C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 939-944, 1997
Physique mathématique/*Mathematical Physics*

Analyse asymptotique spectrale d'un problème de diffusion neutronique

Grégoire ALLAIRE et François MALIGE

G. A. : CEA Saclay, DRN/DMT/SERMA, 91191 Gif-sur-Yvette, France
et LAN, Université Paris-VI, 75232 Paris, France.

F. M. : E.D.F./D.E.R./PhR, 1 Av. Du Gal De Gaulle, 92141 Clamart, France
et CMAP, École Polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, France.

Résumé. On étudie l'homogénéisation d'un problème aux valeurs propres de diffusion neutronique dans un domaine hétérogène périodique. En utilisant un modèle avec une mise à l'échelle adéquate des coefficients (respectant la physique du problème), on prouve un théorème de convergence qui justifie la méthodologie physique utilisée pour les calculs de cœur de réacteurs nucléaires. On indique enfin quelques généralisations possibles.

Spectral asymptotic analysis of a neutronic diffusion problem

Abstract. *We study the homogenization of an eigenvalue problem for neutronic diffusion in a periodic heterogeneous domain. Using a model with an* ad hoc *scaling of the coefficients (preserving physical intrinsic properties), we prove a convergence theorem justifying the method used in computations for cores of nuclear reactors. Finally, we indicate some possible generalizations.*

Abridged English Version

A popular model in reactor physics for obtaining the neutronic flux in a nuclear reactor core is the so-called one-energy-group diffusion equation (1). It is an eigenvalue problem posed in a very heterogeneous domain, composed of more than 40 000 different fuel rods. To speed up industrial computations, an averaging process is used. The engineering procedure is the following: the exact flux φ is decomposed into the product ψu of two terms, where ψ is a rapidly varying flux computed in a collection of subdomains (*see* equation (3)), and u is a slowly varying flux computed on the whole domain using homogeneous averaged coefficients (*see* formula (4)). The aim of this Note is to justify this methodology of flux factorization and to derive better averaging formulae for the homogenized coefficients.

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

Let Ω be a bounded domain, $Y = [0;1]^d$ the unit periodicity cell, and ϵ the period in the nuclear reactor core Ω. We study the limit, as ϵ tends to 0, of the following equation

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \mathrm{div}\left(D\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla\phi^\epsilon\right)+\Sigma\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\phi^\epsilon = \mu^\epsilon \sigma\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\phi^\epsilon & \text{in } \Omega, \\ \phi^\epsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where μ^ϵ is the smallest eigenvalue, and $D(y)$, $\Sigma(y)$, and $\sigma(y)$ are positive Y-periodic functions in $L^\infty(Y)$. The ϵ^2 scaling of the diffusion is based on the physical observation that the migration length $L^\epsilon(x) = \epsilon L(\frac{x}{\epsilon})$, with $L(y) = \sqrt{D(y)/\Sigma(y)}$, must stay of the order of the period size ϵ (corresponding to a fuel assembly in a nuclear reactor core). For more details, we refer to [9] (*see* also [6] where this model has been independently proposed).

For each value of ϵ, this problem admits a collection of eigenvalues $0 < \mu_1^\epsilon < \mu_2^\epsilon \leq \mu_3^\epsilon \leq \cdots \leq +\infty$. Denoting by $(\phi_l^\epsilon)_{l\geq 1}$ the corresponding normalized eigenvectors, we prove the following convergence theorem as ϵ goes to 0.

THEOREM. – *Let μ_∞ be the smallest eigenvalue and $\psi(y)$ an associated eigenvector for the cell problem* (6). *For any fixed integer $l \geq 1$, the eigenvalue μ_l^ϵ and the eigenvector ϕ_l^ϵ satisfy*

$$\phi_l^\epsilon(x) = u_l^\epsilon(x)\psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad \textit{and} \quad \mu_l^\epsilon = \mu_\infty + \epsilon^2\nu_l + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

where, up to a subsequence, u_l^ϵ converges weakly in $H_0^1(\Omega)$ to u_l, an eigenvector associated to the l-th eigenvalue ν_l of the homogenized problem (7).

This result justifies the engineering procedure of the flux factorization, and gives more accurate averaging formulae for the homogenized coefficients (as shown by the numerical computations in [9]). It can be generalized, at least formally, to the so-called two-energy-group diffusion problem and to the neutronic transport equation. In the latter case, it provides a justification of the well-known Benoist formulas for the effective diffusion in a periodic nuclear reactor core (*see* [3], and also [5], [8], and [13]).

1. Introduction

Les calculs de conception et de sûreté des centrales nucléaires nécessitent la détermination précise de la puissance émise en chaque point du cœur du réacteur. On est amené à résoudre un problème de diffusion aux valeurs propres vérifié par le flux neutronique, noté $\varphi(\tilde{x})$, qui s'écrit, lorsque l'on ne considère qu'un seul groupe d'énergie,

$$(1) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}(D(\tilde{x})\nabla\varphi) + \Sigma(\tilde{x})\varphi = \mu\sigma(\tilde{x})\varphi & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}, \end{cases}$$

où μ est la plus petite valeur propre de ce problème et $\tilde{\Omega}$ est un domaine plan représentant une section droite du cœur. Même en dimension deux, le calcul détaillé de $\varphi(\tilde{x})$ s'avère numériquement très coûteux car les coefficients (positifs) de l'équation, $D(\tilde{x})$ (la constante de diffusion), $\Sigma(\tilde{x})$ (la section efficace d'absorption), et $\sigma(\tilde{x})$ (la section efficace de fission), sont très hétérogènes (un cœur de réacteur est formé de quelques 40 000 crayons combustibles différents). Que ce soit à partir de la théorie du transport ou de celle de la diffusion, la méthodologie physique consiste alors à simplifier le problème en factorisant le flux fin en deux parties (*voir* [3], [5], [8] et [10]) :

$$\varphi(\tilde{x}) = \psi(\tilde{x})u(\tilde{x}), \tag{2}$$

où $u(\tilde{x})$ représente les variations lentes ou macroscopiques du flux, et $\psi(\tilde{x})$ les variations rapides ou microscopiques. La fonction $\psi(\tilde{x})$ est déterminée sur des sous-domaines (Ω_k) du cœur (typiquement, les assemblages combustibles) par résolution, en $\psi_k = \psi_{|\Omega_k}$, du problème suivant (dit en milieu infini) :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(D(\tilde{x})\nabla\psi_k) + \Sigma(\tilde{x})\psi_k = \mu_k\sigma(\tilde{x})\psi_k & \text{dans } \Omega_k, \\ \dfrac{\partial\psi_k}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_k, \end{cases} \tag{3}$$

où μ_k est la plus petite valeur propre de ce problème. La fonction $u(\tilde{x})$ est alors supposée vérifier la même équation que (1) mais avec des coefficients $\overline{D}(\tilde{x})$, $\overline{\Sigma}(\tilde{x})$ et $\overline{\sigma}(\tilde{x})$ constants sur chaque Ω_k, obtenus par les formules (heuristiques) de pondération suivantes :

$$\overline{D} = \frac{\left(\frac{1}{|\Omega_k|}\int_{\Omega_k}\psi_k(\tilde{x})d\tilde{x}\right)^2}{\frac{1}{|\Omega_k|}\int_{\Omega_k}\frac{\psi_k(\tilde{x})}{D(\tilde{x})}d\tilde{x}}, \overline{\Sigma} = \frac{1}{|\Omega_k|}\int_{\Omega_k}\Sigma(\tilde{x})\psi_k(\tilde{x})d\tilde{x}, \overline{\sigma} = \frac{1}{|\Omega_k|}\int_{\Omega_k}\sigma(\tilde{x})\psi_k(\tilde{x})d\tilde{x}. \tag{4}$$

Après avoir déterminé $u(\tilde{x})$ et la plus petite valeur propre associée, on reconstruit le flux fin $\varphi(\tilde{x})$ par l'intermédiaire de (2). Cette méthode donne numériquement de très bons résultats tant sur l'approximation du flux fin $\varphi(\tilde{x})$ que sur celle de la plus petite valeur propre μ, du moins lorsque les données ne varient pas trop d'un sous-domaine à l'autre. Le but de cette Note est de justifier cette méthodologie physique et de trouver des formules plus précises de pondération des coefficients dans le cas d'un cœur à structure périodique.

2. Principaux résultats

Afin de justifier rigoureusement la factorisation du flux (2), nous étudions l'homogénéisation du problème (1) dans un milieu périodique avec une mise à l'échelle adéquate des coefficients. Soit Ω un ouvert borné de taille fixe. On note $Y = [0;1]^d$ la cellule de périodicité (qui correspond à un assemblage combustible) et ϵ la taille de la période dans le cœur Ω. On étudie la limite, lorsque ϵ tend vers 0, du problème suivant :

$$\begin{cases} -\epsilon^2\operatorname{div}\left(D\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\nabla\phi^\epsilon\right) + \Sigma\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\phi^\epsilon = \mu^\epsilon\sigma\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\phi^\epsilon & \text{dans } \Omega, \\ \phi^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

où μ^ϵ est la plus petite valeur propre et $D(y)$, $\Sigma(y)$ et $\sigma(y)$ sont des fonctions strictement positives Y-périodiques de $L^\infty(Y)$.

L'ordre de grandeur ϵ^2 de la diffusion dans (5) se justifie en affirmant que, physiquement, la taille des assemblages reste fixe de taille 1 mais que leur nombre croît comme ϵ^{-d} (cela permet pour différentes valeurs de ϵ d'utiliser les mêmes valeurs de $D(y)$, $\Sigma(y)$ et $\sigma(y)$ issues des bibliothèques neutroniques relatives à l'assemblage Y). Autrement dit, le cœur du réacteur est un domaine $\tilde{\Omega} = \epsilon^{-1}\Omega$, et on passe de (1) à (5) par le changement de variable $\tilde{x} = \epsilon^{-1}x$. Une caractéristique essentielle de ce modèle est la conservation physique de la longueur de migration des neutrons (*voir* [11]). En effet, cette longueur de migration $L(y) = \sqrt{D(y)/\Sigma(y)}$ est de l'ordre de 1 sur la cellule unité Y, et vaut $L^\epsilon(x) = \epsilon L(\frac{x}{\epsilon})$, qui est de l'ordre de ϵ, sur chaque période de taille caractéristique ϵ dans Ω. Pour plus de détails sur ce problème de mise à l'échelle, nous renvoyons à [9] (le modèle (5) a aussi été proposé indépendamment dans [6]).

Il est bien connu que, pour ϵ fixé, le problème (5) admet une infinité dénombrable de valeurs propres ordonnées $0 < \mu_1^\epsilon < \mu_2^\epsilon \leq \mu_3^\epsilon \leq \cdots \leq +\infty$. On note $(\phi_l^\epsilon)_{l\geq 1}$ des vecteurs propres normalisés associés. On démontre alors un théorème de convergence lorsque ϵ tend vers 0.

THÉORÈME. – *Soient μ_∞ la plus petite valeur propre et $\psi(y)$ un vecteur propre normalisé correspondant pour le problème*

$$(6) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}(D(y)\nabla\psi) + \Sigma(y)\psi = \mu_\infty\sigma(y)\psi & \textit{dans } Y. \\ y \to \psi(y) \quad Y\textit{-périodique}. \end{cases}$$

Pour tout entier $l \geq 1$ fixé, la valeur propre μ_l^ϵ et le vecteur propre ϕ_l^ϵ de (5) vérifient

$$\phi_l^\epsilon(x) = u_l^\epsilon(x)\psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad \textit{et} \quad \mu_l^\epsilon = \mu_\infty + \epsilon^2\nu_l + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

où, à une sous-suite près, la suite u_l^ϵ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers u_l qui est un vecteur propre associé à la l-ième valeur propre ν_l du problème homogénéisé suivant :

$$(7) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}(\overline{D}\nabla u) = \nu\,\overline{\sigma}u & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

dont les coefficients sont donnés par :

$$(8) \qquad \overline{D}_{ij} = \frac{1}{|Y|}\int_Y D(y)\psi^2(y)\left(\delta_{ij} - \frac{\partial\theta^j}{\partial y_i}(y)\right)dy \quad \textit{et} \quad \overline{\sigma} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \sigma(y)\psi^2(y)dy,$$

les fonctions $(\theta^j)_{1\leq j\leq d}$ étant définies par :

$$(9) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}\big(D(y)\psi^2(y)\big(\nabla\theta^j + e_j\big)\big) = 0 & \textit{dans } Y. \\ y \to \theta^j(y) \quad Y\textit{-périodique.} \end{cases}$$

Afin de comparer la méthodologie physique et l'homogénéisation ci-dessus, il est nécessaire de revenir sur le domaine $\tilde{\Omega} = \epsilon^{-1}\Omega$ par le changement de variable $\tilde{x} = \epsilon^{-1}x$ dans (7). En posant $U(\tilde{x}) = u(\epsilon\tilde{x})$, le problème (7) devient :

$$(10) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}\big(\overline{D}\nabla U\big) + \overline{\Sigma}U = (\mu_\infty + \epsilon^2\nu)\overline{\sigma}U & \text{dans } \tilde{\Omega}. \\ U = 0 & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}. \end{cases}$$

où, grâce à (6), la constante $\overline{\Sigma}$ est définie par :

$$(11) \qquad \overline{\Sigma} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \Sigma(y)\psi^2(y)dy + \frac{1}{|Y|}\int_Y D(y)\nabla\psi(y)\cdot\nabla\psi(y)dy.$$

Lorsque l'on calcule la plus petite valeur propre du problème (10), on obtient une valeur propre $\mu = \mu_\infty + \epsilon^2\nu_1$ telle que $\mu - \mu_1^\epsilon = \mathcal{O}(\epsilon^3)$. En pratique, Ω étant constitué uniquement de cellules périodiques entières, grâce à un résultat de [12], on a en fait :

$$\mu_1^\epsilon = \mu + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

De plus, un résultat standard de correcteur pour le problème (7) transposé au domaine $\tilde{\Omega}$ indique que

$$\varphi_1^\epsilon(\tilde{x}) = \psi(\tilde{x})\left[U(\tilde{x}) - \sum_{j=1}^{d} \theta^j(\tilde{x})\frac{\partial U}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x})\right] + o(1). \tag{12}$$

Ce résultat justifie en grande partie la méthodologie physique. La différence essentielle réside dans la comparaison des formules (4) et (8-11) donnant l'expression des paramètres homogènes de l'équation (10). Remarquons tout d'abord que, lorsque les coefficients $D(y)$, $\Sigma(y)$ et $\sigma(y)$ ont les symétries du cube dans Y, alors les conditions aux limites de périodicité sont équivalentes à des conditions aux limites de Neumann et les problèmes (3) et (6) sont équivalents. Dans [9], des comparaisons numériques sont présentées. Les formules (8-11) sont meilleures dans le cas d'une très forte hétérogénéité. Cependant, lorsque le flux microscopique $\psi(y)$ varie peu par rapport à sa moyenne, il est aussi montré dans [9] que les formules (4) et (8-11) coïncident au deuxième ordre par rapport aux variations de $\psi(y)$.

3. Démonstration du théorème

Chaque valeur propre du problème (5) est caractérisée par la formule du min-max

$$\mu_l^\epsilon = \min_{\substack{W_l \subset H_0^1(\Omega)\\ \dim W_l = l}} \max_{\substack{\phi \in W_l\\ \phi \neq 0}} \frac{\epsilon^2 \int_\Omega D(\frac{x}{\epsilon})|\nabla\phi|^2 dx + \int_\Omega \Sigma(\frac{x}{\epsilon})\phi^2 dx}{\int_\Omega \sigma(\frac{x}{\epsilon})\phi^2 dx}.$$

On pose $\psi^\epsilon(x) = \psi(\frac{x}{\epsilon})$, où $\psi(y)$ est un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre μ_∞ du problème (6). On sait que ψ est le seul vecteur propre à ne jamais s'annuler sur Y (*voir* [4]), et comme $\psi \in C^{0,\beta}(\overline{Y})$ $(0 < \beta < 1)$, on peut le choisir strictement positif. Suivant une idée de [14], on fait le changement de variable suivant :

$$w(x) \equiv \frac{\phi(x)}{\psi^\epsilon(x)}. \tag{13}$$

Un calcul simple montre alors que

$$\mu_l^\epsilon = \mu_\infty + \epsilon^2 \min_{\substack{W_l \subset H_0^1(\Omega)\\ \dim W_l = l}} \max_{\substack{w \in W_l\\ w \neq 0}} R^\epsilon(w) \qquad \text{avec} \qquad R^\epsilon(w) = \frac{\int_\Omega D(\frac{x}{\epsilon})\psi^2(\frac{x}{\epsilon})|\nabla w|^2 dx}{\int_\Omega \sigma(\frac{x}{\epsilon})\psi^2(\frac{x}{\epsilon})w^2 dx}.$$

où $R^\epsilon(w)$ est le quotient de Rayleigh d'un problème elliptique à coefficients périodiques

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(D\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\psi^2\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\nabla u^\epsilon\right) = \nu^\epsilon \sigma\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\psi^2\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)u^\epsilon & \text{dans } \Omega, \\ u^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{14}$$

L'homogénéisation du problème (14) est standard (*voir*, par exemple, [7]) : si on note ν_l^ϵ ses valeurs propres ordonnées, et u_l^ϵ des vecteurs propres associés, alors chaque ν_l^ϵ converge vers ν_l, valeur propre du problème homogénéisé (7), et les vecteurs propres associés u_l^ϵ convergent faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ (à une sous-suite près à cause des problèmes de multiplicité des valeurs propres) vers des vecteurs propres u_l associés à ν_l. Cela termine la démonstration du théorème.

Remarque 1. – Le théorème ci-dessus est valable même quand les sections efficaces $\Sigma(y)$ et $\sigma(y)$ s'annulent sur une partie de la cellule Y. Quand les sections $\Sigma(y)$ et $\sigma(y)$ sont proportionnelles, le résultat est trivial car $\mu_\infty = 1$ et $\psi(y) \equiv 1$. On ne sait rien dire lorsque les coefficients D, Σ et σ dépendent, non seulement de la variable périodique y, mais aussi de la variable macroscopique x.

Remarque 2. – Les vecteurs propres φ_l^ϵ ne convergent que faiblement dans $L^2(\Omega)$. La notion adéquate de convergence pour ces vecteurs propres est la convergence à deux échelles (*voir* [1]). En particulier, on a montré que φ_l^ϵ et $\epsilon\nabla\varphi_l^\epsilon$ convergent à deux échelles respectivement vers $u_l(x)\psi(y)$ et $u_l(x)\nabla_y\psi(y)$. Comme dans [2], on remarque que le spectre du problème (5) se densifie autour de la valeur μ_∞.

Remarque 3. – Le théorème ci-dessus se généralise, au moins formellement, au problème de la diffusion neutronique à deux groupes d'énergie :

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \mathrm{div}(D_1\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla\phi_1^\epsilon) + \Sigma_1\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\phi_1^\epsilon = \lambda^\epsilon\left(\sigma_1\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\phi_1^\epsilon + \sigma_2\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\phi_2^\epsilon\right) & \text{dans } \Omega, \\ -\epsilon^2 \mathrm{div}(D_2\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla\phi_2^\epsilon) + \Sigma_2\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\phi_2^\epsilon = \Sigma_R\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\phi_1^\epsilon & \text{dans } \Omega, \\ \phi_1^\epsilon = \phi_2^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les flux ϕ_1^ϵ et ϕ_2^ϵ se factorisent avec un seul et même flux macroscopique. Le problème homogénéisé est donc une équation de diffusion à un seul groupe d'énergie (*voir* [9]).

Remarque 4. – Enfin, la méthode présentée ici s'adapte aussi à l'homogénéisation d'un problème aux valeurs propres pour l'équation du transport neutronique en milieu hétérogène périodique. L'originalité de ce cas provient du fait que le flux neutronique fin se factorise en un flux microscopique, solution d'une équation de transport, et un flux macroscopique, solution d'une équation de diffusion. Cela justifie partiellement les formules, dites de Benoist (*voir* [3] et aussi [5], [8] et [13]), d'un usage très répandu en physique des réacteurs nucléaires. Ce dernier point fera l'objet d'une prochaine Note.

Note remise le 20 décembre 1996, acceptée le 6 janvier 1997.

Références bibliographiques

[1] **Allaire G., 1992**. Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, 23, 6, p. 1482-1518.

[2] **Allaire G. et Conca C., 1995**. Analyse asymptotique spectrale de l'équation des ondes. Homogénéisation par ondes de Bloch, *C.R. Acad. Sci. Paris*, I, 321, p. 293-298.

[3] **Benoist P., 1964**. *Théorie du coefficient de diffusion des neutrons dans un réseau comportant des cavités*, Note CEA-R 2278.

[4] **Dautray R. et Lions J.-L., 1985**. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Tomes 2 et 3, Masson, Paris.

[5] **Deniz V., 1986**. *The theory of neutron leakage in reactor lattices*, in Handbook of nuclear reactor calculations, Y. Ronen ed., vol. II, p. 409-508.

[6] **Dorning J. J., Zhang H. et Uddin R., 1995**. Systematic Homogenization and self-consistent flux and Pin Power Reconstruction for Nodal diffusion - I: Diffusion Equation-Based Theory, *Nucl. Sci. Eng.*, 121, p. 226-244.

[7] **Kesavan S., 1979**. Homogenization of elliptic eigenvalue problems, *Appl. Math. Optim.*, 5 Part I and II, p. 153-167 and p. 197-216.

[8] **Larsen E. W. et Hughes R. P., 1980**. Homogenized diffusion approximations to the neutron transport equation, *Nucl. Sci. Eng.*, 73, p. 274-280.

[9] **Malige F., 1996**. *Étude mathématique et numérique de l'homogénéisation des assemblages combustibles d'un cœur de réacteur nucléaire*, Thèse de Doctorat de l'École polytechnique.

[10] **Planchard J., 1995**. *Méthodes mathématiques en neutronique*, Collection de la Direction des Études et Recherches d'EDF, Eyrolles.

[11] **Reuss P. et Bussac J., 1978**. *Traité de neutronique*, Hermann, Paris.

[12] **Santosa F. et Vogelius M., 1993**. First-order corrections to the homogenized eigenvalues of a periodic composite medium, *SIAM J. Appl. Math.*, 53, p. 1636-1668.

[13] **Sentis R., 1985**. Study of the corrector of the eigenvalue of a transport operator, *SIAM J. Math. Anal.*, 16, p. 151-166.

[14] **Vanninathan M., 1981**. Homogenization of eigenvalue problems in perforated domains, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 90, p. 239-271.