ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Corrigé de l'examen écrit du 29 Mars 2006 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 8 points

1. On introduit un espace de Hilbert adéquat $V = \{\phi \in H^1(\Omega)$ tel que $\phi = 0$ sur $\Gamma_D\}$. La formulation variationnelle du problème s'obtient en multipliant l'équation par une fonction test $\phi \in V$, en intégrant par parties, et en utilisant les conditions aux limites. La formulation variationnelle est donc : trouver $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega h\nabla u \cdot \nabla\phi \, dx = \int_\Omega f\phi \, dx \quad \forall\, \phi \in V.$$

Par définition le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état considérée comme une contrainte. Donc, pour tout $(h, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times V \times V$, on a

$$\mathcal{L}(h, v, q) = \frac{1}{2}\int_\Omega |h\nabla v - \sigma_0|^2 dx + \int_\Omega h\nabla v \cdot \nabla q \, dx - \int_\Omega f q \, dx.$$

La formulation variationnelle de l'équation adjointe est par définition donnée par

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(h, u, p), \phi\rangle = 0 \quad \forall\, \phi \in V,$$

ce qui est équivalent à

$$\int_\Omega (\sigma - \sigma_0) \cdot h\nabla\phi dx + \int_\Omega h\nabla p \cdot \nabla\phi \, dx = 0 \quad \forall\, \phi \in V.$$

Par conséquent l'état adjoint $p \in V$ est solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(h\nabla p) = \mathrm{div}\,(h(\sigma - \sigma_0)) & \text{dans } \Omega, \\ h\frac{\partial p}{\partial n} = -h(\sigma - \sigma_0) \cdot n & \text{sur } \Gamma_N \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases}$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ_N on peut simplifier la condition aux limites sur Γ_N qui devient

$$h\frac{\partial p}{\partial n} = h\sigma_0 \cdot n \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

2. La dérivée de la fonction objectif $J(h)$ est donnée, pour tout $k \in L^\infty(\Omega)$, par
$$\langle J'(h), k\rangle = \int_\Omega J'(h)k\,dx = \langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h,u,p), k\rangle.$$
Comme $\sigma = h\nabla u$ la dérivée partielle par rapport à h est
$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h,u,p), k\rangle = \int_\Omega (\sigma - \sigma_0)\cdot k\nabla u\,dx \int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla p\,dx.$$
Par conséquent, on a $J'(h) = (\sigma - \sigma_0)\cdot \nabla u + \nabla u \cdot \nabla p$.

2 Optimisation géométrique : 12 points

1. En injectant $p(x) \equiv p(x_3)$ et $\vec{u}(x) \equiv u_3(x_1,x_2)\vec{e}_3$ dans l'équation de Navier-Stokes on obtient
$$p'(x_3) = \Delta u_3(x_1,x_2),$$
ce qui implique que ces deux expressions sont constantes. Autrement dit, la pression p est affine en x_3 et, quitte à normaliser sa dérivée, la vitesse axiale vérifie
$$\begin{cases} -\Delta u_3 = 1 & \text{dans } \Omega, \\ u_3 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2. Le problème d'optimisation devient donc
$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u_3|^2 dx \right\}.$$
La formulation variationnelle pour la vitesse axiale est : trouver $u_3 \in H^1_0(\Omega)$ tel que
$$\int_\Omega \nabla u_3 \cdot \nabla \phi\,dx = \int_\Omega \phi\,dx \quad \forall\, \phi \in H^1_0(\Omega).$$
En particulier, pour $\phi = u_3$ on trouve que la fonction objectif est à nouveau la compliance
$$\int_\Omega |\nabla u_3|^2\,dx = \int_\Omega u_3\,dx.$$

3. A cause de la condition aux limites de Dirichlet il faut introduire un multiplicateur de Lagrange supplémentaire (voir le cours). Le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et des deux contraintes (équation d'état et condition aux limites)

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q, \lambda) = \int_\Omega v\,dx + \int_\Omega (\Delta v + 1) q\,dx + \int_{\partial\Omega} v\lambda\,dx,$$

où v, q, λ sont des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^2)$ (ces variables sont donc bien indépendantes de Ω).
La formulation variationnelle de l'équation adjointe est

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u, p, \mu), \phi\rangle = 0 \quad \forall\, \phi \in H^1(\mathbb{R}^2),$$

ce qui est équivalent à

$$\int_\Omega \phi\,dx + \int_\Omega \Delta\phi p\,dx + \int_{\partial\Omega} \phi\mu\,dx = 0 \quad \forall\, \phi.$$

Par intégration par parties il vient

$$\int_\Omega \phi(1 + \Delta p)\,dx + \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial \phi}{\partial n} p + \phi(\mu - \frac{\partial p}{\partial n})\Big)\,ds = 0 \quad \forall\, \phi.$$

Par conséquent l'état adjoint $p \in H^1(\mathbb{R}^2)$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta p = 1 & \text{dans } \Omega, \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

ce qui implique que $p = u$ (le problème est auto-adjoint). Par ailleurs le multiplicateur de Lagrange optimal pour la condition aux limites vaut

$$\mu = \frac{\partial p}{\partial n}.$$

4. La dérivée de forme est

$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, p, \mu)(\theta).$$

On obtient donc

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \left(u + (\Delta u + 1) p + H u\mu + \frac{\partial u\mu}{\partial n} \right) \theta \cdot n\,ds.$$

A cause des conditions aux limites de Dirichlet pour u et p et de la valeur de μ on en déduit

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\mu\right) \theta \cdot n \, ds = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \theta \cdot n \, ds.$$

En notant $\ell \in \mathbb{R}$ le multiplicateur de Lagrange pour la contrainte d'aire pour Ω, la condition d'optimalité est donc

$$\int_{\partial\Omega} \left(\ell + \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\right) \theta \cdot n \, ds = 0 \quad \forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2).$$

Par conséquent, la condition d'optimalité implique que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 = -\ell \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

5. Si Ω est un disque de rayon R on peut calculer explicitement la solution de l'équation d'état en coordonnées radiales

$$u(r) = \frac{1}{4}(R^2 - r^2).$$

On vérifie que $\frac{\partial u}{\partial n}(R) = -\frac{R}{2}$ qui est bien constant sur $\partial\Omega$, donc la condition d'optimalité est v'erifiée pour la valeur du multiplicateur de Lagrange $\ell = -\frac{R^2}{4}$.

6. Au contraire, pour une section rectangulaire Ω la condition d'optimalité ne peut pas être vérifiée. En effet, comme la solution u est constante (nulle) sur le bord $\partial\Omega$, sa dérivée tangentielle est aussi nulle. Si on se place dans un coin de Ω, par continuité de la dérivée de u (qu'on a suposée régulière) on en déduit que la dérivée normale aussi est nulle. Par conséquent, si la condition d'optimalité était vérifiée on aurait $\ell = 0$, et donc une condition aux limites de Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ partout sur $\partial\Omega$. Ce dernier point conduit à une contradiction car on ne peut avoir

$$\int_\Omega dx = -\int_\Omega \Delta u \, dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \; !$$