

Optimisation de forme de micro-mécanismes compliant par la méthode des courbes de niveau

Grégoire Allaire¹

Frédéric De Gournay¹

François Jouve¹

¹ CMAP (UMR 7641)

Ecole Polytechnique

91128 Palaiseau cedex

www.cmap.polytechnique.fr/~optopo

gregoire.allaire@polytechnique.fr

fredericdegournay@yahoo.fr

francois.jouve@polytechnique.fr

Résumé

Les techniques d'optimisation de formes ont connu dans la décennie écoulée un très fort développement. Dans le cadre de l'optimisation de structures élastiques, la représentation des formes par une fonction courbe de niveau (ou level set) sur une grille fixe a permis de développer des algorithmes très efficaces. Nous présentons ces méthodes en insistant sur les applications possibles dans le domaine de la conception de micro-mécanismes compliant.

Mots Clef

Optimisation de forme, mécanismes compliant, level set.

1 Introduction

Les méthodes classiques de variation de frontière ont été beaucoup étudiées (cf. [11][13]). Elles présentent l'avantage de pouvoir traiter une grande variété de modèles mécaniques ainsi que de fonctions-coût. Mais elles ont deux inconvénients majeurs : leur coût, dû à la nécessité de remailler et leur tendance à trouver des minima locaux et des solutions fortement dépendantes de la forme de départ. La méthode d'homogénéisation [1][5][6][14] est une bonne façon d'éviter ces inconvénients, mais elle est limitée à l'élasticité linéarisée et à des fonctions-coût particulières. Récemment [3][4], les techniques d'optimisation de formes classiques ont été revisitées en éliminant un de leurs inconvénient : les formes sont capturées sur un maillage fixe et représentées par une courbe de niveau d'un champ scalaire, comme dans la méthode introduite par Osher et Sethian [12] pour le suivi de frontières libres. On conserve ainsi tous les avantages des méthodes de variation de domaine, tout en évitant de nombreux problèmes d'implémentation et d'instabilités numériques dus au remaillage. La vitesse du front de propagation est calculée en utilisant la dérivée de forme de l'optimisation de frontière classique. Cette méthode est très souple. Elle s'étend facilement au

3d. L'implémentation d'une nouvelle fonction-coût est relativement facile et elle permet d'utiliser des modèles physiques et des conditions aux limites complexes.

Nous nous concentrons sur l'optimisation de formes (*i.e.* matériau/vide) plutôt que sur l'optimisation de deux phases. Nous employons l'approche qui consiste à remplir les trous avec un matériau mou. Nous calculons une dérivée de forme en utilisant un problème adjoint. Elle est ensuite utilisée comme une vitesse normale sur la frontière libre que l'on fait évoluer au cours du processus d'optimisation. Le transport s'effectue en résolvant une équation d'Hamilton-Jacobi pour la fonction level set. La mise en oeuvre d'une nouvelle fonction objectif est donc très simple. En effet, il suffit d'écrire le problème adjoint et la dérivée de forme.

Par rapport à la méthode d'optimisation de structures par level set décrite dans [3][4], nous proposons deux améliorations importantes permettant d'accroître la robustesse et l'efficacité des algorithmes :

- afin d'atténuer le fait que la méthode n'est pas « topologique » au sens strict – même si elle autorise très naturellement des variations de topologie – nous la couplons à la méthode du gradient topologique (cf. [10], [16]). L'idée est d'enrichir périodiquement l'espace de recherche des formes optimales au cours de l'algorithme en autorisant la création de trous à l'intérieur du domaine. Le gradient topologique est utilisé comme critère de nucléation pour l'initiation d'éventuels nouveaux trous (cf. [2]) ;
- la vitesse de transport de la forme est calculée en utilisant la dérivée de forme. Cette dérivée n'est a priori définie que sur le seul bord de la forme. Une extension « naturelle » est disponible. Nous proposons une extension de la vitesse au domaine de calcul tout entier qui utilise une régularisation par la résolution d'un problème elliptique. Cette extension régularisée se montre en pratique beaucoup plus performante que l'extension naturelle (cf. [8]).

2 Dérivée de forme

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , supposé régulier, inclus dans un domaine de travail D borné qui contient toutes les formes admissibles. Il est soumis à des forces surfaciques g sur une partie Γ_N de son bord et à des conditions de Dirichlet sur une autre partie Γ_D . Le solide est constitué d'un matériau linéairement élastique de loi de Hooke A . Le champ de déplacement u est solution du problème d'élasticité linéarisée

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ (Ae(u))n = g & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (1)$$

Nous cherchons à faire varier la forme Ω dans le domaine D afin d'optimiser une fonction-coût $J(\Omega)$.

Dans le cadre de l'optimisation de mécanismes, la fonction-coût que nous utilisons est la suivante :

$$J(\Omega) = \left(\int_{\Omega} k(x)|u(x) - u_0(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (2)$$

où u_0 désigne un déplacement-cible donné et k est une fonction bornée sur Ω servant typiquement à localiser la zone sur laquelle on désire contrôler le déplacement de la structure. Ainsi cette même fonction peut servir à minimiser le déplacement ($u_0 = 0$) ou bien l'écart à un déplacement donné, ou encore à maximiser le déplacement dans une direction (si u_0 est très grand dans cette direction). La méthode s'applique bien entendu à toutes sortes de fonctions-coût différentes.

Suivant l'approche de Murat-Simon [11], il est possible de calculer la dérivée de forme de J qui mesure les variations de J pour une variation infinitésimale du bord de Ω suivant un champ vectoriel θ (il est remarquable que cette dérivée directionnelle ne dépende que de la trace normale $\theta \cdot n$ de θ sur le bord $\partial\Omega$) :

$$\begin{aligned} J'(\Omega)(\theta) = & \int_{\Gamma_N} \left(\frac{C_0}{2} k |u - u_0|^2 + Ae(p) \cdot e(u) \right. \\ & \left. - \frac{\partial(g \cdot p)}{\partial n} - Hg \cdot p \right) \theta \cdot n ds \\ & + \int_{\Gamma_D} \left(\frac{C_0}{2} k |u - u_0|^2 - Ae(u) \cdot e(p) \right) \theta \cdot n ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Dans l'expression ci-dessus, p est l'état adjoint défini comme la solution du problème adjoint

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(p)) = -C_0 k(x)(u - u_0) & \Omega \\ p = 0 & \Gamma_D \\ (Ae(p))n = 0 & \Gamma_N \end{cases} . \quad (4)$$

$H(x)$ désigne la courbure moyenne en un point x du bord $\partial\Omega$ et C_0 est une constante définie par :

$$C_0 = \left(\int_{\Omega} k(x)|u(x) - u_0(x)|^2 dx \right)^{-1/2}.$$

Nous pouvons maintenant décrire une méthode de gradient pour la minimisation de la fonction-objectif $J(\Omega)$. Si l'expression de la dérivée de forme s'écrit

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v \theta \cdot n ds, \quad (5)$$

en négligeant les problèmes de régularité, une direction de descente sera définie en introduisant un champ de vecteurs

$$\theta = -v n, \quad (6)$$

et en actualisant la forme Ω par

$$\Omega_t = (\operatorname{Id} + t\theta)\Omega,$$

où $t > 0$ est un (petit) pas de descente. Formellement on obtient

$$J(\Omega_t) = J(\Omega) - t \int_{\partial\Omega} v^2 ds + \mathcal{O}(t^2)$$

ce qui garantit la décroissance de la fonction-objectif.

3 Paramétrisation des formes par une courbe de niveaux

Comme décrite ci-dessus, la méthode de sensibilité peut s'implémenter dans un cadre Lagrangien. Il suffit de mailler Ω et de déformer la frontière du maillage grâce à la direction de descente θ . Ce type d'implémentation souffre au moins de deux inconvénients. Tout d'abord, si la déformation est trop importante, il est nécessaire de remailler, ce qui peut s'avérer très coûteux (surtout en 3d) et introduire des instabilités. De plus, des parties initialement disjointes de la frontière peuvent avoir tendance à se rapprocher (jusqu'au contact) et il est alors très difficile de prendre en compte ces changements de topologie avec de telles méthodes de suivi de frontière. La méthode, Eulérienne, des courbes de niveaux permet de capturer la forme sur un maillage fixe, évitant ainsi ces inconvénients.

Nous paramétrons la frontière de Ω par la fonction courbe de niveaux définie sur D par

$$\begin{cases} \psi(x) = 0 & \Leftrightarrow x \in \partial\Omega \cap D, \\ \psi(x) < 0 & \Leftrightarrow x \in \Omega, \\ \psi(x) > 0 & \Leftrightarrow x \in (D \setminus \overline{\Omega}). \end{cases}$$

Les équations de l'élasticité pour le champ de déplacement u ainsi que pour l'adjoint p sont prolongées au domaine D tout entier par la méthode du matériau fictif qui consiste à remplir les trous $D \setminus \Omega$ d'un matériau mou, simulant le vide tout en évitant la singularité de l'opérateur d'élasticité.

Au cours de la procédure d'optimisation, la forme évolue suivant un pseudo-temps qui correspond à un pas de descente. Si la forme évolue en temps, alors la courbe de niveau suit une équation d'Hamilton-Jacobi. Plus précisément, si $\Omega(t)$ varie en temps $t \in \mathbb{R}^+$ avec la vitesse normale $V(t, x)$, alors

$$\psi(t, x(t)) = 0 \quad \forall x(t) \in \partial\Omega(t).$$

On différencie par rapport à t et on remarque que la normale n à la forme Ω est donnée par $n = \nabla\psi/|\nabla\psi|$, d'où

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + V|\nabla\psi| = 0.$$

Cette équation d'Hamilton-Jacobi est posée dans tout le domaine D et pas seulement sur la frontière $\partial\Omega$ dès lors que la vitesse V est connue partout. Remarquons que la représentation par level set permet de calculer facilement la courbure moyenne $H = \operatorname{div}(n)$ qui joue un grand rôle si l'on veut introduire une pénalisation du périmètre.

4 Algorithme d'optimisation

Si la dérivée de forme est du type (5), dès lors que l'expression de v peut s'étendre à tout le domaine de calcul D , on peut définir une direction de descente

$$\theta = -v n,$$

et la composante normale $\theta \cdot n = -v$ sera la vitesse d'advection dans l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - v|\nabla\psi| = 0. \quad (7)$$

Transporter ψ par (7) est équivalent à bouger la frontière de Ω (la courbe de niveau 0 de ψ) suivant la direction de descente $-J'(\Omega)$.

L'expression (3) de la dérivée de forme pour la fonction-coût (2) fait apparaître une extension naturelle de la vitesse à tout le domaine D car tous les termes intervenant dans l'intégrande sont définis dans tout le domaine de calcul. Nous verrons dans la partie 6 que d'autres extensions de la vitesse peuvent s'avérer plus efficaces.

Nous proposons un algorithme itératif structuré de la façon suivante :

1. Initialisation de la fonction level set ψ_0 correspondant à une forme initiale Ω_0 .
2. Itération jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:
 - (a) calcul de l'état u_k et de l'état adjoint p_k pour le domaine Ω_k . Le calcul s'effectue sur D avec le maillage fixe grâce à la méthode du matériau fictif ;
 - (b) déformation de Ω_k par résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (7). La nouvelle forme Ω_{k+1} est caractérisée par la fonction courbe de niveau ψ_{k+1} solution de (7) après un pas de temps Δt_k en partant de la condition initiale $\psi_k(x)$ avec la vitesse $-v_k$ calculée en fonction de u_k et de p_k . Le pas de temps Δt_k est choisi tel que $J(\Omega_{k+1}) \leq J(\Omega_k)$.
3. De temps en temps, comme il est habituel de le faire dans les algorithmes de level set pour des raisons de stabilité, la fonction ψ est réinitialisée en résolvant une autre équation d'Hamilton-Jacobi dont la solution stationnaire est la fonction distance signée à la courbe de niveau 0.

L'équation (7) est résolue par un schéma explicite décentré sur une grille cartésienne, ou bien par un schéma spécifique lorsque le maillage est non structuré.

Des extensions à la méthodes ci-dessus ainsi que de nombreux détails d'implémentation sont décrits dans [3]. Nous donnons les dérivées de forme et des exemples de calculs numériques pour différentes fonctions-coût : la compliance ou une somme de compliances (multi-chargeement), un écart aux moindres carrés par rapport à un déplacement cible, ou encore la plus petite des fréquences propres. Nous décrivons aussi comment il est possible très facilement de prendre en compte des conditions aux limites de forces suivies (pression normale au bord ou bien force de direction constante appliquée sur le bord variable), des termes de périmètre (qui servent à régulariser les solutions) ou des modèles physiques plus complexes que l'élasticité linéarisée (un exemple est donné en élasticité non-linéaire pour un matériau hyperélastique en grandes déformations).

5 Gradient topologique et méthode de level set

L'algorithme ci-dessus ne crée pas de nouveaux trous ni de nouvelles frontières si l'équation d'Hamilton-Jacobi (7) est résolue sous une stricte condition CFL car elle satisfait un principe du maximum. Toutefois, la méthode des courbes de niveau est connue pour permettre le traitement aisé des changements de topologie, c'est-à-dire la création ou la suppression de trous. Ainsi notre algorithme est-il capable de supprimer des trous facilement si la structure initiale en comporte trop. Mais si l'initialisation n'est pas assez riche, ou si des structures fines ont été détruites par une étape intermédiaire de calcul, il lui sera impossible de recréer un trou au milieu du domaine. L'algorithme converge alors en général vers un minimum local. La solution pourrait être substantiellement améliorée par l'ajout d'un ou plusieurs trous judicieusement placés. Notons que cet inconvénient est surtout sensible en 2d. En effet, s'il est par exemple impossible par l'algorithme de level set de trouver une solution du même genre topologique qu'une coque sphérique en partant d'une boule (il faudrait creuser un trou à l'intérieur), on peut parfaitement obtenir, entre autres, une structure de même genre qu'un tore en faisant se rapprocher puis se toucher deux parois parallèles. On observe couramment ce phénomène lors de simulations numériques.

Nous proposons d'utiliser la méthode du gradient topologique de Masmoudi, Schumacher, Sokołowski et leurs collaborateurs [9], [10], [16], [15] pour définir un critère de nucléation permettant, à certaines étapes du calcul, de déterminer où il serait avantageux, du point de vue de la décroissance de la fonction-objectif, de percer un trou de taille infinitésimale.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert et $x_0 \in \Omega$, on note Ω_ρ le domaine Ω privé d'un trou sphérique centré en x_0 et de diamètre ρ (que l'on suppose interne, *i.e.* ayant une intersection vide avec $\partial\Omega$). Dans le cadre de l'optimisation de structures, on impose une condition aux limites de Neumann sur le bord

des trous.

Si la fonction-coût $J(\Omega)$ admet un développement du type suivant, appelé asymptotique topologique,

$$J(\Omega_\rho) = J(\Omega) + \rho^d D_T J(x_0) + o(\rho^d),$$

alors $D_T J(x_0)$ est appelée dérivée topologique au point x_0 .

On peut calculer explicitement (cf. [10], [15]) la dérivée topologique pour pour la fonction-coût (2) en 2d

$$D_T J(x) = -\frac{\pi}{2} C_0 k(x) |u(x) - u_0(x)|^2 - \frac{\pi(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} \left\{ 4\mu A e(u) \cdot e(p) + (\lambda - \mu) \text{tr}(A e(u)) \text{tr}(e(p)) \right\}, \quad (8)$$

et en 3d

$$D_T J(x) = -\frac{2\pi}{3} C_0 k(x) |u(x) - u_0(x)|^2 - \frac{\pi(\lambda + 2\mu)}{\mu(9\lambda + 14\mu)} \left\{ 20\mu A e(u) \cdot e(p) + (3\lambda - 2\mu) \text{tr}(A e(u)) \text{tr}(e(p)) \right\}. \quad (9)$$

Nous utilisons ces quantités pour insérer une étape supplémentaire dans l'algorithme précédent :

1. Initialisation de la fonction level set ψ_0 correspondant à une forme initiale Ω_0 .
2. Itération jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:
 - (a) calcul de l'état u_k et de l'état adjoint p_k pour le domaine Ω_k ;
 - (b) déformation de Ω_k par résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (7). La nouvelle forme Ω_{k+1} est caractérisée par la fonction courbe de niveaux ψ_{k+1} ;
 - (c) de temps en temps, suivant un paramètre donné par l'utilisateur, calcul du gradient topologique $D_T J$ et initiation de trous là où il est minimal et négatif.

En 2d, les résultats numériques sont conformes aux attentes : les solutions obtenues avec cette méthode, en partant d'un état initial trivial (domaine rempli de matériau), correspondent aux meilleures des solutions atteintes par l'algorithme précédent lorsque l'on fait varier le nombre de trous initiaux. Elle permet donc d'avoir une plus grande confiance dans la qualité de la solution, quelle que soit l'initialisation choisie. Les Figures 3 et 4 montrent un exemple d'utilisation du gradient topologique pour le design d'une structure à topologie complexe. En 3d, du fait de la plus grande facilité de changement de topologie déjà discutée plus haut, nous n'avons pas mis en évidence d'exemple pour lequel l'introduction du gradient topologique permettrait d'améliorer sensiblement la solution. Tout au plus permet-il de dégrossir plus rapidement la topologie de la structure et ainsi d'accélérer un peu la convergence, ce qui n'est pas totalement négligeable en 3d.

6 Extension et régularisation de la vitesse

La vitesse v définie par l'équation (5) n'a un sens que sur le bord du domaine Ω . On a vu qu'on pouvait facilement en donner une extension naturelle, valable sur tout le domaine de calcul D . Toutefois cette extension, qui a l'avantage de la simplicité de mise en oeuvre, n'est pas nécessairement la meilleure. On remarque par exemple qu'à cause du matériau fictif (très mou) qui est utilisé à la place du vide afin de toujours travailler sur un domaine fixe, la vitesse est la plupart du temps très petite à l'extérieur de la forme, comparée à celle calculée à l'intérieur. Cela a pour conséquence de favoriser artificiellement la suppression de matière par rapport à son ajout pour une structure donnée.

Afin d'étendre la vitesse à tout le domaine en la régularisant, nous fixons un paramètre réel a et nous calculons \tilde{V} comme l'unique solution du problème scalaire

$$\begin{cases} -a\Delta\tilde{V} + \tilde{V} = 0 & \text{dans } D \\ \tilde{V} = v & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \quad (10)$$

Le paramètre a mesure l'amplitude de la diffusion de la vitesse autour de la frontière $\partial\Omega$. Il doit être choisi convenablement pour que la vitesse soit diffusée suffisamment loin de la frontière (a assez grand) sans que deux parties disjointes de la frontière interfèrent (a pas trop grand).

Cette nouvelle vitesse, utilisée dans l'algorithme précédent, montre une amélioration de la qualité des résultats obtenus. On observe en particulier une vitesse de convergence de l'algorithme qui ne dépend plus de la finesse du maillage.

7 Exemples de calculs de mécanismes optimaux

A titre d'illustration, nous présentons d'abord deux exemples de calculs de micro-pinces compliantes, fonctionnant sans rotules ni jonctions. Dans les deux cas, l'encombrement maximal de la pièce, ainsi que les conditions aux limites (points d'appui, forces extérieures) sont des données du problème. Les caractéristiques mécaniques du matériau utilisé sont également données. Il s'agit d'optimiser la fonction-objectif (2) en répartissant de manière optimale la matière dans le domaine de calcul. Ici, nous maximisons le déplacement des mâchoires de la pince, $k(x)$ vaut donc 1 sur les mâchoires et (presque) 0 ailleurs, tandis que u_0 est choisi très grand dans la direction de fonctionnement de la pince. En outre on impose un léger contrôle du déplacement au niveau du point d'application des efforts (u_0 nul et $k(x)$ petit) pour éviter d'obtenir de trop grands déplacements. Enfin, une force de réaction est imposée au niveau des mâchoires, dans la direction opposée à son fonctionnement. Un choix judicieux de cette force permet d'ajuster le ratio (*déplacement des mâchoires*)/(*force de serrage*) de la structure optimale finale.

Pour la pince bidimensionnelle (Fig. 1), on applique une

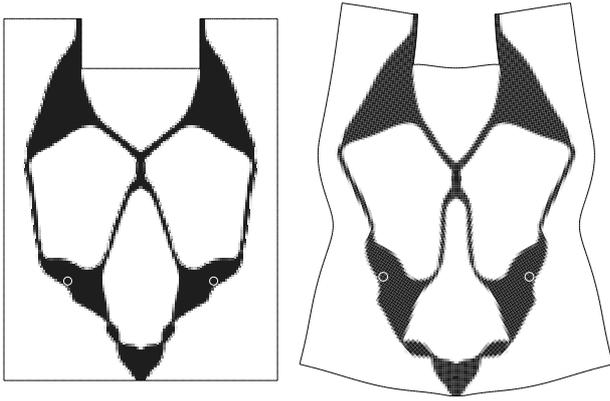


FIG. 1 – Micro-pince optimisée par la méthode des courbes de niveau

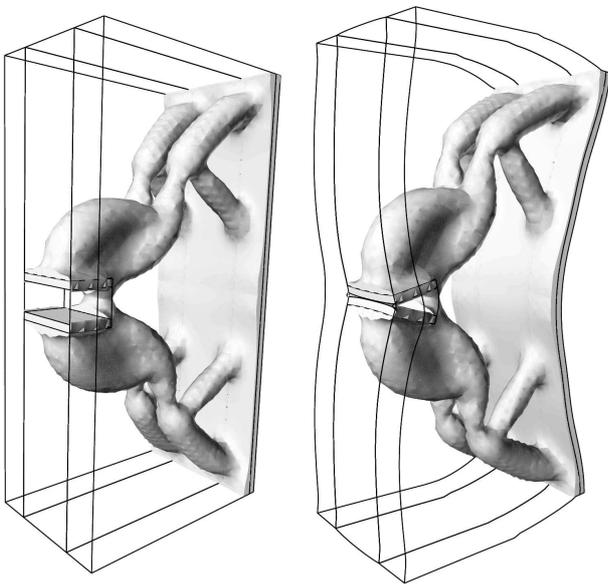


FIG. 2 – Pince 3d optimisée par la méthode des courbes de niveau

force verticale au milieu de la face inférieure. Les points d'appui sont figurés par les cercles blancs.

La pince tridimensionnelle (Fig. 2) est encastrée au niveau des faces supérieures et inférieures du domaine et une pression est appliquée sur la face arrière.

Pour illustrer le couplage de la méthode du gradient topologique avec la méthode des level set, nous présentons une structure que l'on peut assimiler à une microstructure dont le comportement macroscopique apparent est celui d'un matériau à coefficient de Poisson négatif. Le domaine de calcul est un carré dont les bords sont exclus de l'optimisation. Il est soumis à des forces de traction sur ses parois verticales. On cherche à maximiser le déplacement vertical sur les parois horizontales. L'algorithme est initialisé avec une structure remplissant tout le domaine de calcul. La Figure 3 montre la forme obtenue à différentes étapes

du calcul. On remarque la complexification croissante de la topologie, obtenue grâce à plusieurs interventions du gradient topologique comme critère de nucléation au cours du calcul. La Figure 4 montre la structure finale et sa déformation sous l'action des forces appliquées.

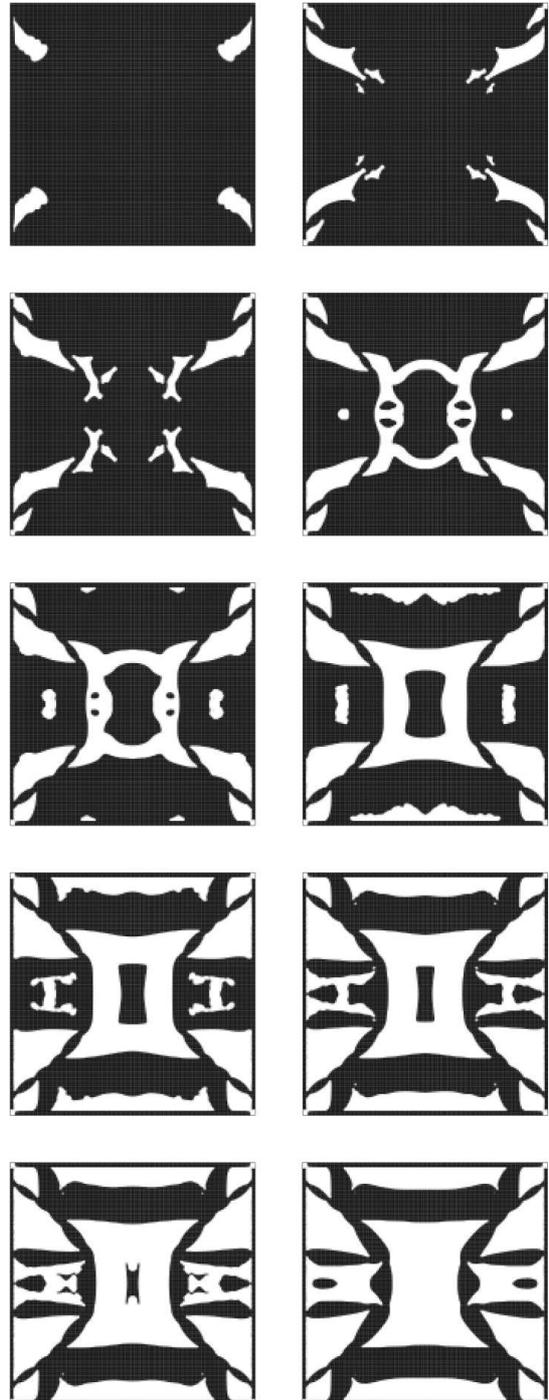


FIG. 3 – Différentes étapes du calcul pour le design du dispositif se comportant comme un matériau à coefficient de Poisson négatif

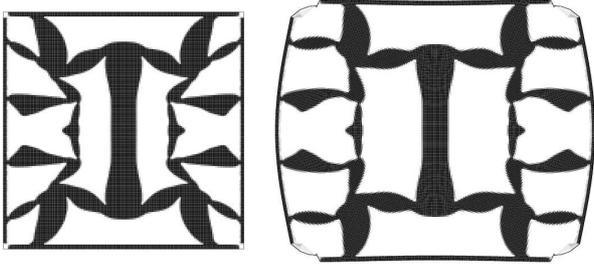


FIG. 4 – Microstructure à coefficient de Poisson négatif et sa déformée sous l'action de forces latérales

Références

- [1] ALLAIRE G., *Shape optimization by the homogenization method*, Springer Verlag, New York, 2001.
- [2] ALLAIRE G., DE GOURNAY F., JOUVE F., TOADER A.M., Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method, à paraître dans *Control and cybernetics*, 2005.
- [3] ALLAIRE G., JOUVE F., TOADER A.M., Structural optimization using sensitivity analysis and a level set method, *J. Comp. Phys.*, **194/1**, pp. 363-393, 2004.
- [4] ALLAIRE G., JOUVE F., TOADER A.M., A level set method for shape optimization, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **334** no.12, pp. 1125-1130, 2002.
- [5] ALLAIRE G., JOUVE F., Optimal design of micro-mechanisms by the homogenization method, *Europ. J. of Finite Elements*, **11**, pp. 405-416, 2002.
- [6] BENDSOE M., SIGMUND O., *Topology Optimization. Theory, Methods, and Applications*, Springer Verlag, New York, 2003.
- [7] CÉA J., Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût, *Math. Model. Num. Anal.*, **20**, 3, pp. 371-402, 1986.
- [8] DE GOURNAY F., *Thèse de l'Ecole Polytechnique*, Juillet 2005.
- [9] ESCHENAUER H., SCHUMACHER A., Bubble method for topology and shape optimization of structures, *Structural Optimization*, **8**, 42-51 (1994).
- [10] GARREAU S., GUILLAUME P., MASMOUDI M., The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case, *SIAM J. Control Optim.*, **39**, no. 6, pp. 1756-1778, 2001.
- [11] MURAT F., SIMON S., Études de problèmes d'optimal design, *Lecture Notes in Computer Science 41*, pp. 54-62, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [12] OSHER S., SETHIAN J.A., Front propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comp. Phys.*, **78**, pp. 12-49, 1988.
- [13] PIRONNEAU O., *Optimal shape design for elliptic systems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [14] SIGMUND O., On the design of compliant mechanisms using topology optimization, *Mech. Struct. Mach.*, **25**, pp. 493-524, 1997.
- [15] SOKOŁOWSKI J., ŻOCHOWSKI A., Topological derivatives of shape functionals for elasticity systems, *Mech. Structures Mach.*, **29**, no. 3, 331-349 (2001).
- [16] SOKOŁOWSKI J., ŻOCHOWSKI A., On the topological derivative in shape optimization, *SIAM J. Control Optim.*, **37**, pp. 1251-1272, 1999.