ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Corrigé de l'examen écrit du 28 Mars 2007 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 7 points

1. Lorsque l'épaisseur h est fixée, le déplacement est aussi fixé et la fonction $c \to J(h,c)$ est simplement un polynôme de degré 2 en c, strictement convexe, donc qui admet un unique minimisateur $c^* \equiv c^*(u)$ caractérisé par
$$\frac{\partial J}{\partial c}(h,c^*) = 2\int_K u(x)\,dx - 2c^*|K| = 0.$$
On en déduit que
$$c^*(u) = \frac{1}{|K|}\int_K u(x)\,dx \quad \text{ et } J(h) = \int_K |u(x) - c^*(u)|^2 dx.$$

2. La formulation variationnelle du problème s'obtient en multipliant l'équation par une fonction test $\phi \in H^1_0(\Omega)$, en intégrant par parties, et en utilisant les conditions aux limites. La formulation variationnelle est donc : trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que
$$\int_\Omega h\nabla u \cdot \nabla\phi\,dx = \int_\Omega f\phi\,dx \quad \forall\,\phi \in H^1_0(\Omega).$$
Par définition le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état considérée comme une contrainte. Donc, pour tout $(h,v,q) \in \mathcal{U}_{ad} \times H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$, on a
$$\mathcal{L}(h,v,q) = \int_K |v - c^*(v)|^2 dx + \int_\Omega h\nabla v \cdot \nabla q\,dx - \int_\Omega fq\,dx.$$
La formulation variationnelle de l'équation adjointe est par définition donnée par
$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(h,u,p), \phi\rangle = 0 \quad \forall\,\phi \in H^1_0(\Omega),$$
ce qui est équivalent à
$$\int_K 2(u - c^*(u))(\phi - c^*(\phi))dx + \int_\Omega h\nabla p \cdot \nabla\phi\,dx = 0 \quad \forall\,\phi \in H^1_0(\Omega).$$

On note $\chi_K(x)$ la fonction charactéristique de K (qui vaut 1 si $x \in K$ et 0 sinon). En vertu de la définition de $c^*(\phi)$, l'état adjoint $p \in H_0^1(\Omega)$ est solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(h\nabla p) = -2(u - c^*(u))\chi_K & \text{dans } \Omega, \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

3. La dérivée de la fonction objectif $J(h)$ est donnée, pour tout $k \in L^\infty(\Omega)$, par

$$\langle J'(h), k\rangle = \int_\Omega J'(h) k \, dx = \langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, p), k\rangle.$$

On obtient donc

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, p), k\rangle = \int_\Omega k \nabla u \cdot \nabla p \, dx,$$

c'est-à-dire que $J'(h) = \nabla u \cdot \nabla p$.

2 Optimisation géométrique robuste : 13 points

1. On sait que la résolution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases}$$

est équivalente à la minimisation de l'énergie

$$\min_{v \in V} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v \, dx \right)$$

et que le minimum est atteint pour $v = u$. Or, en multipliant l'équation par u et en intégrant par parties on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega f u \, dx \, .$$

Par conséquent, on en déduit la valeur du minimum

$$-\frac{1}{2} \int_\Omega f u \, dx = \min_{v \in V} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v \, dx \right).$$

Le résultat demandé s'obtient en multipliant cette dernière égalite par -2 ce qui change le min en max.

On peut échanger deux maximisations, donc

$$J(\Omega) = \max_{v \in V} \left(2 \sup_{\|f'\|_{L^2(\Omega)} \leq m} \int_\Omega f' v \, dx + 2 \int \overline{f} v \, dx - \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right).$$

Lorsque v est fixé, dans la maximisation en f' il est clair que la contrainte inégalité doit être saturée, c'est-à-dire qu'il s'agit en fait d'une contrainte d'égalité. La condition d'optimalité nous donne le maximisateur

$$f' = \frac{m}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} v.$$

On en déduit donc que

$$J(\Omega) = \max_{v \in V} \left(2m\|v\|_{L^2(\Omega)} + 2 \int_\Omega \overline{f} v \, dx - \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right).$$

2. Suivant l'indication donnée, la dérivée de la fonction $v \to \|v\|_{L^2(\Omega)}$ en u^* dans la direction ϕ est $\|u^*\|_{L^2(\Omega)}^{-1} \int_\Omega u^* \phi \, dx$. Par conséquent, la condition d'optimalité qui caractérise l'unique maximisateur de $J(\Omega)$ est

$$2m\|u^*\|_{L^2(\Omega)}^{-1} \int_\Omega u^* \phi \, dx + 2 \int_\Omega \overline{f} \phi \, dx - 2 \int_\Omega \nabla u^* \cdot \nabla \phi dx = 0 \quad \forall \phi \in V.$$

Par intégration par parties on en déduit

$$\begin{cases} -\Delta u^* = \overline{f} + \frac{m\, u^*}{\|u^*\|_{L^2(\Omega)}} & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^*}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u^* = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases}$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation ci-dessus par u^*, intégrant par parties, on obtient

$$m\|u^*\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \overline{f} u^* \, dx = \int_\Omega |\nabla u^*|^2 dx$$

d'où la valeur du maximum

$$J(\Omega) = \int_\Omega \overline{f} u^* \, dx + m\|u^*\|_{L^2(\Omega)}.$$

3. Lorsque $m = 0$ on retrouve, bien sûr, la minimisation de la compliance pour la force $\overline{f}$ puisque les fluctuations sont nulles.

4. Si $\overline{f}=0$, alors le problème obtenu à la deuxième question est clairement une équation aux valeurs propres pour la valeur propre $\lambda = \frac{m}{\|u^*\|_{L^2(\Omega)}}$. Dans ce cas, on a
$$J(\Omega) = \frac{m^2}{\lambda},$$
et comme $J(\Omega)$ est obtenu par maximisation en $v \in V$, donc par maximisation sur les vecteurs propres, il faut que λ soit la plus petite valeur propre. Comme on minimise l'inverse de λ par rapport au domaine Ω, le problème d'optimisation de formes correspond à maximiser la première valeur propre (ou fréquence propre de vibration).

5. On multiplie le problème obtenu à la deuxième question par une fonction test, en traitant le coefficient $m/\|u^*\|_{L^2(\Omega)}$ comme une constante indépendante de u^*. Par intégration par parties on obtient la formulation variationnelle : trouver $u^* \in V$ tel que
$$\int_\Omega \nabla u^* \cdot \nabla \phi dx = \int_\Omega \overline{f}\phi \, dx + \frac{m}{\|u^*\|_{L^2(\Omega)}} \int_\Omega u^* \phi \, dx \quad \forall \phi \in V.$$

6. Par définition le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état considérée comme une contrainte. Comme Γ_D est fixe, pour tout $(\Omega, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times V \times V$, le Lagrangien est
$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_\Omega \overline{f} v \, dx + m\|v\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla q \, dx - \int_\Omega \overline{f} q \, dx - \frac{m}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} \int_\Omega vq \, dx.$$
La formulation variationnelle de l'équation adjointe est par définition donnée par
$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u^*, p), \phi \rangle = 0 \quad \forall \, \phi \in V,$$
ce qui nous donne (en utilisant l'indication donnée)
$$\int_\Omega \overline{f}\phi \, dx + \frac{m}{\|u^*\|_{L^2(\Omega)}} \int_\Omega u^* \phi \, dx + \int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla p \, dx - \frac{m}{\|u^*\|_{L^2(\Omega)}} \int_\Omega \phi p \, dx$$
$$+ \frac{m}{\|u^*\|^3_{L^2(\Omega)}} \left(\int_\Omega u^* p \, dx \right) \int_\Omega \phi u^* \, dx = 0 \quad \forall \, \phi \in V.$$
On en déduit l'équation pour l'état adjoint p :
$$\begin{cases} -\Delta p = -\overline{f} + \frac{m(p-u^*)}{\|u^*\|_{L^2(\Omega)}} - \frac{m \int_\Omega u^* p \, dx}{\|u^*\|^3_{L^2(\Omega)}} u^* & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que $p = -u^*$ est (la) solution de l'équation adjointe.

7. La dérivée de forme est

$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, p)(\theta).$$

Comme seul Γ_N est variable, on obtient

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Gamma_N} \left(-|\nabla u^*|^2 + 2\overline{f} u^* + \frac{m}{\|u^*\|_{L^2(\Omega)}} (u^*)^2 \right) \theta \cdot n \, ds.$$

8. Si $\overline{f} = 0$, alors la dérivée de forme devient

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Gamma_N} \left(-|\nabla u^*|^2 + \lambda (u^*)^2 \right) \theta \cdot n \, ds$$

avec $\lambda = \frac{m}{\|u^*\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|\nabla u^*\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u^*\|^2_{L^2(\Omega)}}$. Par conséquent, en l'absence de contrainte sur le volume, là où la densité d'énergie élastique $|\nabla u^*|^2$ est dominante on a intèrêt à agrandir la forme, $\theta \cdot n > 0$, pour minimiser $J(\Omega)$, tandis que là où la densité d'énergie cinétique $(u^*)^2$ est dominante on a intérêt à réduire la forme, $\theta \cdot n < 0$.