

ECOLE POLYTECHNIQUE
Programme d'Approfondissement SISIM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Corrigé de l'examen écrit du 26 Mars 2008 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 10 points

1. Lorsque $\ell = 0$ la fonction objectif peut se réécrire

$$- \sup_{h \in \mathcal{U}_{ad}} \min_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} h |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}$$

en sortant le signe $-$ de l'optimisation, ce qui transforme la minimisation en maximisation. Comme $h \leq h_{max}$ on a

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} h |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx} \leq \min_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} h_{max} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}$$

pour toute épaisseur $h \in \mathcal{U}_{ad}$. Donc la fonction constante $h \equiv h_{max}$ minimise la fonction objectif. Autrement dit, en l'absence de contrainte sur le volume ou le poids, la membrane qui maximise sa première fréquence propre de vibration est la plus épaisse. Cela est conforme à l'intuition qui indique que les structures les plus solides (ou les membranes les plus tendues) ont les premières fréquences propres de vibration les plus grandes (ou les sons les plus aigus).

2. On retrouve l'équation d'état en dérivant par rapport à q le Lagrangien. Autrement dit,

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(h, \lambda, u, p), \phi \right\rangle = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$$

est la formulation variationnelle de l'équation d'état. On voit que le Lagrangien est symétrique en v et q . Donc sa dérivée par rapport à v est identique à celle par rapport à q . L'équation pour l'état adjoint est la même que pour l'état (le problème est auto-adjoint). Néanmoins, comme la fonction propre n'est définie qu'à une constante multiplicative près, on en déduit que p et u sont proportionnels. Pour connaître la constante de proportionnalité, on dérive le Lagrangien par rapport à μ et, à l'optimum, cette dérivée étant nulle, on obtient

$$-1 - \int_{\Omega} up dx = 0.$$

D'où

$$p = \frac{-u}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

3. La dérivée de la fonction objectif $J(h)$ est donnée, pour tout $k \in L^{\infty}(\Omega)$, par

$$\langle J'(h), k \rangle = \int_{\Omega} J'(h)k \, dx = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, \lambda, u, p), k \right\rangle.$$

On obtient donc

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, p), k \right\rangle = \int_{\Omega} k(\ell + \nabla u \cdot \nabla p) \, dx,$$

c'est-à-dire que

$$J'(h) = \ell - \frac{|\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

4. En maximisant, par rapport à $v \in H_0^1(\Omega)$, le Lagrangien $\mathcal{M}(h, v)$ on obtient la fonction objectif $J(h)$. On calcule facilement

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial h}(h, v), k \right\rangle = \int_{\Omega} k \left(\ell - \frac{|\nabla v|^2}{\int_{\Omega} v^2 dx} \right) dx$$

qui n'est rien d'autre que la formule précédente pour $J'(h)$. Ce calcul se justifie en remarquant que $J(h) = \mathcal{M}(h, u)$ où u est la solution de l'équation d'état. Si on dérive, on obtient

$$\langle J'(h), k \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial h}(h, u), k \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial v}(h, u), \frac{\partial u}{\partial h}(k) \right\rangle$$

où le dernier terme est nul car il s'agit de la formulation variationnelle de l'équation d'état.

5. Si la solution est radiale et régulière, alors à l'origine, $x = 0$, on a nécessairement $\nabla u(0) = 0$. Par conséquent, à l'origine on a $J'(h)(0) = \ell > 0$. La dérivée ne s'annule pas à l'origine et est positive, donc la seule possibilité pour que h soit optimale est que $h(0) = h_{min}$ d'après l'inéquation d'Euler.

2 Optimisation géométrique : 7 points

1. Par définition le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état considérée comme une contrainte. Comme Γ_D est fixe, on peut définir un espace de fonctions

$$V = \{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

Pour tout $(\Omega, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times V \times V$, le Lagrangien est

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_{\Omega} |\nabla v - \sigma_0|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla q dx - \int_{\Gamma_N} f q ds.$$

La formulation variationnelle de l'équation adjointe est par définition donnée par

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u, p), \phi \right\rangle = 0 \quad \forall \phi \in V,$$

ce qui nous donne

$$2 \int_{\Omega} (\nabla u - \sigma_0) \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla p dx = 0 \quad \forall \phi \in V.$$

On en déduit l'équation pour l'état adjoint p :

$$\begin{cases} -\Delta p = 2 \operatorname{div}(\nabla u - \sigma_0) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -2 \frac{\partial u}{\partial n} + 2 \sigma_0 \cdot n & \text{sur } \Gamma_N \cup \Gamma, \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases}$$

2. La dérivée de forme est

$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, p)(\theta).$$

Comme seul Γ est variable, on obtient

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Gamma} (|\nabla u - \sigma_0|^2 + \nabla u \cdot \nabla p) \theta \cdot n ds.$$

3. Si $\sigma_0 = 0$, alors les seconds membres de l'équation adjointe se simplifient en

$$\begin{cases} -\Delta p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -2f & \text{sur } \Gamma_N, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases}$$

On en déduit que $p = -2u$ donc le problème est autoadjoint. Une autre façon de le remarquer est de voir que, dans ce cas,

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Gamma_N} f u ds$$

qui n'est rien d'autre que la compliance.

Pour tenir compte numériquement de la contrainte, imposée dans \mathcal{U}_{ad} , que Γ_D et Γ_N sont fixes, il suffit de prendre le champ de vecteurs θ , dans la dérivée directionnelle $J'(\Omega)(\theta)$, nul sur les bords Γ_D et Γ_N .

3 Homogénéisation : 3 points

1. On écrit la formule de lamination

$$\theta (A^* - \beta \text{Id})^{-1} = (\alpha - \beta)^{-1} \text{Id} + \frac{(1 - \theta)}{\beta} \sum_{i=1}^p m_i e_i \otimes e_i \quad (1)$$

pour des directions unités $|e_i| = 1$ et des paramètres de lamination $m_i \geq 0$ avec $\sum_{i=1}^p m_i = 1$. Comme, par hypothèse, les directions e_i sont orthogonales on en déduit qu'elles sont des vecteurs propres de la matrice A^* pour des valeurs propres λ_i données par

$$\theta (\lambda_i - \beta)^{-1} = (\alpha - \beta)^{-1} + \frac{(1 - \theta)}{\beta} m_i.$$

Si on veut que A^* soit isotrope, il faut que toutes ses valeurs propres soient égales, c'est-à-dire que $p = N$ et $m_i = 1/N$. On obtient ainsi le seul matériau composite isotrope vérifiant l'égalité dans la borne inférieure de Hashin et Shtrikman, c'est-à-dire le plus mauvais conducteur.

2. Si on échange les rôles de α (l'inclusion) et β (la matrice), la formule de lamination est

$$(1 - \theta) (A^* - \alpha \text{Id})^{-1} = (\beta - \alpha)^{-1} \text{Id} + \frac{\theta}{\alpha} \sum_{i=1}^p m_i e_i \otimes e_i$$

et le même raisonnement conduit aussi à la conclusion que $p = N$ et $m_i = 1/N$. Dans ce cas A^* est le seul matériau composite isotrope vérifiant l'égalité dans la borne supérieure de Hashin et Shtrikman, c'est-à-dire le meilleur conducteur.