MAP562 Optimal design of structures

by Grégoire Allaire, Thomas Wick

Ecole Polytechnique

Academic year 2016-2017

Exercise 4, Jan 25, 2017

in amphi Grégory

Exercise 1

Let Ω be an open, bounded and regular domain in $\mathbb{R}^2$. We consider an elastic membrane in Ω with variable thickness The boundary is split into two parts $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$. The vertical displacement of the membrane is the solution $u \in H^1(\Omega)$ by solving the problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ h\frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_N \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \tag{1}$$

where $f \in L^2(\Omega)$ are the applied forces. The thickness $h(x)$ belongs to the admissible set

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^\infty(\Omega)\,, \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ in } \Omega\}\,.$$

Let $u_0 \in L^2(\Gamma_N)$ be the target displacement that we want to match. The objective functional is given by

$$\inf_{h\in\mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(h) = \int_{\Gamma_N} |u - u_0|^2 ds \right\}. \tag{2}$$

1. Formulate the Lagrangian and derive the adjoint state.
2. Calculate the derivative of $J(h)$ with respect to h.

We now change the goal and consider to match $\sigma_0 \in L^2(\Omega)^2$ as goal. The corresponding objectif functional reads:

$$\inf_{h\in\mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(h) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\sigma - \sigma_0|^2 dx \right\}, \tag{3}$$

where $\sigma = h\nabla u$ is the stress vector.

1. Formulate the Lagrangian and derive the adjoint state.
2. Calculate the derivative of $J(h)$ with respect to h.

Exercise 2

On considère une membrane élastique d'épaisseur variable, fixée sur son bord, qui au repos occupe un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). On considère le mouvement vibratoire de cette membrane, c'est-à-dire que son déplacement vertical $u \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction propre (non nulle), associée à une valeur propre $\lambda(h) \in \mathbb{R}$, solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u) = \lambda(h)u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

On s'intéresse au mode fondamental de la membrane, c'est-à-dire que $\lambda(h)$ est la plus petite valeur propre du problème (4) qui est aussi donnée par la formule

$$\lambda(h) = \min_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{\int_\Omega h\,|\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx}. \tag{5}$$

On admettra que le minimum dans (5) est atteint et que (4) est l'équation d'Euler associée, qui admet une unique solution à une constante multiplicative près. La membrane est d'épaisseur $h(x)$ qui appartient à l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^\infty(\Omega)\,, \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega\}\,.$$

On cherche à maximiser cette première fréquence propre de vibration. On considère donc la fonction objectif

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(h) = -\lambda(h) + \ell \int_\Omega h(x)\,dx \right\},$$

où $\ell \geq 0$ est un multiplicateur de Lagrange fixé pour une contrainte sur l'aire de la membrane.

1. Démontrer que si $\ell = 0$ l'épaisseur optimale est une constante que l'on précisera. Quelle interprétation mécanique peut-on en donner ?

2. Soit le Lagrangien, défini pour $(h, \mu, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

$$\mathcal{L}(h, \mu, v, q) = -\mu + \ell \int_\Omega h(x)\,dx + \int_\Omega (h\nabla v \cdot \nabla q - \mu v q)\,dx. \tag{6}$$

   Comment retrouve-t-on l'équation (4) à partir du Lagrangien ? Déduire aussi du Lagrangien l'équation pour l'état adjoint.

3. Calculer la dérivée par rapport à h de la fonction objectif $J(h)$. On se contentera d'un calcul formel en admettant que la solution de (4) est dérivable par rapport à h.

4. On définit un nouveau Lagrangien, plus simple, pour $(h, v) \in \mathcal{U}_{ad} \times H_0^1(\Omega)$,

$$\mathcal{M}(h, v) = -\frac{\int_\Omega h\,|\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx} + \ell \int_\Omega h(x)\,dx.$$

Comment retrouver $J(h)$ à partir du Lagrangien $\mathcal{M}(h, v)$? Calculer la dérivée partielle de $\mathcal{M}(h, v)$ par rapport à h. Que retrouve-t-on ? Justifier ce calcul (on admettra encore que la solution de (4) est dérivable par rapport à h).

5. On suppose maintenant que $\ell > 0$, que Ω est un disque de rayon $R > 0$ et que l'épaisseur est une fonction radiale $h(r)$. On admettra que la solution de (4) est aussi radiale. Déduire de la condition d'optimalité qu'au voisinage de l'origine l'épaisseur optimale (si elle existe) est nécessairement égale à h_{min}.