ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Examen écrit du 24 Mars 2004 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 6 points

On considère une membrane élastique qui au repos occupe un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Le déplacement vertical de la membrane est la solution $u \in H^1_0(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(h\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ représente les forces appliquées. La membrane est d'épaisseur $h(x)$ qui appartient à l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ h \in L^\infty(\Omega)\ , \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega \right\}.$$

Soit $u_0 \in H^1(\Omega)$ un déplacement cible. On considère la fonction objectif

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(h) = \int_\Omega |\nabla u(x) - \nabla u_0(x)|^2 dx \right\}. \tag{2}$$

1. Donner le Lagrangien du problème et en déduire l'état adjoint.
2. Calculer la dérivée par rapport à h de la fonction objectif.

2 Optimisation géométrique : 7 points

On considère l'optimisation d'un radiateur représenté par un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Le bord de Ω est divisé en deux parties non vides, $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma$. Un flux de chaleur entrant est imposé sur Γ_N tandis que la chaleur est évacuée sur Γ suivant la loi de Fourier (flux de chaleur proportionnel à la différence de températures extérieure et intérieure). Pour simplifier la conductivité thermique est prise égale à 1 et la température extérieure de référence est 0. La température est donc la solution $u(x)$ de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 1 & \text{sur } \Gamma_N, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + ku = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{3}$$

où $k > 0$ représente le coefficient d'échange.

Le bord Γ_N est fixe et seul Γ peut varier, tout en imposant un volume constant à Ω. On introduit un ensemble admissible de formes

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \Gamma_N \subset \partial\Omega, |\Omega| = V \right\}.$$

Le radiateur est efficace si le flux de chaleur qui s'échappe à travers Γ est maximal. Une autre mesure de cette efficacité est la minimisation de la température sur la surface chauffante Γ_N. On choisit donc pour optimiser le radiateur de minimiser la fonction objectif

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} u \, ds. \tag{4}$$

1. Ecrire la formulation variationnelle de (3).
2. Ecrire le Lagrangien du problème de minimisation (4) et en déduire l'état adjoint.
3. Calculer (formellement) la dérivée de forme de (4).

3 Homogénéisation : 7 points

On considère l'optimisation d'un mélange de deux matériaux conducteurs de conductivités isotropes $0 < \alpha < \beta$ dans un domaine Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$). On utilise la formulation homogénéisée du problème. On introduit l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ (\theta, A^*) \in L^\infty \left(\Omega; [0,1] \times \mathbb{R}^{N^2} \right) \text{ et } A^*(x) \in G_{\theta(x)} \forall x \in \Omega \right\},$$

où G_θ est l'ensemble des matériaux composites obtenus par homogénéisation de α et β en proportions θ et $(1-\theta)$. On minimise la fonction objectif

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\theta, A^*) = -\frac{1}{2} \int_\Omega u \, dx + \ell \int_\Omega \theta \, dx \tag{5}$$

où $\ell > 0$ est un multiplicateur de Lagrange fixé pour une contrainte de volume sur la phase α, et u est la solution de

$$\begin{cases} -\text{div} \, (A^* \nabla u) = 1 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

1. A l'aide du principe de minimisation de l'énergie et des résultats du cours, justifier que (5) est équivalent à

$$\min_{0\leq\theta(x)\leq 1} \min_{v\in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda^-(\theta)|\nabla v|^2 dx - \int_\Omega v\, dx + \ell \int_\Omega \theta\, dx \tag{7}$$

où $\lambda^-(\theta)$ est la moyenne harmonique

$$\lambda^-(\theta) = \left(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{1-\theta}{\beta}\right)^{-1}.$$

2. Pour v fixé, calculer le minimum en θ dans (7). En éliminant θ dans (7) montrer que l'on obtient un problème équivalent de minimisation pour une fonctionnelle convexe de v. En déduire une nouvelle preuve de l'existence d'une solution de (5).