

**ECOLE POLYTECHNIQUE**  
**Programme d'Approfondissement SISM**  
**Conception optimale de structures (G. Allaire)**  
**Examen écrit du 26 Mars 2008 (2 heures)**

## 1 Optimisation paramétrique : 10 points

On considère une membrane élastique d'épaisseur variable, fixée sur son bord, qui au repos occupe un domaine plan  $\Omega$  (un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^2$ ). On considère le mouvement vibratoire de cette membrane, c'est-à-dire que son déplacement vertical  $u \in H_0^1(\Omega)$  est une fonction propre (non nulle), associée à une valeur propre  $\lambda(h) \in \mathbb{R}$ , solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u) = \lambda(h)u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

On s'intéresse au mode fondamental de la membrane, c'est-à-dire que  $\lambda(h)$  est la plus petite valeur propre du problème (1) qui est aussi donnée par la formule

$$\lambda(h) = \min_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{\int_{\Omega} h |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} v^2 dx}. \quad (2)$$

On admettra que le minimum dans (2) est atteint et que (1) est l'équation d'Euler associée, qui admet une unique solution à une constante multiplicative près. La membrane est d'épaisseur  $h(x)$  qui appartient à l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^\infty(\Omega), \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

On cherche à maximiser cette première fréquence propre de vibration. On considère donc la fonction objectif

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(h) = -\lambda(h) + \ell \int_{\Omega} h(x) dx \right\},$$

où  $\ell \geq 0$  est un multiplicateur de Lagrange fixé pour une contrainte sur l'aire de la membrane.

1. Démontrer que si  $\ell = 0$  l'épaisseur optimale est une constante que l'on précisera. Quelle interprétation mécanique peut-on en donner ?
2. Soit le Lagrangien, défini pour  $(h, \mu, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ,

$$\mathcal{L}(h, \mu, v, q) = -\mu + \ell \int_{\Omega} h(x) dx + \int_{\Omega} (h\nabla v \cdot \nabla q - \mu v q) dx. \quad (3)$$

Comment retrouve-t-on l'équation (1) à partir du Lagrangien ? Dédurre aussi du Lagrangien l'équation pour l'état adjoint.

3. Calculer la dérivée par rapport à  $h$  de la fonction objectif  $J(h)$ . On se contentera d'un calcul formel en admettant que la solution de (1) est dérivable par rapport à  $h$ .
4. On définit un nouveau Lagrangien, plus simple, pour  $(h, v) \in \mathcal{U}_{ad} \times H_0^1(\Omega)$ ,

$$\mathcal{M}(h, v) = -\frac{\int_{\Omega} h |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} v^2 dx} + \ell \int_{\Omega} h(x) dx.$$

Comment retrouver  $J(h)$  à partir du Lagrangien  $\mathcal{M}(h, v)$ ? Calculer la dérivée partielle de  $\mathcal{M}(h, v)$  par rapport à  $h$ . Que retrouve-t-on? Justifier ce calcul (on admettra encore que la solution de (1) est dérivable par rapport à  $h$ ).

5. On suppose maintenant que  $\ell > 0$ , que  $\Omega$  est un disque de rayon  $R > 0$  et que l'épaisseur est une fonction radiale  $h(r)$ . On admettra que la solution de (1) est aussi radiale. Dédurre de la condition d'optimalité qu'au voisinage de l'origine l'épaisseur optimale (si elle existe) est nécessairement égale à  $h_{min}$ .

## 2 Optimisation géométrique : 7 points

On considère à nouveau l'optimisation d'une membrane, d'épaisseur constante, représentée par un domaine plan  $\Omega$  (un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^2$ ). Le bord de ce domaine est divisé en trois parties de mesures non nulles,  $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$ . Les bords  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  sont fixes et seul  $\Gamma$  peut varier. On introduit l'ensemble admissible des formes

$$\mathcal{U}_{ad} = \{ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (\Gamma_D \cup \Gamma_N) \subset \partial\Omega \}.$$

Le déplacement  $u(x)$  de la membrane est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f & \text{sur } \Gamma_N, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \quad (4)$$

où  $f \in L^2(\Gamma_N)$  est une force surfacique donnée. Soit  $\sigma_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$  un vecteur de contraintes cible. On considère la fonction objectif

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u - \sigma_0|^2 dx \right\},$$

où  $u$  est la solution de (4) et  $|z|$  la norme euclidienne du vecteur  $z \in \mathbb{R}^2$ .

1. Donner le Lagrangien du problème et en déduire l'état adjoint.
2. Calculer(formellement) la dérivée de forme de la fonction objectif.
3. Quel résultat retrouve-t-on si  $\sigma_0 \equiv 0$  dans  $\mathbb{R}^2$ ? Préciser comment on peut tenir compte, numériquement, des contraintes imposées par  $\mathcal{U}_{ad}$ .

### 3 Homogénéisation : 3 points

On utilise les notations du chapitre 7 du cours. Soit deux matériaux conducteurs de conductivités isotropes  $0 < \alpha < \beta$  que l'on mélange en proportions respectives  $\theta > 0$  et  $(1 - \theta) > 0$ . On considère un laminé séquentiel de rang  $1 \leq p \leq N$  dans des directions unités  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  orthogonales, de matrice  $\alpha$  et d'inclusion  $\beta$ . On note  $A^*$  le tenseur de conductivité du matériau composite correspondant.

1. Montrer qu'il n'y a qu'un seul choix possible de  $p$  et des proportions de lamination  $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$  qui conduit à un tenseur  $A^*$  isotrope. Quelle conductivité homogénéisée extrême trouve-t-on ainsi ?
2. Même question en échangeant les rôles de  $\alpha$  (l'inclusion) et  $\beta$  (la matrice).