

# Analyse de l'algorithme multigrille FMGH de résolution d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Marianne AKIAN

INRIA Domaine de Valuceau-Rocquencourt B.P.105. 78153 LE CHESNAY CEDEX.

## Abstract

In this paper, the resolution of Hamilton-Jacobi-Bellman equations by multigrid methods is studied. The Howard-multigrid algorithm FMGH is presented and, under some regularity assumptions, a convergence result is established. In addition, it is shown that the complexity of this algorithm is in the order of the number of discretisation points. Some numerical examples are reported.

## Introduction

L'algorithme FMGH (introduit dans [1]) est un algorithme de résolution numérique d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman stationnaires utilisant les méthodes multigrilles. Nous en présentons une nouvelle version, pour laquelle nous pouvons prouver un résultat de convergence; on peut, à partir d'un nombre fixe d'itérations de l'algorithme de Howard approché à chaque niveau de grille, obtenir une fonction valeur dont l'erreur est de l'ordre de l'erreur de discrétisation. On en déduit que la complexité de résolution est dans la plupart des cas de l'ordre du nombre de points de discrétisation.

L'algorithme a été implémenté sous forme de générateur de programmes [1,2], ce qui nous permet de résoudre un large éventail d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman stationnaires. Nous avons donc testé l'algorithme sur de nombreux problèmes en dimension 1, 2 et 3. Les résultats numériques obtenus confirment les résultats du théorème. De plus on peut constater que le nombre d'itérations nécessaires à chaque niveau de grille est petit; la complexité de résolution des problèmes testés est donc environ égale à  $CN$  avec  $C$  petit ( $N$  étant le nombre de points de discrétisation).

## 1 Problèmes résolus

On s'intéresse à la résolution de problèmes de contrôle stochastique; soit minimiser une fonction coût  $J$  sur l'ensemble des contrôles admissibles  $U_{ad} \subset \mathbb{R}^k$ , l'état étant un processus stochastique  $X_t$  régi par une équation différentielle stochastique dans  $\mathbb{R}^d$ . Donnons l'exemple d'un problème à horizon infini dont l'état est arrêté sur la frontière de l'ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , il s'écrit

$$\begin{cases} dX_t = g(U_t, X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t & W_t \text{ processus de Wiener} \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

$$J(U(\cdot), x_0) = E \left( \int_0^\tau e^{-\lambda t} c(U_t, X_t) dt + e^{-\lambda \tau} f(X_\tau) \right)$$

$\tau$  étant le premier temps de sortie de  $X_t$  de l'ouvert  $\Omega$ .

La fonction coût optimal

$$v(x) = \min_{u(\cdot)} J(u(\cdot), x)$$

est alors solution (sous certaines conditions de régularité) de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman[9]

$$\begin{cases} \min_{u \in U_{ad}} \{A(u)v + c(u)\} = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = f & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

$A(u)$  étant l'opérateur aux dérivées partielles

$$A(u)v = -\lambda v + \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_j g_j(u, x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \quad a = \frac{1}{2} \sigma \sigma^t \quad (2)$$

On obtient des conditions aux limites différentes en modifiant un peu le problème (processus réfléchis par exemple). Par la suite on s'intéressera à la résolution numériques d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman stationnaires avec des conditions aux limites quelconques.

## 2 Algorithmes numériques

### 2.1 Méthodes envisagées

On a d'abord choisi pour des raisons de simplicité de discrétiser les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman par des différences finies et on se bornera au cas où le domaine  $\Omega$  est le cube unité de  $\mathbb{R}^d$ . On obtient alors pour tout pas de discrétisation  $h = 1/(n+1)$  une équation de la forme

$$\min_{u \in U_{ad}} \{A_h(u)v_h + c_h(u)\} = 0 \quad v_h \in \mathcal{V}_h = \mathcal{F}(\Omega_h, \mathbb{R}) \quad (3)$$

où  $\Omega_h$  est la grille de points (ou nœuds) de  $\bar{\Omega}$ , de pas  $h$ . Il existe des discrétisations différences finies [14] et éléments finis [17] telles que le problème discret s'interprète en termes de problème de contrôle de chaînes de Markov. Il vérifie alors le principe du maximum discret (PMD) i.e  $A_h(u)v_h \leq 0 \Rightarrow v_h \geq 0$ . C'est le cas par exemple de la discrétisation différences finies d'un problème de Dirichlet sur l'intervalle ]0, 1[ définie par

$$A_h(u)v_h + c_h(u) = a_{11}(x)\partial_2^h v + g_1(x, u)\partial^h v + c(u, x)$$

$\partial^h v$  étant la discrétisation de la dérivée de  $v$  ( $\partial^h v = \partial_+^h v = (v(x+h) - v(x))/h$  ou  $\partial_-^h v = (v(x) - v(x-h))/h$ ) selon le signe de  $g_1$  dans le cas dégénéré ( $g_1 h > 2a_{11}$ ) ou  $\partial^h = (\partial_-^h + \partial_+^h)/2$  dérivée symétrique dans le cas non dégénéré) et  $\partial_2^h = (\partial_+^h - \partial_-^h)/h$  étant la discrétisation de la dérivée seconde de  $v$ .

Les méthodes habituelles de résolution du problème discret sont alors la méthode d'itérations sur les valeurs qui converge avec la vitesse d'une itération de Jacobi (facteur en  $1 - \mathcal{O}(h^2)$ ), et l'algorithme de Howard (itérations sur les politiques) :

- $u_h^{n+1} \in \text{Argmin}(A_h(u)v_h^n + c_h(u))$
- $v_h^{n+1}$  est solution de :  $A_h(u_h^{n+1})v_h^{n+1} + c_h(u_h^{n+1}) = 0$

qui nécessite une inversion de matrice à chaque itération mais converge en général avec la vitesse de la méthode de Newton [13,5]. Les méthodes multigrilles par contre allient un taux de convergence indépendant du pas de discrétisation et une complexité de  $\mathcal{O}(N)$ .

Pour la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires il existe deux méthodes multigrilles; la première est la méthode FAS [11,10], qui a été étudiée dans le cas d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman par R. Hoppe [12]. La deuxième est la méthode Newton-multigrille [4]. Le taux de convergence par cycle multigrille est en général semblable pour les deux méthodes (cf. K.Stüben et U.Trottenberg dans [11]). Pour une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, l'itération sur les politiques est identique à l'itération de Newton si les contrôles optimaux sont réguliers par rapport à la fonction valeur  $v$  [5]. Dans ce cas la méthode Newton-multigrille nécessite un nombre de calculs de contrôles optimaux moindre que la méthode FAS. Nous avons donc développé un algorithme de type Howard-multigrille pour les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman générales. De plus les propriétés particulières de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman nous ont permis de montrer un résultat de convergence de l'algorithme plus fort que dans le cas d'équations non linéaires quelconques.

## 2.2 Méthodes multigrilles linéaires

Avant d'aborder la description de l'algorithme nous allons rappeler la structure des méthodes multigrilles pour une équation linéaire. Soit donc une équation aux dérivées partielles elliptique linéaire dans l'ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  que l'on écrira sous forme variationnelle

$$A v + c = 0 \quad v \in \mathcal{V} \quad (4)$$

où  $\mathcal{V}$  désigne un espace de Hilbert du type  $H^1(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$  et  $c$  désigne une fonction régulière de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  (dans  $L^2(\Omega)$  par exemple). On considère alors, comme dans le paragraphe précédent, les grilles de points  $\Omega_h \subset \bar{\Omega}$  et les discrétisations consistantes et stables de l'équation (4)

$$A_h v_h + c_h = 0 \quad v_h \in \mathcal{V}_h \quad (5)$$

On suppose que la discrétisation est d'ordre  $\theta$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ , c'est à dire qu'il existe un opérateur d'interpolation  $p_h : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathcal{V}$  vérifiant

$$\|p_h v_h - v\|_{\mathcal{V}} \leq C_{\theta} h^{\theta} \quad \text{si } v \text{ est solution de (4) et } v_h \text{ est solution de (5)}$$

Dans ces conditions on cherche à résoudre l'équation (5) pour un pas  $h$  assez petit.

### 2.2.1 Cycles multigrilles

Les méthodes itératives classiques telles que les méthodes de Jacobi ou Gauss-Seidel convergent avec un taux dépendant du pas de discrétisation  $h$ , mais elles fournissent en général un bon opérateur de lissage (contraction des "hautes fréquences" avec un taux indépendant de  $h$ ). En revanche si l'erreur initiale est lisse, une bonne approximation de cette erreur est fournie par la résolution d'une équation dans une grille plus grossière. La méthode multigrille consiste à combiner ces deux opérations afin d'obtenir une contraction globale de l'erreur indépendante de  $h$ .

Pour construire un cycle multigrille on considère la suite de pas de discrétisation  $h_0 > \dots > h_l > \dots$  tels que les grilles soient imbriquées (ex :  $h_{k+1} = h_k/2$  si  $\Omega$  est le cube unité). On notera

par la suite  $\Omega_k = \Omega_{h_k}$ ,  $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_{h_k}$ ,  $A_k = A_{h_k}$  et plus généralement on remplacera  $h_k$  par  $k$  lorsqu'il sera en indice. On introduit alors les opérateurs d'interpolation  $I_k^{k+1} : \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{V}_{k+1}$  et de restriction  $I_{k+1}^k : \mathcal{V}_{k+1} \rightarrow \mathcal{V}_k$ . On se donne de plus sur chaque grille, un opérateur de relaxation (lissage) associé à l'équation  $A_k v + c = 0$  :  $\mathcal{R}_k(c) : \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{V}_k$ ,  $\mathcal{R}_k(c)v = R_k v + S_k c$ . On peut alors définir récursivement le cycle multigrille associé à la résolution de l'équation  $A_k v + c = 0$  d'opérateur  $\mathcal{M}_k(c)$  par [11] (cf. figure 1)

$$\mathcal{M}_0(c)v = -A_0^{-1}c \text{ (résolution exacte) si } k = 0$$

$$v^1 = \mathcal{R}_k^{\nu_1}(c)v \text{ (lissage avant correction)}$$

$$r_k = A_k v^1 + c, \quad e_{k-1}^0 = 0, \quad e_{k-1} = \mathcal{M}_{k-1}^\gamma(I_k^{k-1} r_k) e_{k-1}^0$$

$$v_2 = v_1 + I_{k-1}^k e_{k-1} \text{ (correction dans la grille grossière)}$$

$$\mathcal{M}_k(c)v = v_3 = \mathcal{R}_k^{\nu_2}(c)v_2 \text{ (lissage après correction)}$$

A ce niveau on peut introduire la méthode multigrille complète (FMG), dont l'algorithme FMGH est l'une des généralisations possibles.

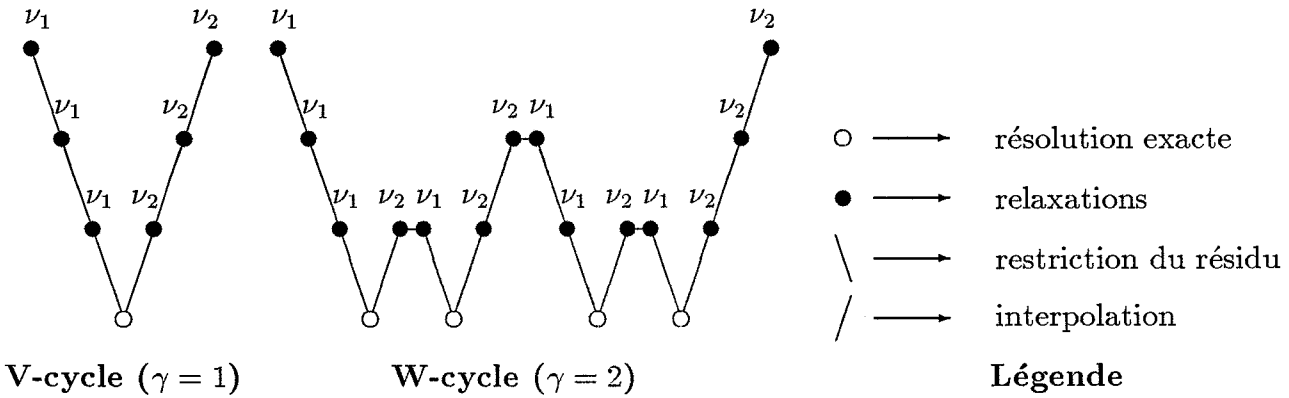


Figure 1: Exemples de cycles multigrilles

### 2.2.2 Convergence de la méthode multigrille

Nous rappelons maintenant les résultats classiques. On supposera par la suite que les pas de discrétisation vérifient  $h_{k+1} = \delta h_k$ . On note  $M_k$  l'opérateur linéaire de contraction associé à  $\mathcal{M}_k(c)$ , i.e. tel que  $\mathcal{M}_k(c)v = M_k v + N_k c$ . Et on muni  $\mathcal{V}_k$  d'une norme hermitienne  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_k}$  telle que  $\frac{1}{C}\|v_k\|_{\mathcal{V}_k} \leq \|p_k v_k\|_{\mathcal{V}} \leq C\|v_k\|_{\mathcal{V}_k} \quad \forall v_k \in \mathcal{V}_k$ .

**Théorème 1 : Convergence des cycles multigrilles** *On suppose  $A$  fortement elliptique alors*

$$\|M_k\|_{\mathcal{V}_k} \leq \rho < 1, \quad \forall k \geq 0$$

*sous l'une des hypothèses supplémentaires suivantes*

1.  $A$  est symétrique [6,7,10,16]
2.  $A$  quelconque,  $g$  assez régulière ( $C^1$ ), et  $h_0$  assez petit [10,15,8]

**Proposition 1 : Complexité des méthodes multigrilles** (cf. K.Stüben et U.Trottenberg [11])

Si  $\gamma\delta^d < 1$  le coût d'un cycle multigrille est égal à

$$C_{MG}(h) \simeq \frac{C(\nu_1 + \nu_2) + C'}{1 - \gamma\delta^d} N_h$$

### 2.3 Algorithme FMGH

On cherche maintenant à résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman discrétisée 3 pour un pas  $h$  assez petit. Pour cela on se donne comme dans le paragraphe précédent les grilles imbriquées  $\Omega_k$ .

**Méthode multigrille :** Pour chaque équation linéaire de la forme  $A_k(u_k)v + c_k(u_k) = 0$  où  $u_k \in \mathcal{U}_k = \mathcal{F}(\Omega_k, U_{ad})$ , on peut construire un cycle multigrille associé. On notera  $\mathcal{M}_k(u_k)$  et  $\mathcal{M}_k(u_k)$  les opérateurs affines et linéaires du cycle multigrille associé à cette équation. On introduit de plus les opérateurs d'interpolation (des fonctions et des contrôles)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k^{k+1} : \mathcal{V}_k &\longrightarrow \mathcal{V}_{k+1} \\ \mathcal{IU}_k^{k+1} : \mathcal{U}_k &\longrightarrow \mathcal{U}_{k+1} \end{aligned}$$

**Méthode de minimisation :** Si l'opérateur  $A(u)$  est donné par la formule 2, minimiser  $A_h(u)v + c_h(u)$  revient à minimiser l'hamiltonien  $H(x, u, \partial^h v)$  où  $\partial^h v$  est la discrétisation du gradient de  $v$  et  $H$  est défini par  $H(x, u, p) = \sum_i g_i(x, u)p_i + c(x, u)$ . On considère alors une méthode itérative de minimisation de l'hamiltonien convergent vers le contrôle optimal  $u_h(v)$ , pour tout  $x \in \Omega_h$  et  $v \in \mathcal{V}_h$ , dont l'opérateur sera noté  $\mathcal{N}_h(v)$ . On utilisera par exemple la méthode du gradient à pas constant ( $\mathcal{N}_h(v)u = u - \rho_0(\partial_u H(u, \partial^h v))$ ) ou de Newton ( $\mathcal{N}_h(v)u = u - (\partial_{u^2}^2 H(u, \partial^h v))^{-1}(\partial_u H(u, \partial^h v))$ ).

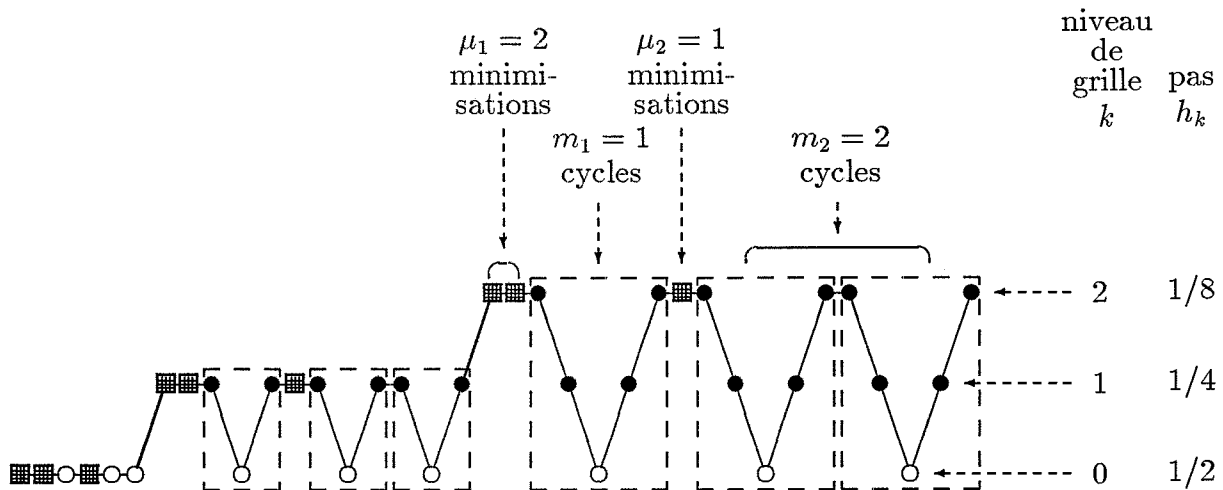


Figure 2: Exemple d'algorithme FMGH avec  $\bar{n} = 2$







-   $\longrightarrow$  minimisation
-   $\longrightarrow$  résolution exacte de l'équation linéaire
-   $\longrightarrow$  relaxations
-   $\longrightarrow$  restriction du résidu
-   $\longrightarrow$  interpolation  $I$
-   $\longrightarrow$  interpolations de la fonction  $\mathcal{I}$  et des contrôles  $\mathcal{IU}$

Figure 3: Légende

**Algorithme FMGH :** On se donne  $v_0^0 \in \mathcal{V}_0$  et  $u_0^0 \in \mathcal{U}_0$  et on définit les suites  $v_k^n \in \mathcal{V}_k$  et  $u_k^n \in \mathcal{U}_k$  pour  $0 \leq n \leq \bar{n}$  et  $k \in \mathbb{N}$  (cf. figure 2) par

Pour  $0 \leq n < \bar{n}$ ,

- $u_k^{n+1} = \mathcal{N}_k^{\mu_{n+1}}(v_k^n)u_k^n$ , approximation de l'élément  $u_k(v_k^n)$  de  $\text{Argmin}(A_k(u)v_k^n + c_k(u))$ .
- $v_k^{n+1} = \mathcal{M}_k^{m_{n+1}}(u_k^{n+1})v_k^n$ , solution approchée de l'équation  $A_k(u_k^{n+1})v + c_k(u_k^{n+1}) = 0$ .

On obtient donc  $v_k^{\bar{n}}$  valeur approchée de  $v_k$  et  $u_k^{\bar{n}}$  valeur approchée de  $u_k(v_k)$ , alors

- $u_{k+1}^0 = \mathcal{I}U_k^{k+1} u_k^{\bar{n}}$
- $v_{k+1}^0 = \mathcal{I}v_k^{k+1} v_k^{\bar{n}}$

### 3 Convergence de l'algorithme FMGH

Nous donnons maintenant le résultat de convergence de l'algorithme FMGH dans lequel les contrôles optimaux sont calculés de façon exacte. Pour cela nous faisons les hypothèses suivantes

**(H 1)**  $A_h(u)$  vérifie le PMD, pour tout  $u \in \mathcal{F}(\Omega_h, U_{ad})$  et tout  $h \leq h_0$ .

**(H 2)** Régularité du contrôle optimal :  $\bar{u}(p, x) \in \text{Argmin}_{u \in U_{ad}}(H(x, u, p))$  admet une solution unique, et  $\bar{u}(\cdot, x) \in \mathcal{C}^\beta(\mathbb{R}^d)$  pour  $0 < \beta \leq 1$ , c'est à dire

$$|\bar{u}(p', x) - \bar{u}(p, x)|_k \leq C_u |p' - p|_d^\beta \quad \forall p, p' \in \mathbb{R}^d$$

$|\cdot|_k$  et  $|\cdot|_d$  étant des normes quelconques de  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^d$ .

Cette hypothèse est vérifiée avec  $\beta = 1$  si  $g$  est affine par rapport à  $u$  et  $c$  quadratique par rapport à  $u$ , ou si  $H$  est strictement convexe en  $u$  uniformément par rapport à  $x$  et  $p$ .

**(H 3)** On suppose l'opérateur  $A_h(u)$  coercif uniformément en  $u$  et  $h \leq h_0$

$$(-A_h(u)v, v) \geq C_1 \|v\|_V^2 \quad \forall h \leq h_0, \forall u \in \mathcal{U}_h, \forall v \in \mathcal{V}_h$$

L'opérateur  $A_h$  vérifiant l'inégalité de Gårding (indépendante de  $h$ ) :  $(-A_h(u)v, v) \geq C_1 \|v\|_V^2 - C_2 \|v\|_{L^2}^2$  avec  $C_2 = 0$  si  $\lambda \geq \lambda_0 \geq 0$ , cette hypothèse est vérifiée si  $\lambda \geq \lambda_0$ .

**(H 4)** L'opérateur de la méthode multigrille vérifie

$$\|M_k(u)\|_{V_k} \leq \rho < 1 \quad \forall u \in \mathcal{U}_k \text{ et } \forall k \geq 0$$

La borne  $\rho$  dépend a priori du contrôle, et les démonstrations de convergence des cycles multigrilles font intervenir les bornes des dérivées des fonctions  $g_i(u)$ . Néanmoins en pratique cette hypothèse est toujours vérifiée.

**(H 5)**  $\|\mathcal{I}_k^{k+1}\|_{V_{k+1} \leftarrow V_k} \leq C_i, \forall k \geq 0$ .

(H 6) La discrétisation est d'ordre  $\theta > 0$  :  $\|p_h v_h - v\|_V \leq C_\theta h^\theta, \forall h \leq h_0$ .

**Théorème 2** Sous les hypothèses H 1, H 2, H 3, H 4, H 5, H 6 la suite  $v_k^n$  de l'algorithme FMGH avec calcul exact des contrôles optimaux vérifie

pour tout  $\eta > 0$  il existe  $\underline{m} \geq 1$  tel que si  $m_k \geq \underline{m}$  à partir d'un certain rang alors pour tout  $v_0^0 \in \mathcal{F}(\Omega_0, \mathbb{R})$  il existe  $\underline{n}$  tel que si  $\bar{n} \geq \underline{n}$  alors

$$\begin{aligned} \|v_k^{\bar{n}} - v_k\|_V &\leq \eta C_\theta h_k^\theta \\ \|p_k v_k^{\bar{n}} - v\|_V &\leq (C\eta + 1)C_\theta h_k^\theta \end{aligned}$$

La démonstration de ce résultat se divise en quatre parties [2]. On montre d'abord la convergence d'ordre  $Q-(\beta' + 1)$  de l'algorithme de Howard (au moyen d'inégalités de Sobolev discrètes), ce qui est similaire à la convergence quadratique de la méthode de Newton. On en déduit le résultat du théorème pour un pas  $h_0$  petit et une fonction initiale dans un certain voisinage de la solution. C'est un cas particulier du résultat de R.E. Bank et D.J. Rose [4]. Enfin on montre un résultat de contraction de la méthode de Howard au départ d'une sursolution ( $\min_u (A_h(u)v + c_h(u)) \leq 0$ ), ce qui permet de prouver la convergence de l'algorithme Howard approché à niveau fixe pour tout niveau de grille et toute valeur initiale. On en déduit alors le théorème dans le cas général.

Si les contrôles sont calculés par une méthode de minimisation d'opérateur  $\mathcal{N}_h$  on obtient un résultat semblable moyennant quelques hypothèses sur la convergence de  $\mathcal{N}_h$  et sur les opérateurs d'interpolation  $\mathcal{I}$ .

**Proposition 2** Si  $C_N$  désigne le nombre de calculs d'une itération de minimisation en un point, la complexité de l'algorithme FMGH est

$$C_{FMGH}(h) \simeq \frac{(m_1 + \dots + m_{\bar{n}})C_{MG}(h) + (\bar{n}C_N + C)N_h}{1 - \delta^d}$$

Donc sous les hypothèses du théorème et si la complexité du cycle multigrille utilisé est de l'ordre de  $N_h$  (cf. proposition 1) la complexité de la résolution des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman est elle aussi de l'ordre de  $N_h$ .

## 4 Résultats numériques

On a construit un générateur de programmes Fortran adaptés au problème de contrôle stochastique à résoudre et aux méthodes numériques désirées [1,2]. On peut alors résoudre de nombreux problèmes, en particulier nous avons testé l'algorithme sur les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman suivantes

$$\begin{cases} \Delta v + \min_{u \in \mathbb{R}^d} (u \cdot \nabla v + u \cdot u) + c = 0 & \text{dans } \Omega = ]0, 1[^d, d = 1, 2, 3 \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} -4v + \Delta v + \min_{u \in \mathbb{R}^d} (u \cdot \nabla v + u \cdot u) + c = 0 & \text{dans } \Omega = ]0, 1[^d, d = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

La fonction  $c$  étant calculée en fonction de la solution exacte.

Dans l'algorithme FMGH on a utilisé la méthode de Gauss-Seidel lexicographique pour l'opérateur de relaxation, l'interpolation linéaire sur chaque coordonnée pour les opérateurs  $I_k^{k+1}$ ,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{U}$  et la restriction pleine (adjointe de l'interpolation) pour les opérateurs  $I_{k+1}^k$ . Les pas de discrétisation vérifient  $h_k = 1/2^k$ ,  $k$  étant le niveau de la grille. Les paramètres de la méthode multigrille sont  $\nu_1 = \nu_2 = 2$  et  $\gamma = 1$ , pour les problèmes de Dirichlet et  $\nu_1 = \nu_2 = 1$  et  $\gamma = 2$  en dimension supérieure à 2 et  $\gamma$  alterné 1-2 en dimension 1, pour les problèmes de Neumann (la complexité est alors encore en  $\mathcal{O}(N)$ ). Ces paramètres étaient performants pour les équations linéaires. Les paramètres de l'algorithme FMGH utilisés sont  $\bar{n} = 1$  ou 2 et  $m_1 = m_2 = 1$ .

Au cours de l'algorithme FMGH, on a calculé à chaque niveau de grille et après chaque minimisation ou cycle multigrille, la norme  $L^2$  et la semi-norme  $H^1$  discrète de l'erreur  $e_k = v_k - r_k v^*$  et la norme  $L^2$  discrète du résidu  $f_k = A_k(u_k)v_k + c_k$ . On a de plus calculé les normes des résidus et erreurs des fonctions obtenues après plusieurs itérations supplémentaires au niveau final, ce qui permet d'estimer l'erreur de discrétisation. Nous donnons en annexe les tableaux de ces valeurs pour deux problèmes de Neumann en dimension 2, ainsi que les courbes de variation des normes d'erreur normalisées  $\|e_k^{\bar{n}}\|_{L^2}/h_k^2$  et  $|e_k^{\bar{n}}|_{H^1}/h_k$  en fonction du niveau de grille  $k$ , pour deux problèmes de Dirichlet en dimension 2 (on trace aussi les valeurs obtenues après chaque itération de Howard supplémentaire au niveau final). Les résultats sont sensiblement les mêmes pour des problèmes équivalents en dimension 1 et 3.

## Conclusion des résultats numériques

Les résultats obtenus sur des problèmes équivalents sont en général meilleurs pour des conditions de Dirichlet que pour des conditions de Neumann. Ceci peut s'expliquer par une meilleure efficacité de la relaxation au moins dans les cas d'opérateurs linéaires dégénérés, ce qui entraîne des résultats plus performants des cycles multigrilles.

La contraction de  $\|f_k\|_{L^2}$  à niveau fixe est satisfaisante. Pour des conditions de type Dirichlet elle est d'environ 1/100 dans les meilleurs cas (solution lisse) et d'environ 1/4 dans les moins bons. Pour des conditions de type Neumann elle varie entre 1/10 et 1/2 environ. Ce qui explique qu'en général deux itérations par niveau soient nécessaires dans ces derniers cas.

On peut constater au vu des valeurs avant et après minimisation au dernier niveau de grille qu'hormis les cas où la contraction de  $\|f_k\|_{L^2}$  est faible les minimisations supplémentaires ne changent pas les valeurs des erreurs. Ceci s'explique par la convergence superlinéaire (d'ordre  $Q - (\beta' + 1)$ ) de l'algorithme de Howard qui l'emporte sur la convergence linéaire des cycles multigrilles, surtout si l'erreur initiale est de l'ordre de  $h_k^\theta$  avec  $h_k$  petit.

Les valeurs de  $|e_k^{\bar{n}}|_{H^1}/h_k$  et de  $\|e_k^{\bar{n}}\|_{L^2}/h_k$  calculées à la fin de chaque niveau de grille se maintiennent à une valeur à peu près constante et même décroissante. On a donc bien une confirmation du résultat du théorème avec les valeurs  $m_1 = \bar{n} = 1$ ; ce qui s'explique par le bon taux de contraction des cycles multigrilles eux-mêmes et de la méthode de minimisation (triviale dans les tests effectués).

La valeur de  $\|e_k^{\bar{n}}\|_{L^2}/h_k^2$  se maintient à une valeur à peu près constante pour les problèmes à solution lisse. Pour les problèmes à solution plus oscillante, elle prend des valeurs importantes aux niveaux inférieurs et décroît ensuite vers une valeur voisine de la valeur limite. On pouvait le prévoir, puisque dans ce cas la valeur du gradient de la fonction et donc de  $g(u)$  est grande,



l'équation est donc dégénérée, et la discrétisation utilisée est alors seulement d'ordre 1 en norme  $L^2$  aux niveaux inférieurs. A ces niveaux, on ne doit donc constater que la stabilité de la valeur de  $\|e_k^{\bar{n}}\|_{L^2}/h_k$ . Dans les exemples à solution non lisse présentés la discrétisation est d'ordre 1 jusqu'au niveau 4, et est d'ordre 2 ensuite. Pour des solutions de gradient plus important les résultats sont encore satisfaisants si les conditions aux limites sont de Dirichlet (stabilité de  $\|e_k^{\bar{n}}\|_{L^2}/h_k^2$ ) mais pas si elles sont de Neumann. Ceci peut s'expliquer par le manque d'efficacité (mauvais coefficient de lissage) de la relaxation utilisée (Gauss-Seidel lexicographique) par rapport à la correction utilisée. Il faut dans ces cas augmenter soit le nombre de relaxations  $\nu_1 + \nu_2$  soit  $\gamma$ , pour obtenir des résultats satisfaisants.

Malgré ces derniers cas qui n'entrent pas dans le cadre des hypothèses (non coercivité de l'opérateur), les résultats numériques obtenus confirment le résultat du théorème 2; le comportement des cycles multigrilles et de l'algorithme FMGH étant en général meilleur que celui espéré.

## Références

- [1] M. Akian, *Résolution numérique d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman au moyen d'algorithmes multigrilles et d'itérations sur les politiques* dans *Analysis and optimisation of systems*. Lecture notes in control and information sciences, n°111. S. V., 1988.
- [2] M. Akian, *Méthodes multigrilles en contrôle stochastique*. Thèse de doctorat, Université Paris-Dauphine, 1990, à paraître.
- [3] R.E. Bank, *A comparaison of two multilevel iterative methods for nonsymmetric and indefinite elliptic finite element equations*. Siam J. Numer. Anal., Vol 18, n°4, August 1981.
- [4] R.E. Bank, D.J. Rose, *Analysis of a multilevel iterative method for nonlinear finite element equations*. Math. Comp., 39, 453-465 (1982).
- [5] R. Bellman, S.E. Dreyfus, *Applied dynamic programming*. Princeton University Press 1962.
- [6] D. Braess, W. Hackbusch, *A new convergence proof for the Multigrid method including the V-cycle*. SIAM J. Numer. Anal., 20, n°5, 967-975, (1983).
- [7] S. F. McCormick, *Multigrid methods for variational problems: general theory for the V-cycle*. SIAM J. Numer. Anal., 22, n°4, 634-643, 1985.
- [8] S. F. McCormick, ed. *Multigrid methods*. SIAM frontiers in applied mathematics, vol 5, Dec. 1987.
- [9] W.H. Fleming, R. Rishel, *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer Verlag. N.Y. 1975.
- [10] W. Hackbusch, *Multigrid methods and applications*. Springer Verlag Berlin, Heidelberg 1985.
- [11] W. Hackbusch, U. Trottenberg, *Multigrid methods*. Lecture notes in mathematics, n°960. Springer Verlag, 1981.
- [12] R.H.W. Hoppe, *Multigrid methods for Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Numer. Math., 49, 239-254 (1986).
- [13] R.A. Howard, *Dynamic programming and markov process*. MIT 1960.
- [14] H. Kushner, *Probability methods in stochastic control and for elliptic equations*. Academic Press 1977.
- [15] J. Mandel, *Multigrid convergence for nonsymmetric, indefinite variational problems and one smoothing step*. Applied Mathematics and Computation, 19, 201-216, 1986.
- [16] S.V. Parter, *Note on convergence of the Multigrid V-cycle*. Applied Mathematics and Computation, 17, 1985.
- [17] J.P. Quadrat, *Sur l'identification et le contrôle des systèmes dynamiques stochastiques*. Thèse de doctorat d'état (Univ. Paris Dauphine) 1981.

# A Annexe

$k$	$h_k$	$\ f_k\ _{L^2}$	$\ e_k\ _{L^2}/h_k^2$	$ e_k _{H^1}/h_k$
1	0.50	12.00	2.00	4.00
1	0.50	1.02	1.36	1.16
2	0.25	8.05	5.35	3.78
2	0.25	0.55	1.17	0.31
3	0.13	6.95	5.24	3.56
3	0.13	0.37	1.07	0.20
4	$6.25 \cdot 10^{-2}$	6.96	4.99	3.52
4	$6.25 \cdot 10^{-2}$	0.21	0.81	0.12
5	$3.13 \cdot 10^{-2}$	6.98	3.85	3.50
5	$3.13 \cdot 10^{-2}$	0.15	0.71	0.08
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	6.98	3.32	3.49
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	0.10	0.69	0.05
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	0.10	0.69	0.05
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$9.29 \cdot 10^{-3}$	0.68	0.02
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$9.29 \cdot 10^{-3}$	0.68	0.02
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$9.52 \cdot 10^{-4}$	0.68	0.02
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$9.52 \cdot 10^{-4}$	0.68	0.02

Table 1: Résolution de l'équation de Neumann en dimension 2 dont la solution est  $v^*(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ .

$k$	$h_k$	$\ f_k\ _{L^2}$	$\ e_k\ _{L^2}/h_k^2$	$ e_k _{H^1}/h_k$
1	0.50	592.00	2.33	5.25
1	0.50	40.20	62.40	176.23
2	0.25	744.00	125.40	249.55
2	0.25	87.20	64.71	128.98
3	0.13	438.00	201.96	230.89
3	0.13	86.40	568.47	104.98
4	$6.25 \cdot 10^{-2}$	368.00	2270.64	208.54
4	$6.25 \cdot 10^{-2}$	35.40	1716.14	49.82
5	$3.13 \cdot 10^{-2}$	242.00	6864.37	127.54
5	$3.13 \cdot 10^{-2}$	25.10	1123.35	18.47
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	209.00	4493.68	108.77
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	10.10	868.81	7.21
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	10.10	868.81	7.21
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	0.71	476.98	8.31
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	0.71	476.98	8.31
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$9.90 \cdot 10^{-2}$	456.97	8.55
6	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$9.90 \cdot 10^{-2}$	456.97	8.55

Table 2: Résolution de l'équation de Neumann en dimension 2 dont la solution est  $v^*(x, y) = 0.30 \cos(10\pi x) \cos(10\pi y) + \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ .

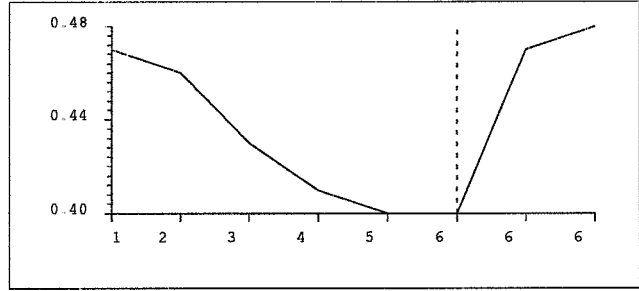
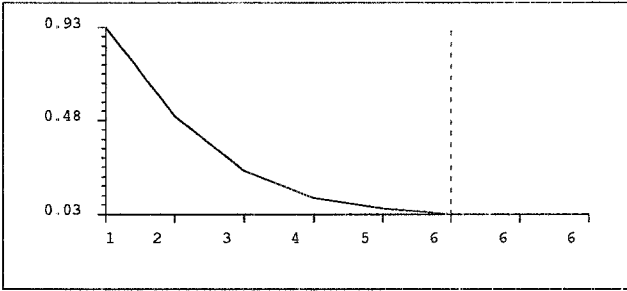


Figure 4: Courbes des valeurs  $|e_k|_{H^1}/h_k$  (à gauche) et  $\|e_k\|_{L^2}/h_k^2$  (à droite) pour la résolution de l'équation de Dirichlet en dimension 2 dont la solution est  $v^*(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ .

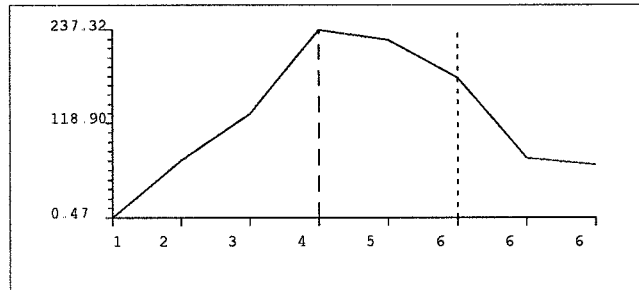
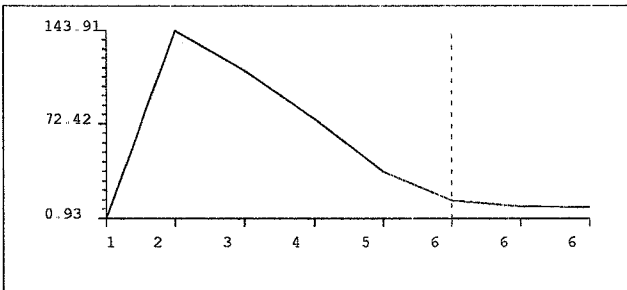


Figure 5: Courbes des valeurs  $|e_k|_{H^1}/h_k$  (à gauche) et  $\|e_k\|_{L^2}/h_k^2$  (à droite) pour la résolution de l'équation de Dirichlet en dimension 2 dont la solution est  $v^*(x, y) = 0.30 \sin(10\pi x) \sin(10\pi y) + \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ .