au lemme 20, on voit que les processus $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite tendue, et on en déduit la convergence au sens des processus comme pour la Proposition 18. Enfin, pour étendre le résultat au cas où les potentiels et les densités initiales sont seulement uniformément bornés sur tout compact, on procède exactement comme pour la Proposition 18, en utilisant le Lemme 16.

4 Estimées d'Aronson

4.1 Objectif

Dans son article "Diffusion semigroups corresponding to uniformly elliptic divergence form operators"[14], Daniel Stroock considère des opérateurs de la forme $L=\nabla\cdot(a\nabla)$, où $a:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d$ est une fonction mesurable à valeurs dans l'espace des matrices symétriques. Il démontre que si a vérifie une condition d'uniforme ellipticité (du type $\lambda I\leq a(\cdot)\leq\lambda^{-1}I$ où I est la matrice identité et λ un réel strictement positif), il existe une densité $p\in C((0,\infty),\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ correspondant au processus de Markov associé ($p(t,x,y)$ est la densité au point y de la loi de X_t partant de x) et telle que :

$$\frac{1}{Mt^{d/2}}\exp(-M|y-x|^2/t)\leq p(t,x,y)\leq\frac{M}{t^{d/2}}\exp(-|y-x|^2/Mt) \tag{20}$$

pour une certaine constante M qui ne dépend que de λ et de d. Cet encadrement a de nombreuses conséquences, que nous développerons par la suite. Nous considérons pour notre part un potentiel $W\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et l'opérateur associé $L=\frac{1}{2m(\cdot)}\nabla\cdot(m(\cdot)\nabla)$ où :

$$m(x)=e^{-W(x)}$$

Nous voulons démontrer, dans le cas où W est borné, l'existence d'une densité et donner un encadrement du type (20), en précisant la dépendance de M par rapport aux bornes de W. Conformément à la démarche de Stroock, nous supposerons tout d'abord que W est régulier.

4.2 Cadre formel

Considérons donc $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borné, dérivable à tout ordre et à dérivées bornées sur tout $\mathbb{R}^d$. On sait alors qu'il existe un unique semi-groupe de Markov $\{P_t, t \geq 0\}$ sur $C_b(\mathbb{R}^d)$ correspondant au processus associé, c'est-à-dire tel que :

$$[P_t\phi](x) - \phi(x) = \int_0^t [P_s L\phi](x)ds, \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d$$

pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. De plus, on sait sous ces hypothèses qu'il existe une unique fonction $p \in \bigcup_{n=1}^\infty C_b^\infty([1/n, n] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $(0,\infty)$ telle que :

$$[P_t\phi](x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)p(t,x,y)m(dy), \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$$

Cette fonction vérifie $p(t,x,y) = p(t,y,x)$ pour tous $(t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ainsi que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(t,x,y) &= [Lp(t,x,\cdot)](y) \quad (t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \\ \frac{\partial}{\partial t} p(t,x,y) &= [Lp(t,\cdot,y)](x) \quad (t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Soient maintenant λ et β deux réels strictement positifs tels que :

$$\beta \leq m(x) \leq \lambda, \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

Dans la suite, nous montrons les estimées d'Aronson en explicitant complètement la dépendance des constantes par rapport à λ et β, ceci en vue d'une étude ultérieure pour des potentiels non bornés. Par contre, la dépendance par rapport à la dimension d ne sera pas étudiée, et nous noterons C toute constante strictement positive qui ne dépend que de d, la valeur de C pouvant d'ailleurs varier d'une ligne à l'autre.

5 Borne supérieure

Nous utilisons pour démontrer l'existence de la borne supérieure l'inégalité de Nash : on sait qu'il existe une constante $C \in (0,\infty)$ telle que :

$$\|\phi\|_{L^2(dx)}^{2+4/d} \leq C\|\nabla\phi\|_{L^2(dx)}^2 \|\phi\|_{L^1(dx)}^{4/d}, \quad \phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d)$$

Dans toute la suite, W étant fixé, nous noterons par commodité :

$$\|\phi\|_q = \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^q m(x)dx, \qquad \phi \in L^q(\mathbb{R}^d)$$

On déduit alors immédiatement de ce qui précède :

$$\|\phi\|_2^{2+4/d} \leq C\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{1+\frac{2}{d}} \|\nabla\phi\|_2^2 \|\phi\|_1^{4/d}, \quad \phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d) \tag{21}$$

Nous noterons dorénavant :

$$\Delta = \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{1+\frac{2}{d}}$$

Soit maintenant $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, introduisons :

$$\begin{aligned}
p^\psi(t,x,y) &= e^{-\psi(x)} p(t,x,y) e^{\psi(x)}\,, \quad (t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \\
[P_t^\psi \phi](x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) p^\psi(t,x,y) m(dy)\,, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d,\ \phi \in C_b(\mathbb{R}^d) \\
[L^\psi \phi](x) &= e^{-\psi(x)} [L(e^\psi \phi)](x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ \phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que L^ψ est bien le générateur du semi-groupe $\{P_t^\psi, t \geq 0\}$, c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial}{\partial t}[P_t^\psi \phi](x) = [L^\psi P_t^\psi \phi](x)$$

Démontrons maintenant le lemme suivant, qui est l'analogue du lemme I.1.8. dans [14] :

Lemme 21 *pour chaque $q \in [1,\infty)$ et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)^+$ on a :*

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\phi_t\|_{2q} \leq -\frac{1}{2q\|\phi_t\|_{2q}^{2q-1}}\|\nabla \phi_t^q\|_2^2 + \frac{q}{2}\Gamma^2(\psi)\|\phi_t\|_{2q} \tag{22}$$

où $\phi_t = [P_t^\psi \phi]$ et $\Gamma(\psi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d}(\nabla\psi(x) \cdot \nabla\psi(x))^{1/2}$. En particulier :

$$\|P_t^\psi\|_{2\to 2} \leq \exp\left(\frac{t\Gamma^2(\psi)}{2}\right) \tag{23}$$

Notons dorénavant $(f,g) = \int f(x)g(x)m(dx)$ pour f,g dans $L^2(dx)$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\|\phi_t\|_{2q} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|[P_t^\psi \phi](x)\right|^{2q} m(dx)\right)^{1/2q} \\
&= \frac{1}{2q}\|\phi_t\|_{2q}^{1-2q} \int_{\mathbb{R}^d} 2q\,|\phi_t(x)|^{2q-1}[L^\psi \phi_t](x) m(dx) \\
&= \|\phi_t\|_{2q}^{1-2q} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t^{2q-1}(x)[L^\psi \phi_t](x) m(dx) \\
&= \|\phi_t\|_{2q}^{1-2q}\left(\phi_t^{2q-1}, L^\psi \phi_t\right)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left(\phi_t^{2q-1}, L^\psi \phi_t\right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t^{2q-1}(x) \cdot [L^\psi \phi_t](x)\, m(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t^{2q-1}(x) \cdot e^{-\psi(x)} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(m(\cdot)\frac{\partial e^\psi \phi_t}{\partial x_j}(\cdot)\right)(x)\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(\nabla(e^{-\psi}\phi_t^{2q-1}), \nabla(e^\psi \phi_t)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[(1-2q)(\phi_t^{2q-2}\nabla\phi_t, \nabla\phi_t) - 2(q-1)(\phi_t^{2q-1}\nabla\phi_t, \nabla\psi) + (\phi_t^{2q}\nabla\psi, \nabla\psi)\right] \\
&\leq \left[-q\,(\phi_t^{2q-2}\nabla\phi_t, \nabla\phi_t) + q\,(\phi_t^{2q}\nabla\psi, \nabla\psi)\right] \\
&\leq -\frac{1}{2q}\|\nabla\phi_t^q\|_2^2 + \frac{q}{2}\,\Gamma^2(\psi)\|\phi_t\|_{2q}^{2q}
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat cherché. □
Toujours avec la notation $\phi_t = P_t^{\psi}\phi$, notons :

$$\begin{aligned} u_q(t) &= \|\phi_t\|_{2q}\,, \quad t \geq 0,\ q \in [1,\infty) \\ \omega_q(t) &= \sup_{0\leq s\leq t} s^{d(q-2)/4q} u_{q/2}(s), \quad t \geq 0\,,\ q \in [2,\infty) \end{aligned}$$

On a, d'après ce qui précède :

$$\omega_2(t) \leq \exp\left(\frac{t\Gamma^2(\psi)}{2}\right)\|\phi\|_2\,, \quad t \geq 0 \tag{24}$$

et de plus :

$$\begin{aligned} u_q'(t) &\leq -\frac{1}{2qu_q(t)^{2q-1}}\cdot\|\nabla\phi_t^q\|_2^2 + \frac{q\Gamma^2(\psi)}{2}u_q(t) \\ &= -\frac{1}{2qC\Delta}\cdot\frac{\|\phi_t^q\|_2^{2+4/d}}{u_q(t)^{2q-1}\|\phi_t^q\|_1^{4/d}} + \frac{q\Gamma^2(\psi)}{2}u_q(t) \\ &\leq -\frac{1}{2qC\Delta}\cdot\frac{u_q(t)^{1+4q/d}}{u_{q/2}(t)^{4q/d}} + \frac{q\Gamma^2(\psi)}{2}u_q(t) \\ &\leq -\frac{1}{2qC\Delta}\cdot\frac{t^{q-2}u_q(t)^{1+4q/d}}{\omega_q(t)^{4q/d}} + \frac{q\Gamma^2(\psi)}{2}u_q(t) \end{aligned}$$

Lemme 22 *soient $\alpha,\beta,\epsilon > 0$ et $q \in [0,\infty)$. Soit $\omega : [0,\infty) \to (0,\infty)$ une fonction continue croissante. Si $u \in C^1([0,\infty),(0,\infty))$ satisfait :*

$$u'(t) \leq -\frac{\epsilon}{q}\cdot\frac{t^{q-2}u(t)^{1+\beta q}}{\omega(t)^{\beta q}} + q\alpha^2 u(t)\,, \quad t \geq 0$$

alors il existe $K = K(\epsilon,\beta) \in (0,\infty)$ telle que :

$$t^{(1-1/q)\beta}u(t) \leq \left(\frac{Kq^2}{\delta}\right)^{\frac{1}{\beta q}}\exp\left(\frac{\delta\alpha^2 t}{q}\right)\omega(t)\,, \quad t \geq 0$$

pour tout $\delta > 0$. De plus on peut choisir $K = 4/\epsilon$.

Ce lemme est exactement le lemme I.1.14. dans [14], mis-à-part que nous y ajoutons le calcul explicite $K = 4/\epsilon$. Il suffit, pour effectuer ce calcul, de reprendre la démonstration en suivant les constantes.
En choisissant :

$$\epsilon = \frac{1}{2qC\Delta},\ \alpha = \frac{\Gamma^2(\psi)}{\sqrt{2}},\ \beta = \frac{4}{d},\ \omega_t = \omega_q(t)$$

on tire :

$$\omega_{2q}(t) \leq \left(\frac{8q^2C\Delta}{\delta}\right)^{\frac{d}{4q}}\exp\left(\frac{\delta\Gamma^2(\psi)t}{2q}\right)\omega_q(t)\,, \quad q \in [2,\infty),\ t \geq 0$$

En procédant par récurrence et en utilisant (24), on en déduit qu'il existe une constante C telle que :

$$\omega_{2^n}(t) \leq C\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{d}{4}}\exp\left(\frac{(1+\delta)\Gamma^2(\psi)t}{2}\right)\|\phi\|_2$$

Mais comme pour tout $t \geq 0$:

$$\|\phi_t\|_{2^n} \leq t^{-\frac{d}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}\omega_{2^n}(t)$$

on en déduit que :

$$\|\phi_t\|_{C_b(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\phi_t\|_{2^n} \leq C\left(\frac{\Delta}{\delta t}\right)^{\frac{d}{4}} \exp\left(\frac{(1+\delta)\Gamma^2(\psi)t}{2}\right)\|\phi\|_2$$

d'où :

$$\|P_t^\psi\|_{2\to\infty} \leq C\left(\frac{\Delta}{\delta t}\right)^{\frac{d}{4}} \exp\left(\frac{(1+\delta)\Gamma^2(\psi)t}{2}\right)\|\phi\|_2$$

Mais l'adjoint de P_t^ψ est $P_t^{-\psi}$, qui satisfait la même estimée. Par dualité, on a donc la même borne pour $\|P_t^\psi\|_{1\to 2}$. Comme $P_t^\psi = P_{t/2}^\psi \circ P_{t/2}^\psi$, on a :

$$\|P_t^\psi\|_{1\to\infty} \leq C\left(\frac{\Delta}{\delta t}\right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(\frac{(1+\delta)\Gamma^2(\psi)t}{2}\right)\|\phi\|_2$$

et donc :

$$p^\psi(t,x,y) \leq C\left(\frac{\Delta}{\delta t}\right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(\frac{(1+\delta)\Gamma^2(\psi)t}{2}\right)\|\phi\|_2$$

Comme [14], on en déduit par approximation et troncature :

Lemme 23 *pour tout $\delta > 0$ et pour toute fonction $\psi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\Gamma(\psi) < \infty$, on a :*

$$p(t,x,y) \leq C\left(\frac{\Delta}{\delta t}\right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(\psi(x) - \psi(y) + \frac{(1+\delta)\Gamma^2(\psi)t}{2}\right)$$

pour tous $(t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Choisissons $\psi(x) = \theta \cdot x$ avec $\theta \in \mathbb{R}^d$, on voit que pour $\delta = 1$ ceci nous donne :

$$p(t,x,y) \leq C\left(\frac{\Delta}{t}\right)^{\frac{d}{2}} \exp(\theta \cdot (x-y) + |\theta|^2 t)$$

En choisissant $\theta = (y-x)/2t$, on obtient finalement :

$$p(t,x,y) \leq C\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{1+d/2} t^{-d/2} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{4t}\right) \tag{25}$$

6 Borne inférieure

Pour montrer la borne inférieure, nous utiliserons l'inégalité de Poincarré :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|y|^2}(\phi(y) - \langle\phi\rangle)^2 dy \leq 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|y|^2}|\nabla\phi(y)|^2 dy$$

pour toute fonction $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ et avec la notation :

$$\langle \phi \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi |y|^2} \phi(y) dy$$

Remarquons d'abord que l'inégalité de Poincarré n'est pas vraie, même à une constante près, pour une mesure autre que la mesure de Lebesgue (c'est-à-dire en essayant de remplacer dy par $m(dy)$ où m est suffisament régulière).
Choisissons en effet $m(dy) = 2dy$ dans $\mathbb{R}$ et posons :

$$\phi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{y^2}{2n}}$$

On a :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} |\nabla \phi_n(y)|^2 dy \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{y^2}{n^2} e^{-\frac{y^2}{n}} dy = \frac{1}{4n\sqrt{n\pi}}$$

D'autre part, on a : D'autre part, on a :

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} \phi_n(y) dy = \frac{1}{\sqrt{1 + 2n\pi}}$$

On a donc $\langle \phi_n \rangle = 2\alpha_n$ et :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi |y|^2} (\phi_n(y) - \langle \phi_n \rangle)^2 dy &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi |y|^2} (\phi_n(y) - \alpha_n)^2 dy - 2\alpha_n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} (\phi_n(y) - \alpha_n) dy \\ &+ \alpha_n^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} dy \end{aligned}$$

et le premier terme est positif alors que le second est nul, ce qui nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi |y|^2} (\phi_n(y) - \langle \phi_n \rangle)^2 dy \geq \frac{1}{1 + 2n\pi}$$

On voit ainsi que :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} |\nabla \phi_n(y)|^2 m(dy) = o\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi |y|^2} (\phi_n(y) - \langle \phi_n \rangle)^2 m(dy) \right)$$

lorsque $n \to \infty$. C'est cette difficulté qui nous oblige à nous écarter quelque peu, d'une façon cependant purement technique, de la preuve de Stroock.
Utilisons la majoration (25) : on sait que pour tout $t \in [1/2, 1]$ et pour tous x, y dans $\mathbb{R}^d$, on a :

$$p(t, x, y) \leq C \left(\frac{\lambda}{\beta} \right)^{1 + d/2}$$

(Rappelons que nous appelons C toute constante strictement positive qui ne dépend que de la dimension d du problème). Posons $M = C(\lambda/\beta)^{1+d/2}$ et introduisons pour tout θ fixé dans $[1/2, 1)$ et x fixé dans $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} u(t, y) &= \frac{\theta}{M} p(t, x, y) + (1 - \theta) \\ G(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi |y|^2} \ln(u(t, y)) m(dy) \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$1-\theta \le u(t,y) \le 1\,, \quad (t,x,y,\theta) \in [\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \tag{26}$$

ce qui prouve que $G(t)$ est bien définie et négative. On a :

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-\pi|y|^2}}{u(t,y)} \cdot \frac{\partial u(t,y)}{\partial t} m(dy) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla\left(\frac{e^{-\pi|y|^2}}{u(t,y)}\right) \nabla u(t,y) m(dy) \\
&= \pi \int_{\mathbb{R}^d} y e^{-\pi|y|^2} \nabla \ln(u(t,y)) m(dy) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|y|^2} |\nabla \ln(u(t,y))|^2 m(dy) \\
&\ge -\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|y|^2}|y|^2 m(dy) + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|y|^2}|\nabla \ln(u(t,y))|^2 m(dy) \\
&\ge -\lambda C + \frac{\beta}{4}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|y|^2}|\nabla \ln(u(t,y))|^2 dy \\
&\ge -\lambda C + \frac{\beta}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|y|^2}\left(\ln(u(t,y)) - \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|y|^2}\ln(u(t,y))dy\right]\right)^2 dy
\end{aligned}$$

Notons $F(t) = \int e^{-\pi|y|^2}\ln(u(t,y))dy$, de ce qui précède on tire :

$$G'(t) \ge -\lambda C + \frac{\beta}{8\pi} e^{-\pi r^2} \mathcal{L}\left\{y \in B(0,r) : u(t,y) \ge e{-}K\right\} (|F(t)| - K)^2\ , \quad r>0,\ K>0 \tag{27}$$

(où $\mathcal{L}(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue). On cherche maintenant $r>0$ tel que pour tout $t \in (0,1]$ et pour tout $x \in B(0,2)$ on ait :

$$\int_{B(0,r)^c} p(t,x,y) m(dy) \le \frac{1}{2}$$

Mais :

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)^c} p(t,x,y)m(dy) &\le C\frac{\lambda^{2+d/2}}{\beta^{1+d/2}} \int_{B(0,r)^c} t^{-d/2}\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{4t}\right) dy \\
&\le C\frac{\lambda^{2+d/2}}{\beta^{1+d/2}} \int_{B(0,\frac{r}{2}-1)^c} e^{-|y|^2} dy
\end{aligned}$$

Montrons d'autre part le lemme suivant :

Lemme 24 *la dimension d étant fixée, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante C_ϵ (qui dépend de ϵ et de d) telle que :*

$$\int_{B(0,r)^c} e^{-|y|^2} dy \le C_\epsilon \cdot e^{-\frac{r^2}{1+\epsilon}}\,, \quad r \ge 1$$

Pour démontrer le lemme, notons $\sigma(S_d)$ la surface de la sphère de rayon 1 en dimension d et effectuons les changements de variables :

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)^c} e^{-|y|^2}dy &= \int_r^\infty \sigma(S_d)\, s^{d-1} e^{-s^2} ds \\
&= \frac{\sigma(S_d)}{2}\int_{r^2}^\infty \rho^{(d-2)/2} e^{-\rho} d\rho \\
&= \frac{\sigma(S_d)}{2} \cdot r^d \int_1^\infty \rho^{(d-2)/2} e^{-r^2\rho} d\rho
\end{aligned}$$

Mais pour tout $\alpha > 0$ on peut écrire :

$$\int_1^\infty \rho^\alpha e^{R\rho} d\rho = \int_1^{1+\frac{1}{\sqrt{R}}} \rho^\alpha e^{R\rho} d\rho + \int_{1+\frac{1}{\sqrt{R}}}^\infty \rho^\alpha e^{R\rho} d\rho$$

et l'on voit facilement que le premier terme est équivalent à $\frac{e^{-R}}{R}$ lorsque $R \to \infty$, tandis que le second est négligeable. Autrement dit l'on a :

$$\int_{B(0,r)^c} e^{-|y|^2} dy \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{\sigma(S_d)}{2} \cdot r^{d-2} e^{-r^2}$$

ce qui implique en particulier le résultat cherché. □

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante C_ϵ telle que pour tous :

$$\begin{cases} x \in B(0,2) \\ t \in (0,1] \\ r \geq \sqrt{1+\epsilon}\sqrt{(4+d)\ln(\lambda) - (2+d)\ln(\beta) + C_\epsilon} \end{cases}$$

on ait :

$$\int_{B(0,r)^c} p(t,x,y)m(dy) \leq \frac{1}{2}$$

On supposera dorénavant que $\lambda > 1$ (quitte à augmenter λ, ceci n'apporte aucune restriction), et l'on tire, avec les mêmes conditions pour x, t et r :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} u(t,y)dy &\geq \frac{\theta}{M\lambda} \int_{B(0,r)} p(t,x,y)m(dy) + (1-\theta) \\ &\geq \frac{\theta}{2M\lambda} + (1-\theta) \geq \frac{1}{2M\lambda} \end{aligned}$$

Il est clair d'autre part que :

$$\int_{B(0,r)} u(t,y)dy \leq \Omega_d r^d e^{-K} + M \cdot \mathcal{L}\left(\left\{y \in B(0,r) : u(t,y) \geq e^{-K}\right\}\right)$$

(où Ω_d est le volume de la sphère de rayon 1 en dimension d). En posant $K = \ln(4\Omega_d \lambda M r^d)$ on a alors :

$$\mathcal{L}\left(\left\{y \in B(0,r) : u(t,y) \geq e^{-K}\right\}\right) \geq \frac{1}{4M^2\lambda}$$

On trouve ainsi :

$$G'(t) \geq -C\lambda - C_\epsilon \beta \left(\frac{\beta^{2+d}}{\lambda^{4+d}}\right)^{\pi(1+\epsilon)} \frac{K^2}{4M^2\lambda} + C_\epsilon \beta \left(\frac{\beta^{2+d}}{\lambda^{4+d}}\right)^{\pi(1+\epsilon)} \frac{F^2(t)}{M^2\lambda}$$

On notera que d'après (26), $\ln(u(t,y)) \leq 0$, ce qui implique que $F(t) \leq \frac{G(t)}{\lambda}$ et donc que $F^2(t) \geq \frac{G^2(t)}{\lambda}$. D'autre part, il est clair que :

$$\lim_{\beta\to 0, \lambda\to\infty} \left(\frac{\beta^{2+d}}{\lambda^{4+d}}\right)^\pi \frac{\beta K^2}{M^2\lambda} = 0$$

et l'on en déduit que pour β assez petit et λ assez grand on a :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists C, C_\epsilon > 0 : \quad G'(t) \geq -B^2 + \alpha^2 G^2(t)\,, \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]$$

avec :

$$\begin{aligned} B^2 &= (C+C_\epsilon)\lambda \\ \alpha^2 &= C_\epsilon \frac{\beta^{3+d}}{\lambda^{5+d}}\left(\frac{\beta^{2+d}}{\lambda^{4+d}}\right)^{\pi(1+\epsilon)} \end{aligned}$$

Si l'on pose $Q=-B^2-2B/\epsilon$, on en déduit comme dans [14] que $G(1)\geq Q$ ou $G(1)\geq -8/(3\epsilon^2)$. Mais pour $\epsilon>0$ fixé, il est clair lorsque β est assez petit et λ assez grand, que $Q\geq -8/(3\epsilon^2)$. Si l'on pose :

$$A=\frac{\lambda^{5+d}}{\beta^{3+d}}\left(\frac{\lambda^{4+d}}{\beta^{2+d}}\right)^{\pi(1+\epsilon)}$$

on trouve donc finalement que pour tout $\epsilon>0$, il existe $C_\epsilon>0$ tel que pour β assez petit et λ assez grand :

$$G(1)\geq -C_\epsilon A\,,\quad \theta\in[\frac{1}{2},1]$$

Par convergence monotone, ceci reste vrai pour $\theta=1$ et l'on en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|y|^2}\ln(p(1,x,y))dy\geq -C_\epsilon Z$$

où $Z=A/\beta$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \ln(p(2,x,y)) &= \ln\left(\int_{\mathbb{R}^d} p(1,x,\xi)p(1,y,\xi)m(d\xi)\right) \\ &\geq \ln\beta+\ln\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|\xi|^2}p(1,x,\xi)p(1,y,\xi)d\xi\right) \\ &\geq \ln\beta+\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|\xi|^2}p(1,x,\xi)d\xi+\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|\xi|^2}p(1,y,\xi)d\xi \\ &\geq \ln\beta-2Z \end{aligned}$$

pourvu que x et y soient dans $B(0,2)$. Finalement, on obtient le lemme suivant :

Lemme 25 *pour tout $\epsilon>0$ il existe $C_\epsilon>0$ tel que :*

$$p(2,x,y)\geq e^{-C_\epsilon Z}$$

(en conservant la notation ci-dessus pour Z et sous-entendu pour β assez petit et λ assez grand)

Nous allons maintenant tirer avantage de propriétés d'invariance de la densité. Le potentiel W étant fixé, notons $W_{r,\xi}(x)=W(rx+\xi)$, et $p^{r,\xi}(t,x,y)$ la densité correspondante. On a alors le :

Lemme 26 *pour tous $r>0$ et $\xi\in\mathbb{R}^d$ on a :*

$$p(r^2t,rx+\xi,ry+\xi)=r^{-d}p^{r,\xi}(t,x,y)\,,\quad (t,x,y)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$$

La démonstration est formellement identique à celle donnée dans [14]. □
Comme $W_{r,\xi}$ vérifie les mêmes inégalités que W, on en déduit que :

$$p(2t,x,y)\geq\frac{e^{-C_\epsilon Z}}{t^{d/2}}\,,\quad (t,x,y)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d,\ |y-x|<4\sqrt{t} \tag{28}$$

ce qui correspond à la borne inférieure près de la diagonale. Soient maintenant x et y tels que $n \leq |y-x|^2 \leq n+1$ (avec $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$), posons pour $m \in \{0,\dots,n+1\}$:

$$x_m = x + \frac{m}{n+1}(y-x)\,, \quad B_m = B(x_m, \frac{1}{\sqrt{n}})$$

Si $(\xi_{m-1},\xi_m) \in B_{m-1} \times B_m$ alors $|\xi_m - \xi_{m-1}| \leq 3/\sqrt{n} \leq 4/\sqrt{n+1}$ et donc :

$$p\left(\frac{2}{n+1}, \xi_{m-1}, \xi_m\right) \geq (n+1)^{d/2} \beta e^{-2Z}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p(2,x,y) &\geq \int_{B_1} \dots \int_{B_n} p\left(\frac{2}{n+1}, x, \xi_1\right) \dots p\left(\frac{2}{n+1}, \xi_n, y\right) m(d\xi_1) \dots m(d\xi_n) \\ &\geq \beta^n \left(n^{d/2} e^{-C_\epsilon Z}\right)^{n+1} \left(\Omega_d n^{-d/2}\right)^n \\ &\geq e^{-C_\epsilon Z} \left(\Omega_d \beta e^{-C_\epsilon Z}\right)^n \end{aligned}$$

En modifiant la constante C_ϵ dans le terme $\Omega_d \beta e^{-C_\epsilon Z}$, on peut faire disparaitre les termes Ω_d et β et inclure le cas $|y-x|^2 \leq 2$. On trouve ainsi :

$$p(2,x,y) \geq e^{-C_\epsilon Z} e^{-C'_\epsilon Z \cdot \frac{|y-x|^2}{t}}\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$$

Finalement, en réutilisant le lemme 26, on a démontré la borne inférieure :

Lemme 27 *pour tout $\epsilon > 0$ fixé, si l'on note :*

$$Z_\epsilon = \frac{\lambda^{5+d}}{\beta^{4+d}} \left(\frac{\lambda^{4+d}}{\beta^{2+d}}\right)^{\pi(1+\epsilon)}$$

il existe deux constantes $C_\epsilon, C'_\epsilon > 0$ telles que pour β assez petit et λ assez grand on a :

$$p(t,x,y) \geq e^{-C_\epsilon Z} t^{-d/2} e^{-C'_\epsilon Z \cdot \frac{|y-x|^2}{t}} \tag{29}$$

6.1 Conséquences

Avant de donner les premières applications de ce résultat, nous allons présenter deux formes simplifiées des estimées ci-dessus, l'une qui donne seulement la forme de la dépendance en λ et β des estimées d'Aronson, l'autre qui ne prend plus du tout en compte cette dépendance, et qui donne juste l'existence des estimées. Rappelons que dans les énoncés qui suivent, nous considérons un potentiel W régulier et borné et deux constantes strictement positives λ et β telles que :

$$\lambda \leq e^{-W(x)} \leq \beta$$

Théorème 28 *il existe quatre constantes $a, b, c, d > 0$ (qui dépendent de la dimension d) telles que si l'on note :*

$$\begin{aligned} P(\lambda,\beta) &= \frac{\lambda^a}{\beta^b} \\ Q(\lambda,\beta) &= \frac{\lambda^c}{\beta^d} \end{aligned}$$

on a :

$$e^{-C_1P}t^{-d/2}\exp\left(-C_2P\cdot\frac{|y-x|^2}{t}\right)\leq p(t,x,y)\leq C_3Qt^{-d/2}\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{4t}\right)$$

pour λ assez grand et β assez petit (et où les constantes C_1, C_2, C_3 ne dépendent que de d)

Ce théorème montre que la dépendance en λ et β est de la forme polynômiale pour la borne supérieure et de la forme exponentielle pour la borne inférieure. Enonçons maintenant un résultat qui ne donne aucune information sur la dépendance :

Théorème 29 *il existe une constante $M(\lambda,\beta,d)$ telle que :*

$$\frac{t^{-d/2}M}{\exp}(-M|y-x|^2/t)\leq p(t,x,y)\leq Mt^{-d/2}\exp(-|y-x|^2/Mt)$$

C'est ce résultat qui est utile à l'étude des potentiels bornés, et le calcul plus précis que nous avons effectué n'est intéressant que pour passer à l'étude de potentiels non bornés. C'est d'ailleurs ce théorème qui est présenté dans [14], et on peut remarquer que dans le chapitre qui suit ("Some Applications and Extensions"), ce sont ces seules estimées qui donnent lieu a toutes les applications, alors que la forme particulière de l'opérateur n'intervient plus.
Nous pouvons donc appliquer aux opérateurs qui nous concernent tous les résultats exposés dans [14]. Nous utiliserons en particulier, sans les redémontrer, les deux résultats suivants :

Théorème 30 *il existe $C = C(\lambda,\beta,d)\in(0,\infty)$ et $\alpha=\alpha(\lambda,\beta,d)\in(0,1)$ tels que pour tout $\delta>0$:*

$$|p(t',x',y')-p(t,x,y)|\leq\frac{C}{\delta^d}\left(\frac{|t'-t|^{1/2}\vee|x'-x|\vee|y'-y|}{\delta}\right)^\alpha$$

pour tous $(t',x',y'),(t,x,y)\in[\delta^2,\infty)\times I\!R^d\times I\!R^d$ vérifiant $|y'-y|\vee|x'-x|\leq\delta$

Théorème 31 *pour tout potentiel $W\in L^\infty(I\!R^d)$ il existe une fonction $p\in C((0,\infty)\times I\!R^d\times I\!R^d)$ qui satisfait les estimées (25) et (29) et telle que :*

$$[P_t\phi](x)=\textstyle\int_{I\!R^d}\phi(y)p(t,x,y)m(dy)\quad \textit{pour } m\textit{-presque tout } x\in I\!R^d$$

où $t\in(0,\infty)$, $\phi\in C_0^\infty(I\!R^d)$ et où $\{P_t, t\geq 0\}$ est le semi-groupe associé dans $L^2(m)$.
De plus, si des potentiels $(W_n)_{n\in I\!N}$ uniformément bornés convergent presque partout vers un potentiel W, alors les densités associées $p_n(t,x,y)$ convergent vers $p(t,x,y)$ uniformément sur tout compact de $(0,\infty)\times I\!R^d\times I\!R^d$.

Une conséquence immédiate de ce dernier résultat est que pour tout W borné (régulier ou non), la processus associé peut être défini partant de tout point. De plus, ce processus a une vitesse á l'infini de l'ordre de $\sqrt{t}$, au sens où :

- si h_t est une fonction positive déterministe telle que $h_t/\sqrt{t}\to+\infty$ lorsque $t\to\infty$ alors :

$$\frac{X_t}{h_t}\xrightarrow[(loi)]{}0\ \ \textit{lorsque}\ \ t\to\infty$$

  pour tout point de départ $x\in\mathbb{R}^d$

– si h_t est une fonction positive déterministe telle que $h_t/\sqrt{t} \to 0$ lorsque $t \to \infty$ alors pour tout $a > 0$ il existe $c > 0$ tel que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{|X_t|}{h_t} \geq a\right\}\right) \geq c$$

Une autre conséquence du résultat précédent est que le processus associé est conservatif, au sens où pour tout point de départ $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}_x(\{X_t \in \mathbb{R}^d\}) = 1$$

(rappelons que suivant la théorie des formes de Dirichlet, le processus est à valeurs dans $R^d \cup \Delta$ où Δ est le point cimetière, ou point de compactification. Si une trajectoire $(X_s)_{s\geq 0}$ explose en un temps fini $t > 0$, on a alors $X_s = \Delta$ pour tout $s \geq t$).

7 Applications

7.1 Un critère de conservativité

Nous démontrons maintenant un critère de conservativité à l'aide des estimées (25) et (29). Ce critère est moins bon que celui de Sturm [15], mais la démonstration n'est pas la même.
Dans un souci de simplification, notons provisoirement $E(\lambda, \beta, d), F(\lambda, \beta, d), G(\lambda, \beta, d), H(\lambda, \beta, d)$ les constantes, que nous remplacerons ensuite par leurs valeurs respectives, telles que :

$$\begin{array}{rcl} p(t,x,y) & \leq & E \cdot t^{-d/2} \exp(-F|y-x|^2/t) \\ p(t,x,y) & \leq & G \cdot t^{-d/2} \exp(-H|y-x|^2/t) \end{array}$$

Cherchons d'abord $\epsilon > 0$, dépendant de E, F, G et H, tel que :

$$\mathbb{P}\left(s, y, \overline{B(x,r)}^c\right) \geq \epsilon, \quad \forall s > 0, x \in \mathbb{R}^d, r > 0, y \in \partial B(x,r)$$

(où $\overline{B(x,r)}^c$ est le complémentaire de la boule fermée de centre x et de rayon r). On a grâce à la borne inférieure, en notant toujours C toute constante positive qui ne dépend que de d :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left(s, y, \overline{B(x,r)}^c\right) & = & \displaystyle\int_{\overline{B(x,r)}^c} p(s,y,z) m(dz) \\ & \geq & \beta G H^{-d/2} \displaystyle\int_{\overline{B(x,r)}^c} \left(\frac{H}{s}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{H}{s}|z-y|^2\right) dz \\ & \geq & \beta C G H^{-d/2} \end{array}$$

et l'on peut choisir $\epsilon = \beta C G H^{-d/2}$. D'autre part, si l'on note ξ_r^x le temps de sortie de la boule fermée de centre x et de rayon r, la propriété de Markov forte nous donne :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left(t, x, \overline{B(x,r)}^c\right) & = & \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}\left(t - \xi_r^x, x(\xi_r^x), \overline{B(x,r)}^c\right), \xi_r^x < t\right] \\ & \geq & \beta C G H^{-d/2} \cdot \mathbb{P}[\xi_r^x < t] \end{array}$$

D'autre part, grâce à la borne supérieure :

$$\mathbb{P}\left(t, x, \overline{B(x,r)}^c\right) \leq \lambda E F^{-d/2} \int_{|y-x|\geq r} \left(\frac{F}{t}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{F}{t}|y-x|^2\right) dy$$

Grâce au lemme 24 on en déduit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante C_ϵ telle que :

$$\mathbb{P}_x(\xi_r^x < t) \leq C_\epsilon \frac{\lambda}{\beta} \cdot \frac{E}{G} \left(\frac{H}{F}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{Fr^2}{t(1+\epsilon)}\right)$$

Rappelons que l'on a noté :

$$Z = \frac{\lambda^{5+d}}{\beta^{4+d}} \left(\frac{\lambda^{4+d}}{\beta^{2+d}}\right)^{\pi(1+\epsilon)}$$

Si l'on remplace E, F, G, H par leurs valeurs, on trouve ainsi :

$$\mathbb{P}_x(\xi_r^x < t) \leq \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{1+d/2} Z e^{C_\epsilon Z} \exp\left(-\frac{r^2}{4(1+\epsilon)t}\right)$$

On en déduit en particulier le :

Lemme 32 *il existe $M = M(\lambda, \beta, d)$ telle que :*

$$\mathbb{P}_x\left(\sup_{s\in[0,t]} |x(s) - x| \geq r\right) \leq M \exp(-r^2/Mt)$$

pour tous $(x, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ et $r > 0$

Considérons maintenant une densité initiale f à support dans un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ et notons $\xi_r = \xi_r^0$. Le résultat ci-dessus reste valable pour la densité initiale f pourvu que r soit assez grand. Autrement dit, on sait que pour toute densité initiale f à support dans un compact et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante C_ϵ telle que pour r assez grand :

$$\mathbb{P}_f(\xi_r < t) \leq \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{1+d/2} Z e^{C_\epsilon Z} \exp\left(-\frac{r^2}{4(1+\epsilon)t}\right)$$

L'intérêt de considérer une densité initiale plutôt qu'un point initial est que si deux potentiels W_1 et W_2 (non forcément bornés) sont égaux presque partout sur un ouvert $\mathcal{U}$, alors les lois des processus associés tués au temps de sortie de $\mathcal{U}$ avec une densité initiale commune à support dans $\mathcal{U}$ sont égales. Ceci nous permet d'étendre le résultat précédent de la façon suivante :

Lemme 33 *soit $W \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$, notons :*

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \sup_{x\in B(0,r)} e^{-W(x)} \\ \beta_r &= \inf_{x\in B(0,r)} e^{-W(x)} \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, si l'on note :

$$Z_r = \frac{\lambda_r^{5+d}}{\beta_r^{4+d}} \left(\frac{\lambda_r^{4+d}}{\beta_r^{2+d}}\right)^{\pi(1+\epsilon)}$$

alors pour toute densité initiale f à support dans un compact il existe une constante C_ϵ telle que pour r assez grand on a :

$$\mathbb{P}_f(\xi_r < t) \leq \left(\frac{\lambda_r}{\beta_r}\right)^{1+d/2} Z_r e^{C_\epsilon Z_r} \exp\left(-\frac{r^2}{4(1+\epsilon)t}\right)$$

Pour un potentiel W localement borné, on dira que le pocessus associé X_t est conservatif lorsque pour toute densité initiale f et pour tout $t > 0$ on a :

$$\mathbb{P}_f(\{X_t \in \mathbb{R}^d\}) = 1$$

Cette définition est équivalente à la suivante : W est conservatif si pour toute densité initiale f à support compact et pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}_f(\xi_r < t) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$$

En conservant les notations du lemme 33, on déduit de ceci :

Théorème 34 *soit $W \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$, s'il existe des constantes $\epsilon, C, R > 0$ telles que :*

$$\frac{\lambda_r^{5+d}}{\beta_r^{4+d}} \left(\frac{\lambda_r^{4+d}}{\beta_r^{2+d}}\right)^{\pi(1+\epsilon)} \leq Cr^2 \,, \quad r \geq R$$

alors le processus associé est conservatif.

Cet énoncé est un peu compliqué. Pour le simplifier, notons maintenant :

$$S_r = \sup_{x \in B(0,r)} |W(x)|$$

On déduit immédiatement de ce qui précède le :

Corollaire 35 *soit $W \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$, s'il existe des constantes $\epsilon, C > 0$ telles que :*

$$S_r \leq C + \frac{2}{9 + 2d + \pi(1+\epsilon)(7+2d)} \ln r \,, \quad r \geq 1$$

alors le processus associé est conservatif.

Comparons ce dernier résultat avec une autre manière d'obtenir un critère de conservativité en dimension 1. Soit $W \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, et soit un mouvement Brownien $\{B_t, t \geq 0\}$, notons :

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^x e^{W(y)} dy \,, \quad x \in \mathbb{R} \\ T(r) &= \int_0^r \exp\left[-2W(A^{-1}(B(s)))\right] ds \,, \quad r \geq 0 \end{aligned}$$

Si $A(+\infty) = +\infty$, $A(-\infty) = -\infty$ et si $W \in C^1(\mathbb{R})$ (mais nous aurons l'occasion de montrer que le résultat reste vrai si W est continu ou même continu par morceaux), alors le processus associé partant de $y \in \mathbb{R}$ peut se représenter sous la forme :

$$X(t) = A^{-1}(B(T^{-1}(t)))$$

ce qui implique en particulier qu'il est conservatif (ici, $\{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien partant de $A(y)$). Notons :

$$S_r = \sup_{x \in [0,r]} |W(x)|$$

et cherchons une hypothèse sur la vitesse de croissance à l'infini de S_r qui assure que $A(+\infty) = +\infty$ et $A(-\infty) = -\infty$. On trouve immédiatement : s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $r \geq 1$ on a :

$$S_r \leq C + \ln r$$

alors le processus est conservatif.
Ainsi notre critère n'est pas si mauvais puisque l'on obtient le même (à une constante près) en dimension 1 à l'aide de la représentation ci-dessus. D'un autre côté, notre critère de conservativité est peu performant, puisque la majorité des processus alétoires, comme le Brownien ou l'Ornstein-Uhlenbeck, ont une croissance à l'infini plus rapide que logarithmique. De plus, il est bien clair que si W est une réalisation typique de deux mouvements Browniens indépendants (l'un pour les $x \geq 0$, l'autre pour les $x \leq 0$), on a $A(+\infty) = +\infty$ et $A(-\infty) = -\infty$, ce qui implique que le processus associé est conservatif, alors que la croissance de $|W(x)|$ lorsque $x \to \infty$ est bien plus rapide qu'une croissance logarithmique.

7.2 Convergence en loi pour toute loi initiale

Nous allons maintenant montrer un théorème de convergence en loi pour des processus partant de lois initiales quelconques. Donnons-nous des potentiels $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniformément bornés et qui convergent presque partout lorsque $n \to \infty$ vers un potentiel W, ainsi que des points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^d$ qui convergent vers un point $x \in \mathbb{R}^d$. On notera $\{X_s^n, s \geq 0\}$ (resp. $\{X_s, s \geq 0\}$) les processus associés et dans toute la suite, la loi de $\{X_s^n, s \geq 0\}$ (resp. de $\{X_s, s \geq 0\}$) sera la loi du processus considéré partant de x_n (resp. de x). Fixons $t > 0$, notons $p_n(t, y, z)$ et $p(t, y, z)$ les densités respectives associées et remarquons que :

- $p_n(t, y, z) \xrightarrow[n \to \infty]{} p(t, y, z)$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.
- les $p_n(t, y, z)$ et $p(t, y, z)$ sont uniformément bornées sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ en vertu de la borne supérieure du théorème 29.
- $p(t, y, z)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ en vertu du théorème 30.
- toujours en vertu de la borne supérieure du théorème 29, les $p_n(t, \xi, \cdot)$ et $p(t, \xi, \cdot)$ decroissent à l'infini en norme $L^1(\mathbb{R}^d)$ uniformément sur tout compact, au sens où pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in K : \quad \int_{|z| > R} p_n(t, \xi, z) dz \leq \epsilon$$

On déduit des trois premières propriétés que :

$$p_n(t, x_n, \cdot) \xrightarrow[n \to \infty]{} p(t, x, \cdot) \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}^d.$$

et grâce à la quatrième que :

$$p_n(t, x, \cdot) \xrightarrow[n \to \infty]{} p(t, x, \cdot) \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^d)$$

Notons maintenant pour $n \in \mathbb{N}$: $\{Y_s^{n,t}, s \geq 0\}$ le processus défini par :

$$Y_s^{n,t} = X_{t+s}^n \,, \quad s \geq 0$$

Par la propriété de Markov, la loi de $\{Y_s^{n,t}, s \geq 0\}$ est la loi du processus associé à W_n partant de la densité initiale :

$$f_n(z) = p_n(t, x_n, z)$$

De plus, comme les W_n (et W) sont bornés sur $\mathbb{R}^d$, tous les processus considérés sont conservatifs, et l'on peut appliquer le Théorème 19. On sait ainsi que pour tout $t > 0$:

$$Y^{n,t} \xrightarrow[(loi)]{} Y^t \text{ au sens des processus lorsque } n \to \infty$$

ce qui implique aussi que :

$$(X_0^n, \{X_s^n, t \leq s \leq T\}) \xrightarrow[(loi)]{} (X_0, \{X_s, t \leq s \leq T\}) \;\; lorsque \; n \to \infty \tag{30}$$

puisque les variables X_0^n (resp. X_0) sont toutes déterministes sous les lois considérées.

Nous voulons en déduire la convergence en loi des X^n vers X. Soit donc $T > 0$ et $F : C(0,T) \to \mathbb{R}$ uniformément continue et bornée en valeur absolue par 1. Fixons $\delta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x, y dans $C(0,T)$:

$$\|z - y\|_{C(0,T)} \leq \alpha \implies |F(z) - F(y)| \leq \delta$$

On sait d'autre part grâce au lemme 32 qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t > 0$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{x_n}^n \left(\sup_{s\in[0,t]} |X_s^n - x_n| \geq \frac{\alpha}{2} \right) \leq M \exp(-r^2/Mt) \\ \mathbb{P}_x \left(\sup_{s\in[0,t]} |X_s - x| \geq \frac{\alpha}{2} \right) \leq M \exp(-r^2/Mt) \end{cases}$$

Choisissons maintenant $\epsilon > 0$ tel que $M \exp(-r^2/M\epsilon) \leq \delta$ et posons pour tout $(\omega_s, 0 \leq s \leq T) \in C(0,T)$:

$$\omega_s^\epsilon = \begin{cases} \omega_s \;\; si \;\; s \geq \epsilon \\ \omega_0 + \frac{s}{\epsilon}(\omega_\epsilon - \omega_0) \;\; si \;\; s \leq \epsilon \end{cases}$$

On remarque que l'application ainsi définie est continue de $C(0,T)$ dans $C(0,T)$ et que d'autre part :

$$\begin{aligned} \sup_{s\in[0,\epsilon]} |\omega_s - \omega_0| \leq \frac{\alpha}{2} &\implies \sup_{s\geq 0} |\omega_s^\epsilon - \omega_s| \leq \alpha \\ &\implies |F(\omega_s^\epsilon, 0 \leq s \leq T) - F(\omega_s, 0 \leq s \leq T)| \leq \delta \end{aligned}$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et de même pour X_s) :

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}_{x_n}^n \left[F(X_s^n, 0 \leq s \leq T) \right] - \mathbb{E}_{x_n}^n \left[F(X_s^{n,\epsilon}, 0 \leq s \leq T) \right] \right| \\ \leq \; & \left| \mathbb{E}_{x_n}^n \left[(F(X_s^n, 0 \leq s \leq T) - F(X_s^{n,\epsilon}, 0 \leq s \leq T)) \, 1_{\{\sup_{s\in[0,\epsilon]} |X_s^n - x_n| \geq \frac{\alpha}{2}\}} \right] \right| \\ & + \left| \mathbb{E}_{x_n}^n \left[(F(X_s^n, 0 \leq s \leq T) - F(X_s^{n,\epsilon}, 0 \leq s \leq T)) \, 1_{\{\sup_{s\in[0,\epsilon]} |X_s^n - x_n| \leq \frac{\alpha}{2}\}} \right] \right| \\ \leq \; & 2\mathbb{P}_{x_n}^n \left(\left\{ \sup_{s\in[0,\epsilon]} |X_s^n - x_n| \geq \frac{\alpha}{2} \right\} \right) + \delta \\ \leq \; & 3 \cdot \delta \end{aligned}$$

Mais l'application :

$$\begin{array}{rcl} C(0,T) & \to & \mathbb{R} \\ (\omega_s, 0 \le s \le T) & \to & F(\omega_s^\epsilon, 0 \le s \le T) \end{array}$$

est de la forme $\bar{F}(\omega_0, \{\omega_s, \epsilon \le s \le T\})$ avec $\bar{F}$ continue bornée. Grâce à (30) on en déduit que :

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\mathbb{E}^n_{x_n}[F(X^n_s, 0 \le s \le T)] - \mathbb{E}_x[F(X_s, 0 \le s \le T)]\right| \le 6 \cdot \delta$$

et comme ceci est vrai pour tout $\delta > 0$ on a le :

Théorème 36 *soient des potentiels $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et W uniformément bornés sur $\mathbb{R}^d$ et tels que $W_n \to W$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$. Soient également des point x_n et x de $\mathbb{R}^d$ tels que $x_n \to x$ lorsque $n \to \infty$. Si l'on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P^n_{x_n}$ (resp. P_x) la loi du processus associé à W_n (resp. à W) partant de x_n (resp. de x) alors on a :*

$$P^n_{x_n} \Longrightarrow P_x \text{ lorsque } n \to \infty$$

En utilisant le théorème de Skorohod, on généralise immédiatement pour obtenir le :

Théorème 37 *soient des potentiels $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et W uniformément bornés sur $\mathbb{R}^d$ et tels que $W_n \to W$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$. Soient également des lois μ_n et μ sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\mu_n \to \mu$ étroitement lorsque $n \to \infty$. Si l'on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P^n_{\mu_n}$ (resp. P_μ) la loi du processus associé à W_n (resp. à W) de loi initiale μ_n (resp. μ) alors on a :*

$$P^n_{\mu_n} \Longrightarrow P_\mu \text{ lorsque } n \to \infty$$

7.3 Représentation du processus en dimension 1

Dans la littérature, les processus correspondant formellement à l'équation :

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2}\nabla W(X_t)dt \tag{31}$$

pour un potentiel W non régulier sont définis de deux façons différentes (voir par exemple [3]). La première, via l'opérateur ou la forme de Dirichlet, est celle que nous utilisons. La seconde, qui est valable uniquement en dimension 1, consiste à représenter le processus partant d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ sous la forme :

$$X(t) = A^{-1}(B(T^{-1}(t))) \tag{32}$$

où :

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & \displaystyle\int_0^x e^{W(y)}dy\,, \quad x \in \mathbb{R} \\ T(r) & = & \displaystyle\int_0^r \exp\left[-2W(A^{-1}(B(s)))\right] ds\,, \quad r \ge 0 \end{array}$$

et où $\{B_t, t \ge 0\}$ est un mouvement Brownien partant de $A(x)$. Lorsque W est dans $C^1_b(\mathbb{R})$, il n'y a aucune difficulté à identifier les lois des deux processus puisqu'ils sont tous deux solutions de l'équation différentielle stochastique (31). Dans le cas où W est moins régulier, il n'existe à notre connaissance aucun argument rigoureux permettant d'identifier les deux processus. Le théorème 36 nous permet de procéder par approximation et de démontrer le :

Théorème 38 *soit $W : I\!R \to I\!R$ continu par morceaux et borné. Alors pour tout $x \in I\!R^d$ la loi du processus partant de x défini à partir de l'opérateur :*

$$L = \frac{1}{2m(\cdot)} \nabla \cdot (m(\cdot)\nabla)$$

et celle du processus défini par (32) coincident.

Soit donc W continu par morceaux et borné, soit $x \in \mathbb{R}$, notons $\{X_t, t \geq 0\}$ le processus partant de x associé à W via la forme de Dirichlet (resp. P_x sa loi) et $\{\bar{X}_t, t \geq 0\}$ le processus associé à W via la représentation (32) (resp. $\bar{P}_x$ sa loi). Nous voulons montrer que P_x et $\bar{P}_x$ sont égales pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Notons $(x_i)_{-\infty<i<+\infty}$ les points de discontinuité de W avec :

$$\ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots$$

et soient des potentiels $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$, uniformément bornés sur $\mathbb{R}$, et qui convergent vers W uniformément sur tout compact de chaque intervalle de la forme $]x_i, x_{i+1}[$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X^n(t) = A_n^{-1}(B(T_n^{-1}(t)))$$

où :

$$\begin{aligned} A_n(y) &= \int_0^y e^{W_n(z)} dz\,, \quad y \in \mathbb{R} \\ T_n(r) &= \int_0^r \exp\left[-2W_n(A_n^{-1}(B(s)))\right] ds\,, \quad r \geq 0 \end{aligned}$$

(et où $\{B_t, t \geq 0\}$ est le mouvement Brownien, partant de $A(x)$, qui sert à la représentation de $\{\bar{X}_t, t \geq 0\}$). On a : $W_n(y) \to W(y)$ presque partout lorsque $n \to \infty$, et il est facile de vérifier (dans l'ordre) que :

- $A_n(y) \to A(y)$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.
- $A_n^{-1}(y) \to A^{-1}(y)$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.
- $W_n(A_n^{-1}(y)) \to W(A^{-1}(y))$ presque partout sur $\mathbb{R}$.
- pour presque toute réalisation du Brownien $\{B_s, s \geq 0\}$, $T_n(r) \to T(r)$ uniformément sur tout compact de $[0, \infty)$.
- pour presque toute réalisation du Brownien $\{B_s, s \geq 0\}$, $T_n^{-1}(r) \to T^{-1}(r)$ uniformément sur tout compact de $[0, \infty)$.
- pour presque toute réalisation du Brownien $\{B_s, s \geq 0\}$, $X_n \to \bar{X}$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$

D'autre part, X^n est le processus associé à la forme :

$$\mathcal{E}^n(u, v) = \int_{\mathbb{R}} (\nabla u \cdot \nabla v)(x) e^{-W_n(x)} dx$$

avec $X_0^n = A_n^{-1}(A(x))$, et il est clair que :

$$A_n^{-1}(A(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

Le théorème 36 nous permet donc de conclure que la loi limite des X_n est la loi de X. $\square$

Toujours en dimension 1, soit W continu et variations finies, on sait (voir le papier "Structure du processus") que $\{X_t, t \geq 0\}$ est une semi-martingale et on souhaiterait écrire de façon explicite le terme à variations finies du processus. Supposons d'abord que W est borné, ce qui nous permet d'utiliser la représentation (32), et montrons le :

Lemme 39 *soit u à variations finies sur $I\!R$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante, alors $(u \circ f)$ est à variations finies sur $I\!R$ et sa mesure dérivée est donnée, pour toute fonction g continue à support compact, par :*

$$\int_{I\!R} g(x) d_x(u \circ f) = \int_{I\!R} g(f^{-1}(x)) dx$$

(avec la convention $g(f^{-1}(x)) = 0$ si $x \notin f(I\!R)$)

Il est clair sous les hypothèses du lemme que $(u \circ f)$ est à variations finies, et pour caractériser la mesure $d_x(u \circ f)$, il suffit de choisir des fonctions de la forme $g(x) = 1\!\!1_{]a,b]}(x)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ pour lesquelles la formule ci-dessus est évidente. $\square$

Munis de ce lemme et de la Proposition 4.6. du Chapitre 0 du Revuz-Yor, on voit que A et A^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ et que leurs dérivées sont à variations finies. En notant $Y_t = A^{-1}(B_t)$, on peut donc appliquer la formule d'Ito-Tanaka :

$$\begin{aligned} Y_t &= x + \int_0^t e^{-W(A^{-1}(B_s))} dB_s - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-W(A^{-1}(a))} L_t^a \, d_a(W \circ A^{-1}) \\ &= x + \int_0^t e^{-W(A^{-1}(B_s))} dB_s - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-W(a)} L_t^{A(a)} \, d_a W \end{aligned}$$

où $(L_t^a, a \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ est le temps local de B. Si l'on note $\hat{L}_t^a$ une version continue en t et càd-làg en a du temps local de Y, on voit que $P-$presque-sûrement :

$$\begin{aligned} L_t^a &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1\!\!1_{\{Y_s \in [A^{-1}(a), A^{-1}(a+\varepsilon)[\}} ds \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\{x \in [A^{-1}(a), A^{-1}(a+\varepsilon)[\}} \hat{L}_t^x \, dx \\ &= \frac{1}{A'(A^{-1}(a))} \hat{L}_t^{A^{-1}(a)} \end{aligned}$$

et l'on obtient ainsi :

$$Y_t = x + \int_0^t e^{-W(A^{-1}(B_s))} dB_s - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-2W(a)} \hat{L}_t^a \, d_a W$$

Notons maintenant $\mathcal{L}_t^a$ le temps local de X_t, on a $X_t = Y_{T^{-1}(t)}$ d'où $P-$preque-sûrement :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^a &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1\!\!1_{\{X_s \in [a, a+\varepsilon[\}} ds \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1\!\!1_{\{Y_{T^{-1}(s)} \in [a, a+\varepsilon[\}} ds \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{T^{-1}(t)} 1\!\!1_{\{Y_u \in [a, a+\varepsilon[\}} T'_u \, du \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\{x \in [a, a+\varepsilon[\}} e^{-2W(x)} \hat{L}_{T^{-1}(t)}^x \, dx \\ &= e^{-2W(a)} L_{T^{-1}(t)}^a \end{aligned}$$

et l'on trouve ainsi que $X_{T_t} = x + \int_0^t e^{-W(A^{-1}(B_s))} dB_s - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^a_{T_t}\, d_aW$.
On vérifie aisément que la partie martingale a comme crochet T_t, et l'on peut ainsi écrire que $X_t = x + \beta_t - \frac{1}{2}\int \mathcal{L}^a_t\, d_aW$, où β est un mouvement Brownien partant de 0.
Pour étendre ce résultat au cas où W n'est pas borné, mais tel que le processus associé est conservatif, introduisons des fonctions bornées et à variations finies W_n qui coincident respectivement avec W sur $[-n, n]$, ainsi que les processus respectifs associés X^n. Il est clair pour tout $T \geq 0$ que l'on a :

$$\mathcal{L}oi\left(X_{t\wedge t_n} - x + \frac{1}{2}\int \mathcal{L}^a_{t\wedge t_n}\, d_aW,\ 0 \leq t \leq T\right) = \mathcal{L}oi\left(X^n_{t\wedge t_n} - x + \frac{1}{2}\int \mathcal{L}^{a,n}_{t\wedge t_n}\, d_aW_n,\ 0 \leq t \leq T\right)$$

(où t_n est le temps de sortie de $[-n, n]$)
Soit F une fonction continue et bornée par 1 de $C([0,T])$ dans $\mathbb{R}$, et soit $\varepsilon > 0$, choisissons n tel que $P(t_n \leq T) \leq \varepsilon$ (ce qui est possible puisque X_t est supposé conservatif), on a alors $P^n(t_n \leq T) \leq \varepsilon$, et l'on en déduit que :

$$\left| \mathbb{E}\left[F\left(X_t - x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^a_t\, d_aW, 0 \leq t \leq T\right)\right] - \mathcal{W}(F)\right| \leq 4\varepsilon$$

(où $\mathcal{W}$ est la mesure de Wiener). Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit le :

Théorème 40 *en dimension 1, soit W continu, à variations finies et tel que le processus associé est conservatif. On a alors :*

$$X_t = X_0 + \beta_t - \frac{1}{2}\int \mathcal{L}^a_t\, d_aW$$

où β est un mouvement Brownien indépendant de X_0 et $\mathcal{L}^a_t$ est le temps local du processus.

7.4 Un résultat en temps long

Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 41 *soit $W \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que :*

$$W(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ associé partant de x vérifie :

$$\frac{X_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[(loi)]{} \mathcal{N}(0,1) \quad lorsque\ t \to \infty$$

(où $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi gaussienne centrée de variance 1)

Supposons d'abord que $W \in C^1_b(\mathbb{R}^d)$, le processus associé est alors solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = dB_t - \frac{1}{2}\nabla W(X_t)dt \\ X_0 = x \end{cases}$$

Posons pour $t > 0$ fixé :

$$Y^t_s = \frac{X_{st}}{\sqrt{t}}, \quad s \geq 0$$

et remarquons que grâce à la propriété de scaling du Brownien :

$$\begin{aligned} Y_s^t &= B'_s - \frac{1}{2\sqrt{t}} \int_0^{st} \nabla W(X_u)du \\ &= B'_s - \frac{1}{2} \int_0^{s} \sqrt{t} \cdot \nabla W(X_{ut})du \\ &= B'_s - \frac{1}{2} \int_0^{s} \nabla W^t(Y_u^t)du \end{aligned}$$

où $W^t(y) = W(\sqrt{t} \cdot y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ et où $\{B'_s, s \geq 0\}$ est un mouvement Brownien partant de $x/\sqrt{t}$. On a ainsi le :

Lemme 42 *soit $W \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $\{X_s, s \geq 0\}$ le processus associé partant de x. Soit $t > 0$, notons :*

$$Y_s^t = \frac{X_{st}}{\sqrt{t}}, \quad s \geq 0$$

alors $\{Y_s^t, s \geq 0\}$ est le processus partant de $\frac{x}{\sqrt{t}}$ associé à W^t, où :

$$W^t(y) = W(\sqrt{t} \cdot y), \quad y \in \mathbb{R}^d$$

Nous avons déjà démontré ce résultat pour W régulier. Pour W quelconque borné, le théorème 36 nous permet de procéder par approximations régulières. □

Ayant démontré le lemme, remarquons que lorsque $W(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$, on a :

$$W^t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \quad \text{presque partout sur } \mathbb{R}^d.$$

Une nouvelle application du théorème 36 nous permet d'en déduire que $\{Y_s^t, s \geq 0\}$ converge en loi vers le mouvement Brownien partant de 0 lorsque $t \to \infty$. Il suffit de considérer Y_1^t pour obtenir le résultat cherché.
Remarquons que le théorème de convergence en loi avec densités initiales n'aurait pas permis de démontrer ce résultat. En effet, même si l'on avait considéré le processus associé à W avec une densité initiale, l'homothétie de rapport $1/\sqrt{t}$ aurait fait converger la loi initiale vers un dirac en 0, ce qui ne rentre pas dans le cadre de ce théorème.

7.5 Existence d'une densité pour des processus non bornés

Nous allons monter une condition suffisante d'existence d'une densité continue pour un potentiel $W \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$, non forcément borné mais qui ne croit pas trop vite à l'infini. L'idée est d'approcher W par des potentiels W_n bornés égaux à W sur un compact et de montrer que les densités associées convergent.
Pour que cette démarche ait un sens, nous devons pouvoir identifier les densités de deux processus tués associés à des potentiels égaux sur un ouvert. Or, soient W_1 et W_2 mesurables bornés sur $\mathbb{R}^d$ et tels que $W_1(x) = W_2(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$ (où $\mathcal{D}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$), notons pour $i = 1, 2$:

- $p_i(t, x, y)$ la densité associée à W_i.

– $p^i(t,x,y)$ la densité du processus associé à W_i tué en-dehors de $\mathcal{D}$, autrement dit :

$$p^i(t,x,y) = p_i(t,x,y) - \mathbb{E}_x^i[p_i(t-\xi_i, x(\xi_i), y), \xi_i < t]\,, \quad (t,x,y) \in (0,\infty)\times\mathcal{D}\times\mathcal{D}$$

où ξ_i est le temps de sortie de $\mathcal{D}$ du processus X_i.

Comme les formes de Dirichlet restreintes à $\mathcal{D}$ sont les mêmes, il est clair que pour tout $t > 0$:

$$p^1(t,x,y) = p^2(t,x,y) \textit{ presque partout sur} \mathcal{D}\times\mathcal{D} \tag{33}$$

Mais cela ne suffit pas pour identifier partout p^1 et p^2, et nous avons besoin d'un résultat de continuité pour la densité des processus tués. Démontrons donc le :

Lemme 43 *soit $W \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, soit $\mathcal{D}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, notons pour $(t,x,y) \in (0,\infty)\times\mathcal{D}\times\mathcal{D}$:*

$$q(t,x,y) = \mathbb{E}_x[p(t-\xi, x(\xi), y), \xi < t]$$

(où ξ est le temps de sortie de $\mathcal{D}$.) Alors $q(t,x,y)$ est une fonction continue sur $(0,\infty)\times\mathcal{D}\times\mathcal{D}$.

Fixons $(t_0,x_0,y_0) \in (0,\infty)\times\mathcal{D}\times\mathcal{D}$, $\epsilon > 0$, on veut d'abord montrer que pour t, t' assez proches, pour y assez proche de y_0 et pour tout $x \in \partial\mathcal{D}$, $p(t',x,y)$ et $p(t,x,y_0)$ sont proches.
Soit $M > 0$ tel que :

$$p(t,x,y) \le M t^{-d/2}\exp(-|y-x|^2/Mt)\,, \quad (t,x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \tag{34}$$

Notons $d = dist(y_0, \mathcal{D}^c) > 0$ (où $dist(\cdot)$ est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^d$), il existe $t_1 > 0$ tel que :

$$M t^{-d/2}\exp(-|y-x|^2/Mt) \le \epsilon\,, \quad \forall t \le 2t_1,\ x \in \partial\mathcal{D},\ y \in B(y_0, \frac{d}{2}) \tag{35}$$

On sait alors grâce au théorème 30 qu'il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha \in (0,1)$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tous $t, t' > t_1$ et pour tous $y, y' \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|y'-y| \le \sqrt{t_1}$ on a :

$$|p(t',x,y') - p(t,x,y)| \le C(t_1)^{d/2}\left(\frac{|t'-t|^{1/2} \vee |y'-y|}{\sqrt{t_1}}\right)^\alpha$$

En particulier, on peut choisir $\delta_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t,t' > t_1, \forall y,y' \in \mathbb{R}^d, \quad |t'-t| \vee |y'-y| \le \delta_1 \Longrightarrow |p(t',x,y') - p(t,x,y)| \le \epsilon \tag{36}$$

Il résulte de (35) et de (36) que si l'on pose $\delta_2 = \min(t_1, \delta_1, d/2)$, on a :

$$|t'-t| \le \delta_2, y \in B(y_0,\delta_2), x \in \partial\mathcal{D} \Longrightarrow |p(t',x,y') - p(t,x,y)| \le 2\epsilon$$

En reprenant les notations du lemme 43, on déduit de ceci et de (35) que pour tout $x \in \mathcal{D}$ et pour tous $(t,y) \in B((t_0,y_0),\delta_2)$ (en supposant que $t \ge t_0$, mais la démonstration est la même, en inversant les rôles de t et t_0, dans le cas contraire) :

$$\begin{aligned}
&|q(t,x,y) - q(t_0,x,y_0)| \\
&\le \mathbb{E}_x[|p(t-\xi,x(\xi),y) - p(t_0-\xi,x(\xi),y_0)|, \xi < t_0] + \mathbb{E}_x[p(t-\xi,x(\xi),y), t_0 \le \xi < t] \\
&\le 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon
\end{aligned} \tag{37}$$

Pour terminer la démonstration, il nous reste donc à montrer que pour x suffisamment proche de x_0, $q(t_0, x, y_0)$ et $q(t_0, x_0, y_0)$ sont proches. Remarquons d'abord que grâce à (34), $p(t, x, y_0)$ est majorée (par une constante appelée désormais K) uniformément en t et en x pour $0 \leq t \leq t_0$ et $x \in \partial\mathcal{D}$.
Soit maintenant $\delta_3 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, \delta_3) \subset \mathcal{D}$ et $t_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in B(x_0, \delta_3) : \ \ \mathbb{P}_x[\xi \leq t_2] \leq \epsilon$$

On a alors pour $x \in B(x_0, \delta_3)$:

$$|\mathbb{E}^x[p(t_0 - \xi, x(\xi), y_0), \xi \leq t_0] - \mathbb{E}^x[p(t_0 - \xi, x(\xi), y_0), t_2 < \xi \leq t_0]| \leq K\epsilon$$

ainsi que :

$$\Big| \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^{X_{t_2}}[p(t_0 - t_2 - \xi, x(\xi), y_0), \xi \leq t_0 - t_2], X_{t_2} \in \mathcal{D}] \\ - \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^{X_{t_2}}[p(t_0 - \xi, x(\xi), y_0), \xi \leq t_0 - t_2], \xi > t_2] \Big| \leq K\epsilon$$

D'autre part, grâce à la propriété de Markov forte :

$$\mathbb{E}^x[p(t_0 - \xi, x(\xi), y_0), t_2 < \xi \leq t_0] = \mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^{X_{t_2}}[p(t_0 - \xi, x(\xi), y_0), \xi \leq t_0 - t_2], \xi > t_2\right]$$

ce qui implique que :

$$|\mathbb{E}^x[p(t_0 - \xi, x(\xi), y_0), \xi \leq t_0] \\ - \textstyle\int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}^v[p(t_0 - t_2 - \xi, x(\xi), y_0), \xi \leq t_0 - t_2]\, p(t_2, x, v) m(dv)| \leq 2K\epsilon$$

Enfin, il existe $\delta_4 > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $x \in B(x_0, \delta_4)$:

$$|p(t_2, x, v) - p(t_2, x_0, v)| \leq \epsilon$$

de sorte que :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}^v[p(t_0 - t_2 - \xi, x(\xi), y_0), \xi \leq t_0 - t_2]\, |p(t_2, x, v) - p(t_2, x_0, v)|\, m(dv) \leq 2K\lambda\epsilon$$

(où l'on rappelle que λ est une borne supérieure de e^{-W}.) Soit $\delta_5 = \min(\delta_3, \delta_4)$, on a ainsi pour $x \in B(x_0, \delta_5)$:

$$|\, \mathbb{E}^x[p(t_0 - \xi, x(\xi), y_0), \xi \leq t_0] - \mathbb{E}^{x_0}[p(t_0 - \xi, x(\xi), y_0), \xi \leq t_0]\,| \leq 2K\epsilon(2 + \lambda)$$

soit :

$$|\, q(t_0, x, y_0) - q(t_0, x_0, y_0)\,| \leq 2K\epsilon(2 + \lambda)$$

Avec l'aide de (37), la continuité est ainsi démontrée. □

Corollaire 44 *soient D un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $W_1, W_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tels que $W_1 \equiv W_2$ presque partout sur $\mathcal{D}$. Si l'on note $p^1(t,x,y)$ (resp. $p^2(t,x,y)$) la densité du processus associé à W_1 (resp. à W_2) tué au temps de sortie de $\mathcal{D}$, on a alors :*

$$\forall (t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}, \quad p^1(t,x,y) = p^2(t,x,y)$$

Le résultat est immédiat en utilisant le lemme et la remarque (33). □
Nous pouvons maintenant travailler par approximation. Soient $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des potentiels bornés sur $\mathbb{R}^d$ tels que :

$$\begin{cases} W_i(x) = W(x)\,, \quad i \in \mathbb{N}, x \in B(0,i) \\ a_i \underset{déf}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} W_i(x) = \sup_{x\in B(0,i)} W(x) \\ b_i \underset{déf}{=} \inf_{x\in\mathbb{R}^d} W_i(x) = \inf_{x\in B(0,i)} W(x) \end{cases}$$

Notons $p_i(t,x,y)$ la densité du processus associée à W_i et $p^i(t,x,y)$ la densité du processus associé à W_i tué au temps de sortie de $B(0,i)$, soit :

$$p^i(t,x,y) = p_i(t,x,y) - \mathbb{E}_x^i[p_i(t-\xi_i, x(\xi_i), y), \xi_i < t]\,, \quad (t,x,y) \in (0,\infty)\times B(0,i)\times B(0,i)$$

(où ξ_i est le temps de sortie de $B(0,i)$.) Nous cherchons une condition sur W pour que les densités $p^i(t,x,y)$ convergent uniformément sur tout compact.D'après le corollaire 44, on a pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$p^i(t,x,y) = p_{i+1}(t,x,y) - \mathbb{E}_x^{i+1}[p_{i+1}(t-\xi_i, x(\xi_i), y), \xi_i < t]\,, \quad (t,x,y) \in (0,\infty)\times B(0,i)\times B(0,i)$$

et donc :

$$\begin{aligned} p^{i+1}(t,x,y) - p^i(t,x,y) \quad &= \quad \mathbb{E}_x^{i+1}[p_{i+1}(t-\xi_i, x(\xi_i), y), \xi_i < t] \\ &\quad -\mathbb{E}_x^{i+1}[p_{i+1}(t-\xi_{i+1}, x(\xi_{i+1}), y), \xi_{i+1} < t] \end{aligned}$$

pour tous $(t,x,y) \in (0,\infty)\times B(0,i)\times B(0,i)$.
Il est clair d'autre part que pour $t > 0$ fixé, $p^{i+1}(t,x,y) - p^i(t,x,y) > 0$ presque partout sur $B(0,i)\times B(0,i)$, et donc partout d'après le lemme 43. On a ainsi pour tous $(t,x,y) \in (0,\infty)\times B(0,i)\times B(0,i)$:

$$|\,p^{i+1}(t,x,y) - p^i(t,x,y)\,| \le \mathbb{E}_x^{i+1}[p_{i+1}(t-\xi_i, x(\xi_i), y), \xi_i < t] \tag{38}$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $T > 0$, il existe $l > 0$ et $I \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|x-y| \ge i - l\,, \quad i \ge I, y \in K, x \in \partial B(0,i)$$

Notons $\theta_i = a_i - b_i$, on sait d'après l'estimée (25) que :

$$p_i(t,x,y) \le Ct^{-d/2}\exp\left(\left(1+\frac{d}{2}\right)\theta_i - \frac{|y-x|^2}{4t}\right)\,, \quad (t,x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$$

Pour x et y fixés, le maximum en t de l'expression de droite est obtenu pour :

$$t_0 = \frac{2|y-x|^2}{4d}$$

et la fonction est croissante jusqu'en t_0, décroissante ensuite.
On en déduit que pour i assez grand, on a :

$$p^{i+1}(t,x,y) \le CT^{-d/2}\exp\left(\left(1+\frac{d}{2}\right)\theta_{i+1} - \frac{(i-l)^2}{4T}\right)\,, \quad t \le T, y \in K, x \in B(0,i)$$

Supposons maintenant (et c'est la condition que nous cherchions sur W) que :

$$\frac{\theta_i}{i^2} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$$

on peut alors trouver $j \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq j$:

$$\left(1+\frac{d}{2}\right)\theta_{i+1} - \frac{(i-l)^2}{4t} \leq -\frac{i^2}{8t}$$

et l'on en déduit grâce à (38) que la série de terme $p^{i+1}(t,x,y) - p^i(t,x,y)$ est uniformément convergente sur $(0,T) \times K \times K$. Soit $p(t,x,y)$ la fonction limite, et soient $\varphi, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)^+$, on a pour tout $t \geq 0$ (et en notant $\{X_t^i, t \geq 0\}$ le processus associé à W tué au temps de sortie de $B(0,i)$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varphi[\phi(X_t)] &= \lim_{i\to\infty} \mathbb{E}_\varphi[\phi(X_t^i)] \\
&= \lim_{i\to\infty} \int_{B(0,i)} \varphi(x) \int_{B(0,i)} \phi(y) p^i(t,x,y) m(dy) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) p(t,x,y) m(dy) dx
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $p(t,x,y)$ est bien une densité correspondant au processus associé à W. D'autre part, $p(t,x,y)$ est bien continue par convergence uniforme et on a le :

Théorème 45 *soit $W \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ notons pour tout $i \in \mathbb{N}$:*

$$\theta_i = \sup_{x\in B(0,i)} W(x) - \inf_{x\in B(0,i)} W(x)$$

Si $\theta_i = o(i^2)$ lorsque $i \to \infty$, alors il existe une densité continue $p(t,x,y)$ qui correspond au processus associé à W.

Bibliographie

[1] E. Olivieri F. Martinelli and E. Scoppola. Small random perturbations of finite and infinite dimensionnal dynamical systems : unpredictability of exit times. *J. Statist. Phys.*, 55n :477–504, 1989.

[2] Masatoshi Fukushima. *Dirichlet Forms and Markov Processes.* North-Holland/Kodansha, 1980.

[3] Y. Hu and Z. Shi. The limits of sinai's simple random walk in random environment. Université Paris VI, 1991.

[4] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag, 1966.

[5] K. Kuwae and T. Uemura. Weak convergence of symmetric diffusion processes. *Probab. Theory and Related Fields*, 109 :159–182, 1997.

[6] T.J. Lyons and Z. Weian. A crossing estimate for the canonical process on a dirichlet space and a tightness result. *Société Mathématique de France*, 157-158 :249–271, 1988.

[7] T.J. Lyons and T.S. Zhang. Note on convergence of dirichlet processes. *Bull. London Math. Soc.*, 25 :353–356, 1993.

[8] T.J. LYONS and W.A. ZHENG. On conditionnal diffusion processes. *Proceedings of the Royal Society of Edinburg*, 115 A :243–255, 1990.

[9] Pierre MATHIEU. Zero white noise limit through dirichlet forms, with applications to diffusions in a random medium. *Probab. Theory and Related Fields*, 99 :549–580, 1994.

[10] Pierre MATHIEU. Limit theorem for diffusions with a random potential. *Stochastic Processes and their Applications*, 60 :105–111, 1995.

[11] Pierre MATHIEU. Spectra, exit times and long times asymptotics in the zero-white-noise limit. *Stochastics and stochastic reports*, 55 :1–20, 1995.

[12] Pierre MATHIEU. Hitting times and spectral gap inequalities. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 33 :437–465, 1997.

[13] Stephan MUCK. Large deviation w.r.t. quasi-every starting point for symmetric right processes on general state space. *Probab. Theory and Related Fields*, 99 :527–548, 1994.

[14] Daniel STROOCK. Diffusion processes corresponding to uniformly elliptic divergence form operators. In Springer-Verlag, editor, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1321, pages 316–347, 1980.

[15] Karl-Theodor STURM. Analysis on local dirichlet space 1. *J.reine angew Math.*, 456 :173–196, 1994.

[16] Karl-Theodor STURM. Analysis on local dirichlet space 2. *Osaka J.Math.*, 32 :275–312, 1995.

[17] Karl-Theodor STURM. Analysis on local dirichlet space 3. *J.Math. Pures Appl.*, 75 :273–297, 1996.

[18] Masayoshi TAKEDA. On a martingale method for symmetric diffusion processes and its applications. *Osaka J. Math.*, 26 :605–623, 1989.

[19] ZAWASU and TANAKA. A diffusion process in a brownian environment with drift. à paraître dans J.Math.Soc. Japan.

[20] Weian ZHENG. A large deviation result for a class of dirichlet processes. *Probab. Theory and Related Fields*, 101 :237–249, 1995.