

Homogénéisation d'une équation spectrale du transport neutronique

Grégoire ALLAIRE et Guillaume BAL

G. A. : CEA Saclay, DRN/DMT/SERMA, 91191 Gif-sur-Yvette, France.
et LAN, Université Paris VI, 75232 Paris cedex 05, France ;

G. B. : EDF/DER/IMA-MMN, 1, avenue du Général-de-Gaulle, 92141 Clamart, France.

Résumé. On étudie l'homogénéisation d'un problème aux valeurs propres de transport neutronique dans un domaine hétérogène périodique. On démontre que le flux neutronique se factorise en un produit de deux termes, à un reste près qui converge fortement vers zéro lorsque la période tend aussi vers zéro. Le premier terme est le premier vecteur propre de l'équation du transport dans une cellule de périodicité. Le deuxième terme est solution d'un problème aux valeurs propres pour une équation de diffusion neutronique dans le domaine homogénéisé. Ce résultat justifie et affine la méthodologie physique utilisée en pratique pour les calculs de cœurs de réacteurs nucléaires.

Homogenization of a spectral equation in neutron transport

Abstract. *We study the homogenization of an eigenvalue problem for the neutron transport in a periodic heterogeneous domain. We prove that the neutronic flux can be factorized as a product of two terms, up to a remainder which converges strongly to zero with the period. The first term is the first eigenvector of the transport equation in the periodicity cell. The second term is the solution of an eigenvalue problem for a diffusion equation in the homogenized domain. This result justifies and improves the engineering procedure used in practice for nuclear reactor cores computations.*

Abridged English Version

The power distribution in a nuclear reactor core is usually determined by solving the critical problem for the neutron transport equation which expresses the balance between the production of neutron by fission and its diffusion and adsorption. Solving numerically such an eigenvalue problem in a nuclear core is still a challenge with modern computers, even in two dimensions. The reason is that nuclear cores are usually highly heterogeneous, thus requiring a very fine mesh. Therefore, it is preferable to homogenize first the transport equation. There is a rich literature on this topic, both in physics (see, e.g., [5], [8], and [16]) and in mathematics (see, e.g., [9], [10], [15], and [17]). In this Note,

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

we rigorously prove an homogenization theorem for the following eigenvalue problem: find $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ and $\phi^\varepsilon \in L^2(\Omega \times V)$ solution of

$$\begin{cases} \varepsilon v \cdot \nabla \phi^\varepsilon + \Sigma^\varepsilon(x, v) \phi^\varepsilon = \int_V f^\varepsilon(x, v', v) \phi^\varepsilon(x, v') dv' + \lambda_\varepsilon \int_V \sigma^\varepsilon(x, v', v) \phi^\varepsilon(x, v') dv' & \text{in } \Omega \times V, \\ \phi^\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma_- = \{(x, v) \in \partial\Omega \times V \mid v \cdot n(x) < 0\}, \end{cases}$$

where the cross-sections Σ^ε , f^ε , and σ^ε are positive and periodic with period ε with respect to x . By using well-known methods (see [7] and [14]), it can easily be shown (see [3]) that such a problem admits at most a countable number of eigenvalues $(\lambda_\varepsilon^k)_{k \geq 1}$ (labeled in increasing order) and eigenvectors $(\phi_\varepsilon^k)_{k \geq 1}$, and that there exists a first positive eigenvector (the only one interesting from a physical point of view). Denoting by λ_∞ the first eigenvalue and ψ the positive first eigenvector of the same problem posed in a single periodicity cell (see (4)), we prove, under a symmetry assumption (9), that, for fixed k , $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lambda_\varepsilon^k - \lambda_\infty) / \varepsilon^2 = \nu^k$, and, up to a subsequence, $\phi_\varepsilon^k(x, v) / \psi(x/\varepsilon, v)$ converges strongly in $L^2(\Omega \times V)$ to $u^k(x)$ which is an eigenvector associated to ν^k of the diffusion equation:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot D \nabla u^k(x) = \nu^k \bar{\sigma} u^k(x) & \text{in } \Omega, \\ u^k(x) = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where D is a constant positive definite matrix defined by (11) and $\bar{\sigma}$ is a positive constant coefficient defined by (13). Our theorem generalizes previous results of Larsen on time-dependent transport problems (see [9] and [10]), and recent works on diffusion eigenvalue problems (see [2], [6], [12], and [13]).

1. Introduction

La détermination précise de la répartition de puissance dans le cœur d'un réacteur nucléaire s'effectue en résolvant le problème critique du transport neutronique qui exprime le bilan entre la production de neutrons par fission dans le combustible nucléaire et l'absorption et la diffusion des neutrons dans le cœur. Il s'agit donc de résoudre un problème aux valeurs propres pour l'équation du transport dont l'inconnue est le flux neutronique $\phi(x, v)$ qui donne la densité de neutrons de vitesse v au point x . Plus précisément, il s'agit de trouver la plus grande valeur propre k_{eff} et le vecteur propre (positif) associé $\phi(x, v)$ qui sont solution de

$$(1) \quad v \cdot \nabla \phi + \Sigma(x, v) \phi = \int_V f(x, v', v) \phi(x, v') dv' + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \int_V \sigma(x, v', v) \phi(x, v') dv'$$

avec des conditions aux limites appropriées dans un domaine borné. Même en dimension $N = 2$, le calcul numérique de ϕ est très coûteux car les sections efficaces d'absorption, Σ , de diffusion, f , et de fission, σ , sont très hétérogènes (un cœur de réacteur contient des dizaines de milliers de crayons de combustibles différents). Il est donc nécessaire d'homogénéiser (1) pour effectuer des calculs numériques peu onéreux. Il existe déjà une très riche littérature sur cette question, aussi bien en physique (voir, par exemple, [5], [8] et [16]) qu'en mathématique (voir, par exemple, [5], [8], [15] et [17]). Dans tous les cas, la méthodologie consiste à factoriser le flux fin, solution de (1), en $\phi(x, v) = \psi(x, v) u(x)$, où $\psi(x, v)$ est solution de la même équation de transport (1) posée dans une cellule avec conditions aux limites de périodicité (problème dit *en milieu infini*), et $u(x)$ est solution d'une équation de diffusion homogénéisée.

Le but de cette Note est de justifier rigoureusement cette procédure de factorisation dans le cas d'un domaine périodique. Nous généralisons ainsi des résultats antérieurs de Larsen (voir [9] et [10]), ainsi que des travaux récents en diffusion (voir [2], [6], [12] et [13]).

2. Présentation du problème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Soit $Y = (0, 1)^N$ la cellule unité. On note $\varepsilon > 0$ la période des hétérogénéités dans Ω . Soit V un compact de \mathbb{R}^N (l'ensemble des vitesses v). On suppose que V est la fermeture d'un ouvert de mesure unité (pour simplifier), et que 0 n'appartient pas à V . Les sections efficaces dans Ω sont données par :

$$(2) \quad \Sigma^\varepsilon(x, v) = \Sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\right), \quad f^\varepsilon(x, v', v) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}, v', v\right), \quad \sigma^\varepsilon(x, v', v) = \sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}, v', v\right),$$

où Σ , f et σ sont des fonctions mesurables Y -périodiques dans la variable d'espace, bornées et minorées par une constante strictement positive, et telles que $\Sigma - f$ soit aussi minorée par une constante strictement positive. Comme la période ε est destinée à tendre vers 0 , il est nécessaire de mettre à l'échelle correspondante le libre parcours moyen des neutrons, qui doit rester aussi de l'ordre de ε . On considère donc le problème critique suivant : trouver la plus petite valeur propre $\lambda_\varepsilon = 1/k_{\text{eff}}$ et le vecteur propre positif associé $\phi^\varepsilon(x, v)$ de l'équation :

$$(3) \quad \begin{cases} v \cdot \nabla \phi^\varepsilon + \Sigma^\varepsilon(x, v) \phi^\varepsilon = \int_V f^\varepsilon(x, v', v) \phi^\varepsilon(x, v') dv' + \lambda_\varepsilon \int_V \sigma^\varepsilon(x, v', v) \phi^\varepsilon(x, v') dv' & \text{dans } \Omega \times V, \\ \phi^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_- = \{(x, v) \in \partial\Omega \times V \mid v \cdot n(x) < 0\}. \end{cases}$$

Lorsque ε est fixe, il existe des méthodes classiques pour analyser (3) (voir, par exemple, [7] et [14]). On peut ainsi montrer (voir [3]) qu'il existe au plus un nombre dénombrable de valeurs propres positives $(\lambda_\varepsilon^k)_{k \geq 1}$, et qu'il existe une plus petite valeur propre qui est simple et dont le vecteur propre associé est le seul qui peut être choisi positif dans Ω . Au problème (3) dans Ω , on peut associer la même équation, dite *en milieu infini*, c'est-à-dire posée dans la cellule de périodicité Y :

$$(4) \quad \begin{cases} v \cdot \nabla_y \psi + \Sigma(y, v) \psi = \int_V f(y, v', v) \psi(y, v') dv' + \lambda_\infty \int_V \sigma(y, v', v) \psi(y, v') dv' & \text{dans } Y \times V, \\ y \longmapsto \psi(y, v) & Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

Comme pour (3), on sait que (4) possède une plus petite valeur propre λ_∞ qui est simple et pour laquelle le vecteur propre associé $\psi(y, v)$ est positif. Plus précisément, on peut montrer que $\psi \in L^\infty(Y \times V)$ et que ψ est minorée dans $Y \times V$ par une constante strictement positive.

Les résultats que nous allons démontrer ne sont valables que lorsque le domaine Ω est exactement périodique (hypothèse (2)). Il s'agit donc d'une modélisation en première approximation d'un vrai cœur nucléaire (pour plus de détails, voir [3], [6] et [12]).

3. Principaux résultats

Pour homogénéiser l'équation (3), on effectue un changement d'inconnue. Comme $\psi^\varepsilon(x, v) = \psi(x/\varepsilon, v)$ est strictement positif, on peut définir $u^\varepsilon(x, v)$ par la relation $u^\varepsilon = \phi^\varepsilon / \psi^\varepsilon$, et en injectant cette relation dans (3), on obtient l'équation suivante :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} v \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} Q_\varepsilon(u^\varepsilon) = \nu^\varepsilon F_\varepsilon(u^\varepsilon) & \text{dans } \Omega \times V, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_-, \end{cases}$$

avec la nouvelle valeur propre définie par $\nu^\varepsilon = \varepsilon^{-2}(\lambda_\varepsilon - \lambda_\infty)$ et les opérateurs linéaires de collision Q_ε et de fission F_ε définis par :

$$(6) \quad \begin{cases} Q_\varepsilon(u) = \frac{u}{\psi^\varepsilon} \int_V \sigma_\infty^\varepsilon(x, v', v) \psi^\varepsilon(x, v') dv' - \frac{1}{\psi^\varepsilon} \int_V \sigma_\infty^\varepsilon(x, v', v) \psi^\varepsilon(x, v') u(x, v') dv', \\ F_\varepsilon(u) = \frac{1}{\psi^\varepsilon} \int_V \sigma(x, v', v) \psi^\varepsilon(x, v') u(x, v') dv'. \end{cases}$$

où $\sigma_\infty^\varepsilon = f^\varepsilon + \lambda_\infty \sigma^\varepsilon$. L'analyse asymptotique spectrale de (6) est effectuée en introduisant l'opérateur S_ε , agissant dans $L^2(\Omega \times V)$, défini pour tout $q(x, v) \in L^2(\Omega \times V)$ par $S_\varepsilon q = u^\varepsilon$, solution de :

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} v \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} Q_\varepsilon(u^\varepsilon) = F_\varepsilon(q) \text{ dans } \Omega \times V, \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-. \end{cases}$$

Il est facile de voir que (7) admet une unique solution dans $L^2(\Omega \times V)$ et que les valeurs propres ν_ε de (5) sont exactement les inverses des valeurs propres de S_ε (avec les mêmes vecteurs propres). La convergence du spectre de S_ε , et donc de (6), est clairement liée à l'homogénéisation de (7). Pour définir le problème homogénéisé, on a besoin d'introduire l'équation adjointe de (4). Soient λ_∞ la plus petite valeur propre (la même que celle de (4)) et $\psi^*(y, v)$ le vecteur propre strictement positif associé, solution de :

$$(8) \quad \begin{cases} -v \cdot \nabla_y \psi^* + \Sigma \psi^* = \int_V f(y, v, v') \psi^*(y, v') dv' + \lambda_\infty \int_V \sigma(y, v, v') \psi^*(y, v') dv' \text{ dans } Y \times V, \\ y \mapsto \psi^*(y, v) \text{ Y-périodique.} \end{cases}$$

THÉORÈME 3.1. – Si les solutions ψ de (4) et ψ^* de (8) vérifient

$$(9) \quad \int_Y \int_V v \psi(y, v) \psi^*(y, v) dy dv = 0,$$

alors la suite de solutions $u^\varepsilon(x, v)$ de (7) converge fortement dans $L^2(\Omega \times V)$ vers la solution unique $u(x)$ dans $H_0^1(\Omega)$ du problème de diffusion

$$(10) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot D \nabla u(x) = \tilde{q}(x) \text{ dans } \Omega, \\ u(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\tilde{q} \in L^2(\Omega)$ est défini par $\tilde{q}(x) = \int_Y \int_V \psi^*(y, v') \int_V \sigma(y, v', v) \psi(y, v) q(y, v) dv dy dv'$, $D = (D_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ est une matrice définie positive constante, donnée par :

$$(11) \quad D_{ij} = \int_Y \int_V v_j \psi(y, v) \psi^*(y, v) \theta^i(y, v) dv dy,$$

et les fonctions $(\theta^i)_{1 \leq i \leq N}$ sont solutions de l'équation

$$(12) \quad \begin{cases} v \cdot \nabla_y \theta^i + Q(\theta^i) = -v_i \text{ dans } Y \times V, \\ y \mapsto \theta^i(y, v) \text{ Y-périodique,} \end{cases}$$

avec Q défini par $Q(\theta) = \frac{\theta}{\psi} \int_V \sigma_\infty \psi dv' - \frac{1}{\psi} \int_V \sigma_\infty \psi \theta dv'$. Si l'hypothèse (9) n'est pas satisfaite, alors la suite $u^\varepsilon(x, v)$ converge fortement vers 0 dans $L^2(\Omega \times V)$.

L'hypothèse (9) peut être interprétée comme une condition de symétrie dans l'espace des phases. Elle est automatiquement vérifiée si les sections efficaces ne dépendent pas de v , ou bien si la cellule Y est symétrique par rapport aux hyperplans parallèles à ses bords et passant en son centre. Lorsque (9) n'est pas vérifiée, il se produit un phénomène de dérive neutronique qui a été remarqué par Larsen et Williams (voir [11]) en dimension 1. Dans ce cas, nous suspectons que le problème limite est un problème du type couche limite (voir [4]), c'est-à-dire que le flux neutronique se concentre au voisinage d'une partie de la frontière $\partial\Omega$. La formule (11) est une variante de la formule, dite de Benoist, du coefficient de diffusion d'un réseau périodique hétérogène (voir [5]).

On se place désormais dans le cas où l'hypothèse (9) est satisfaite. On déduit du théorème 3.1 que la suite d'opérateurs S_ε converge fortement dans $L^2(\Omega \times V)$ vers un opérateur limite S qui à $q \in L^2(\Omega \times V)$ associe la solution u de (10). On peut en fait montrer que S_ε converge compactement vers S , au sens où $S_\varepsilon q_\varepsilon$ est relativement compacte pour toute suite bornée q_ε de $L^2(\Omega \times V)$. On en déduit classiquement la convergence du spectre de S_ε vers celui de S et le théorème principal suivant.

THÉORÈME 3.2. – Soit λ_ε^k la k -ième valeur propre de (3), et soit ϕ_k^ε un vecteur propre normalisé associé. Alors, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lambda_\varepsilon^k - \lambda_\infty^k) / \varepsilon^2 = \nu^k$, et, à une sous-suite près (à cause de la possible multiplicité de ν^k), $\phi_k^\varepsilon / \psi^\varepsilon$ converge fortement dans $L^2(\Omega \times V)$ vers u^k , vecteur propre associé à ν^k la k -ième valeur propre de :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot D\nabla u^k(x) = \nu^k \bar{\sigma} u^k(x) & \text{dans } \Omega, \\ u^k(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(13) \quad \bar{\sigma} = \int_Y \int_V \int_V \sigma(y, v', v) \psi^*(y, v') \psi(y, v) dy dv dv'.$$

4. Convergence du procédé d'homogénéisation

Nous indiquons brièvement comment se démontre le théorème 3.1 à l'aide de la méthode de convergence à deux échelles (voir [1], et aussi [3]). Le point de départ est une estimation d'énergie a priori pour l'équation (7). Elle s'obtient en multipliant (7) par $\psi^\varepsilon \psi^{*\varepsilon} u^\varepsilon$, en intégrant par parties et en utilisant le fait que ψ^ε et $\psi^{*\varepsilon}$ sont solutions respectives des équations (4) et (8) mises convenablement à l'échelle.

LEMME 4.1. – La solution unique u^ε de (7) satisfait

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times V)} + \|v \cdot \nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times V)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_{+, |v \cdot n|})} + \frac{1}{\varepsilon} \|u^\varepsilon - \int_V u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times V)} \leq C \|q\|_{L^2(\Omega \times V)},$$

où C est une constante indépendante de ε et de q .

On en déduit les résultats de convergence à deux échelles suivants :

LEMME 4.2. – Soit une suite u^ε de $L^2(\Omega \times V)$ vérifiant l'estimation a priori du lemme 4.1 et telle que $u^\varepsilon = 0$ sur Γ_- . Il existe une sous-suite et des limites $\tilde{u}_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ et $u_1(x, y, v) \in L^2(\Omega \times Y \times V)$ (avec u_1 Y -périodique et $v \cdot \nabla_y u_1 \in L^2(\Omega \times Y \times V)$) telles que : (i) $u^\varepsilon(x, v)$ converge fortement vers $u_0(x)$ dans $L^2(\Omega \times V)$; (ii) $v \cdot \nabla u^\varepsilon(x, v)$ converge à deux échelles vers $v \cdot \nabla_x u_0(x) + v \cdot \nabla_y u_1(x, y, v)$; (iii) $\varepsilon^{-1} \left(u^\varepsilon - \int_V u^\varepsilon dv \right)$ converge à deux échelles vers $u_1(x, y, v) - \int_V u_1(x, y, v) dv$.

Pour démontrer le théorème 3.1, on multiplie dans un premier temps l'équation (7) par $\varepsilon\varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, v\right)$, avec $\varphi(x, y, v)$ une fonction test régulière Y -périodique en y . Grâce au lemme 4.2, on obtient que u_0 et u_1 sont reliés par l'équation

$$(14) \quad v \cdot \nabla_y u_1 + Q(u_1) = -v \cdot \nabla_x u_0 \text{ dans } Y \times V.$$

On peut montrer que (14) n'admet une solution $u_1 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)\theta^i(y, v)$ que si la condition (9) est satisfaite. Sinon, on en déduit que $u_0(x) = 0$. Dans un deuxième temps on multiplie l'équation (9) par $\psi^\varepsilon \psi^{*\varepsilon} \varphi_\varepsilon$, où φ_ε est une fonction test régulière qui a la même structure, mais adjointe, que la limite à deux échelles de u^ε . Autrement dit, on pose $\varphi_\varepsilon(x, v) = \varphi(x) + \varepsilon\varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, v\right)$ avec $\varphi_1(x, y, v) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\theta^{i*}(y, v)$, où θ^{i*} est la solution de l'équation adjointe de (12). Quelques manipulations algébriques permettent alors de passer à la limite à deux échelles pour obtenir l'équation homogénéisée (10).

Note remise le 12 septembre 1997, acceptée le 15 septembre 1997.

Références bibliographiques

- [1] Allaire G., 1992. Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.* 23, (6), p. 1482-1518.
- [2] Allaire G. et Malige F., 1997. Analyse asymptotique spectrale d'un problème de diffusion neutronique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, t. 324, p. 939-944.
- [3] Bal G., 1997. Couplage d'équations et homogénéisation en transport neutronique, *Thèse de Doctorat* de l'Université Paris 6.
- [4] Bensoussan A., Lions J.-L. et Papanicolaou G., 1979. Boundary layers and homogenization of transport processes. *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 15, p. 53-157.
- [5] Benoist P., 1964. Théorie du coefficient de diffusion des neutrons dans un réseau comportant des cavités, *Note CEA-R 2278*.
- [6] Capdeboscq Y., en préparation.
- [7] Dautray R. et Lions J.-L., 1985. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Tomes 2 et 3, Masson, Paris.
- [8] Deniz V., 1986. The theory of neutron leakage in reactor lattices, in *Handbook of nuclear reactor calculations*, Y. Ronen ed., vol. II, p. 409-508.
- [9] Larsen E. W., 1975. Neutron transport and diffusion in inhomogeneous media. I, *J. Math. Phys.*, 16, p. 1421-1427.
- [10] Larsen E. W., 1976. Neutron transport and diffusion in inhomogeneous media. II, *Nucl. Sci. Eng.*, 60, p. 357-368.
- [11] Larsen E. W. et Williams M., 1978. Neutron drift in heterogeneous media, *Nucl. Sci. Eng.*, 65, p. 290-302.
- [12] Malige F., 1996. Étude mathématique et numérique de l'homogénéisation des assemblages combustibles d'un cœur de réacteur nucléaire, *Thèse de Doctorat* de l'École Polytechnique.
- [13] Malige F. et Vaudescal J.-L. An asymptotic analysis for the systematic homogenization of PWR assemblies. The diffusion case, à paraître.
- [14] Mokhtar-Kharroubi M., 1987. Les équations de la neutronique, *Thèse de doctorat d'état*, Université Paris XIII.
- [15] Planchard J., 1995. Méthodes mathématiques en neutronique, *Collection de la Direction des Études et Recherches d'EDF*, Eyrolles.
- [16] Reuss P. et Bussac J., 1978. *Traité de neutronique*, Hermann, Paris.
- [17] Sentis R., 1985. Study of the corrector of the eigenvalue of a transport operator, *S.I.A.M. J. Math. Anal.* 16, p.151-166.