Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Homogénéisation et convergence à deux échelles. Application à un problème de convection diffusion

Grégoire ALLAIRE

Résumé — Suivant une idée de G. Nguetseng, on définit une notion de convergence « à deux échelles ». On donne alors une nouvelle démonstration de la compacité relative, par rapport à cette convergence, d'une suite bornée de $L^2(\Omega)$. On démontre aussi un théorème de correcteur (c'est-à-dire qui permet de remplacer la suite par sa limite « à deux échelles » à une convergence forte près). Ces résultats sont ensuite appliqués à l'homogénéisation d'un problème de convection-diffusion par un champ oscillant en temps.

Homogenization and two-scale convergence. Application to a problem of advection-diffusion

Abstract — *Following an idea of G. Nguetseng, we define a notion of "two-scale" convergence. A new proof of the relative compactness, with respect to this new type of convergence, of bounded sequences in* $L^2(\Omega)$ *is given. We also establish a corrector-type theorem* (i. e. *which permits to replace the sequence by its "two-scale" limit, up to a strong convergence). These results are applied to the homogenization of an advection-diffusion equation where the convecting field is oscillating in time.*

Abridged English Version — Let u_ε be a sequence of functions in $L^2(\Omega)$, where Ω is a bounded set of $\mathbb{R}^N$ $(N \geqq 1)$. Let $Y=(0;1)^N$ be the unit cube. The sequence u_ε is said to *two-scale converge* to a limit $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ if, for any smooth function $\psi(x, y)$, Y-periodic in y, we have

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\, \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_\Omega \int_Y u_0(x, y)\, \psi(x, y)\, dx\, dy.$$

We give a new proof of the following theorem due to G. Nguetseng [10].

THEOREM. — *From each bounded sequence in* $L^2(\Omega)$ *one can extract a subsequence which two-scale converges to a limit* $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$.

Our proof relies upon the representation theorem of Riesz and a lemma which states that smooth functions $\psi(x, y)$, Y-periodic in y, satisfy

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = \int_\Omega \int_Y \psi(x, y)^2\, dx\, dy.$$

It turns out that there is more "information" in the two-scale convergence than in a mere weak convergence in $L^2(\Omega)$, and that a weak continuity of the energy yields a corrector result.

THEOREM. — *Let* u_ε *two-scale converge to* $u_0(x, y)$. *Then* u_ε *converges weakly in* $L^2(\Omega)$ *to* u *defined by* $u(x)=\int_Y u_0(x, y)\, dy$, *and one has*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \geqq \| u_0 \|_{L^2(\Omega \times Y)} \geqq \| u \|_{L^2(\Omega)}.$$

Furthermore if $u_0(x, y)$ *is smooth, then*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} = \| u_0 \|_{L^2(\Omega \times Y)} \quad \textit{implies} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \left\| u_\varepsilon - u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/91/03120581 $ 2.00

In view of these results, the two-scale convergence is an alternative to the so-called energy method of L. Tartar [13] for proving convergence in periodic homogenization. In practice, multiplying the equation by test functions of the type $\psi\,(x, x/\varepsilon)$ and applying the above theorems yields both the local and homogenized equations, and the proof of convergence. This method seems particularly well adapted for homogenization problems where hidden variables appear, together with non-local, or memory, effects (such effects are studied in [3], [5], [8], [12], [14], [15]). The two-scale convergence method is applied to some examples in [11], [7], [1] (similar ideas are developed in [4]).

Here we treat a problem of advection-diffusion where the convecting field is rapidly oscillating in time. Let $v(t, \tau, x)$ be a vector field which is divergence-free in x, and periodic in τ of period 1. For $T>0, v\in L^\infty([0; T]\times[0; 1]\times\Omega)$, $a\in L^2(\Omega)$, and $f\in L^2([0; T]; H^{-1}(\Omega))$ the system

$$\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}+v\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x\right).\nabla u_\varepsilon-\Delta u_\varepsilon=f(t, x) \quad in\ [0; T]\times\Omega$$

$$u_\varepsilon=0 \quad on\ [0; T]\times\partial\Omega$$

$$u_\varepsilon(t=0, x)=a(x)$$

has a unique solution in $L^2([0; T]; H_0^1(\Omega))\cap C([0; T]; L^2(\Omega))$.

THEOREM. — *The sequence of solutions u_ε two-scale converges to*

$$u_0(t, \tau, x)\in L^2([0; T]\times[0; 1]; H_0^1(\Omega))$$

which is the unique solution in

$$L^2([0; 1]; H_0^1(\Omega))\cap C([0; 1]; L^2(\Omega))$$

of

$$\frac{\partial u_0}{\partial\tau}+v(t, \tau, x).\nabla u_0-\Delta u_0=f(t, x) \quad in\ [0; 1]\times\Omega$$

$$u_0=0 \quad on\ [0; 1]\times\partial\Omega$$

$$u_0(t, 0, x)=u_0(t, 1, x).$$

Furthermore, if u_0 is smooth, then

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|u_\varepsilon(t, x)-u_0\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x\right)\right\|_{L^2([0; T]; H_0^1(\Omega))}=0.$$

Remark that in the above problem t is a parameter, and τ is called a hidden variable. If we eliminate τ by integration, we obtain an equation with a non-local term in space [*see* (7)].

I. CONVERGENCE À DEUX ÉCHELLES. — Soit u_ε une suite bornée de fonctions de $L^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N\,(N\geq 1)$. On sait que l'on peut en extraire une sous-suite, toujours notée u_ε, et qu'il existe une fonction u de $L^2(\Omega)$ telle que la sous-suite converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent, pour toute fonction test ψ, appartenant à $D(\Omega)$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\psi(x)\,dx=\int_\Omega u(x)\,\psi(x)\,dx. \tag{1}$$

On cherche à généraliser la limite (1) pour une classe « plus grande » de fonctions tests. Soit $Y=(0; 1)^N$ le cube unité, on note $C_\#^\infty(Y)$ l'espace des fonctions infiniment dérivables dans $\mathbb{R}^N$ et périodiques de période Y, $H^1_\#(Y)$ [resp. $L^2_\#(Y)$] le complété de $C^\infty_\#(Y)$ pour la norme de $H^1(Y)$ [resp. $L^2(Y)$]. On remarque au passage que $L^2_\#(Y)$ s'identifie à l'espace des fonctions de $L^2(Y)$ étendues par Y-périodicité à $\mathbb{R}^N$. Suivant une idée de G. Nguetseng [10], on introduit alors la

DÉFINITION 1. — *Une suite u_ε de $L^2(\Omega)$ converge « à deux échelles » vers une fonction $u_0(x, y)$ de $L^2(\Omega \times Y)$ si, pour toute fonction $\psi(x, y)$ de $D[\Omega; C^\infty_\#(Y)]$ on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\, \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_\Omega \int_Y u_0(x, y)\, \psi(x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

L'intérêt de cette définition réside dans le théorème de « compacité » suivant :

THÉORÈME 2. — *De toute suite u_ε bornée dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite, et il existe une fonction $u_0(x, y)$ dans $L^2(\Omega \times Y)$, telle que cette sous-suite converge « à deux échelles » vers $u_0(x, y)$.*

La démonstration de ce théorème repose sur le

LEMME 3. — *Soit $\psi(x, y)$ une fonction de $L^2[\Omega; C_\#(Y)]$, c'est-à-dire mesurable, de carré sommable, en x à valeurs dans l'espace des fonctions continues, Y-périodiques, en y. On a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = \int_\Omega \int_Y \psi(x, y)^2\, dx\, dy. \tag{3}$$

Le lemme 3 est classique pour des fonctions ψ régulières (*cf.* [6], chapitre 1, section 8). Dans certains cas on peut affaiblir l'hypothèse de régularité sur ψ : par exemple, la convergence (3) a toujours lieu si ψ est de la forme $\psi(x, y) = \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)$ avec $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$ et $\varphi_2 \in L^2_\#(Y)$.

Démonstration du théorème 2. — On considère une famille dénombrable de fonctions de $D[\Omega; C^\infty_\#(Y)]$, dense dans l'espace $L^2(\Omega \times Y)$ (obtenue, par exemple, par produit tensoriel d'une famille sur Ω et d'une autre sur Y). On applique alors le lemme 3 à une fonction $\psi(x, y)$ de cette famille. Pour une sous-suite en ε qui dépend de ψ, on obtient alors

$$\left| \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\, \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right| \leqq C \| \psi \|_{L^2(\Omega \times Y)}. \tag{4}$$

Comme la famille est dénombrable, par un procédé d'extraction diagonale, on construit une sous-suite en ε telle que (4) soit valable pour toute fonction ψ appartenant à cette famille. Puis, par densité dans $L^2(\Omega \times Y)$, il résulte que la limite dans (4), en tant que fonction de ψ, est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega \times Y)$. Identifiant $L^2(\Omega \times Y)$ à son dual, le théorème de représentation de Riesz nous permet d'affirmer l'existence d'une fonction $u_0(x, y)$ qui vérifie (2).

On peut se demander si la convergence à deux échelles permet d'en dire plus que la simple convergence faible dans $L^2(\Omega)$, et plus précisément à quelles conditions on peut en déduire un résultat de correcteur qui permet de remplacer la suite $u_\varepsilon(x)$ par sa limite à deux échelles $u_0(x, x/\varepsilon)$, à une convergence forte dans $L^2(\Omega)$ près. C'est l'objet du

THÉORÈME 4. — *Soit u_ε une suite qui converge à deux échelles vers $u_0(x, y)$. Alors u_ε converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers u, défini par $u(x) = \int_Y u_0(x, y)\, dy$, et on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \geqq \| u_0 \|_{L^2(\Omega \times Y)} \geqq \| u \|_{L^2(\Omega)}.$$

Si de plus u_0 *satisfait aux hypothèses du lemme* 3 *et si on a continuité faible de l'énergie, c'est-à-dire si* $\lim_{\varepsilon \to 0} \| u_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} = \| u_0 \|_{L^2(\Omega \times Y)}$, *alors on a* $\lim_{\varepsilon \to 0} \| u_\varepsilon - u_0(x, x/\varepsilon) \|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Remarque. — Si la suite u_ε converge fortement vers u dans $L^2(\Omega)$, alors on a $u_0(x, y) \equiv u(x)$ (la réciproque est fausse : considérer, par exemple, la suite $u_\varepsilon(x) = \nu(x/\varepsilon^2)$ et ν Y-périodique). Le théorème 2 permet en fait de passer à la limite dans certains produits de convergences faibles : u_ε étant une suite bornée de $L^2(\Omega)$, et ψ une fonction satisfaisant aux hypothèses du lemme 3, pour une sous-suite on a

$$u_\varepsilon(x)\,\psi(x, x/\varepsilon) \rightharpoonup \int_Y u_0(x, y)\,\psi(x, y)\,dy \quad \text{dans } D'(\Omega).$$

A partir du théorème 2 on montre facilement les propositions suivantes qui sont d'un grand intérêt dans les problèmes d'homogénéisation où interviennent deux échelles d'espace.

Proposition 5. — *Si* u_ε *est une suite qui converge faiblement vers une limite* u *dans* $H^1(\Omega)$, *alors il existe* $u_1(x, y) \in L^2[\Omega; H^1_\#(Y)]$ *tel qu'une sous-suite de* ∇u_ε *converge à deux échelles vers* $\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$.

Proposition 6. — *Si* u_ε *et* $\varepsilon \nabla u_\varepsilon$ *sont deux suites bornées de* $L^2(\Omega)$, *alors il existe* $u_0(x, y) \in L^2[\Omega; H^1_\#(Y)]$ *tel que, pour une même sous-suite,* u_ε *et* $\varepsilon \nabla u_\varepsilon$ *convergent à deux échelles respectivement vers* $u_0(x, y)$ *et* $\nabla_y u_0(x, y)$.

Remarque. — Le théorème 2 ainsi que les propositions 5 et 6 sont dues à G. Nguetseng [10]. Néanmoins la démonstration, donnée ici, du théorème 2 est plus courte que celle de [10]. Le théorème 4 est, semble-t-il, original. Les démonstrations complètes seront données dans [1]. Des idées semblables sont développées dans [4].

La notion de convergence à deux échelles est particulièrement bien adaptée à l'homogénéisation d'équations aux dérivées partielles où interviennent deux échelles d'espace. Une approche classique de ce type de problèmes consiste à appliquer successivement la méthode des développements asymptotiques à deux échelles (pour trouver heuristiquement le problème homogénéisé ainsi que le problème local), puis la méthode dite de l'énergie de L. Tartar [13] afin de prouver rigoureusement la convergence. A la suite de G. Nguetseng, on propose la méthode alternative qui consiste à multiplier le problème initial par des fonctions tests du type $\psi(x, x/\varepsilon)$ et, à l'aide des résultats ci-dessus, d'en déduire à la fois les problèmes homogénéisé et local, ainsi que la convergence. De plus le théorème 4 fournit aisément des résultats de correcteurs. Cette méthode de la convergence à deux échelles est mise en œuvre sur des exemples dans [11], [7], [1], ainsi que dans la deuxième section de cette Note. Elle semble être plus facile à utiliser que la méthode de l'énergie dans les cas où problèmes local et homogénéisé sont fortement couplés, et où apparaissent des variables cachées et des phénomènes non locaux ou de mémoire (sur ces sujets *voir* [3], [8], [12], [14], [15]). De même, pour les problèmes d'homogénéisation dans des ouverts perforés, la convergence à deux échelles permet d'éviter l'utilisation d'opérateurs de prolongement (à ce sujet *voir* aussi [2]). Cependant, au contraire de la méthode de l'énergie, la convergence à deux échelles, comme son nom l'indique, est restreinte aux problèmes d'homogénéisation périodique.

II. Un problème de convection-diffusion. — On étudie la diffusion d'un scalaire (par exemple une température) convecté par un champ de vitesse variant très rapidement en temps, dans le cas où l'évolution du système suit l'échelle de temps rapide. On considère le système suivant

$$(5)\qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \nu\left(t, \dfrac{t}{\varepsilon}, x\right) . \nabla u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f(t, x) & dans\ [0; \mathrm{T}] \times \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \quad sur\ [0; \mathrm{T}] \times \partial\Omega \\ u_\varepsilon(t=0, x) = a(x) \end{cases}$$

où la fonction vectorielle $\nu(t, \tau, x)$ est périodique de période 1 en la variable τ, et à divergence nulle en x. Étant donné un temps $\mathrm{T}>0$, si on suppose que $\nu \in \mathrm{L}^\infty([0; \mathrm{T}] \times [0; 1] \times \Omega)$, $a \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, et $f \in \mathrm{L}^2([0; \mathrm{T}]; \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$, il est bien connu qu'il existe une solution unique de (5) dans $\mathrm{L}^2([0; \mathrm{T}]; \mathrm{H}_0^1(\Omega)) \cap \mathrm{C}([0; \mathrm{T}]; \mathrm{L}^2(\Omega))$. Lorsque le paramètre ε tend vers zéro [autrement dit on « moyenne » en temps rapide le système (5)], on démontre le résultat d'homogénéisation suivant :

Proposition 7. — *La suite u_ε des solutions de* (5) *converge à deux échelles vers*

$$u_0(t, \tau, x) \in \mathrm{L}^2([0; \mathrm{T}] \times [0; 1]; \mathrm{H}_0^1(\Omega)),$$

qui est solution unique dans

$$\mathrm{L}^2([0; 1]; \mathrm{H}_0^1(\Omega)) \cap \mathrm{C}([0; 1]; \mathrm{L}^2(\Omega))$$

du système

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial \tau} + \nu(t, \tau, x) . \nabla u_0 - \Delta u_0 = f(t, x) & dans\ [0; 1] \times \Omega \\ u_0 = 0 \quad sur\ [0; 1] \times \partial\Omega \\ u_0(t, 0, x) = u_0(t, 1, x). \end{cases}$$

Étant parti du système (5) où les seules variables sont t et x, on a obtenu un système limite (6) où t n'est plus qu'un paramètre, et une variable « cachée » τ est apparue. On remarque aussi que la condition initiale a été perdue dans le passage à la limite. La suite u_ε des solutions de (5) converge faiblement dans $\mathrm{L}^2([0; \mathrm{T}]; \mathrm{H}_0^1(\Omega))$ vers $u(x) = \int_{\mathrm{Y}} u_0(x, y)\, dy$, qui est solution de

$$(7)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \nu(t, \tau, x) . \nabla u_0(t, \tau, x)\, d\tau - \Delta u = f(t, x) & dans\ [0; \mathrm{T}] \times \Omega \\ u = 0 \quad sur\ [0; \mathrm{T}] \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Le terme intégral dans (7) est, en général, non local en espace. Pour comparer les solutions de (5) et celle de (6) on a la

Proposition 8. — *Si $f \in \mathrm{L}^2([0, \mathrm{T}]; \mathrm{L}^2(\Omega))$, alors la solution $u_0(t, \tau, x)$ de* (6) *est continue en τ à valeurs dans $\mathrm{L}^2([0, \mathrm{T}]; \mathrm{H}_0^1(\Omega))$, et on a la convergence forte*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| u_\varepsilon(t, x) - u_0\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x\right) \right\|_{\mathrm{L}^2([0; \mathrm{T}]; \mathrm{H}_0^1(\Omega))} = 0.$$

Démonstration. — Les résultats de la première section s'adaptent facilement au cas où c'est le temps, et non la variable d'espace, qui a deux échelles de variation. En multipliant l'équation dans (5) par u_ε et en intégrant par parties, on obtient l'estimation *a priori*

$$\| u_\varepsilon \|_{\mathrm{L}^2([0; \mathrm{T}]; \mathrm{H}_0^1(\Omega))} \leqq \mathrm{C}.$$

On en déduit, pour une sous-suite u_ε, l'existence d'une limite à deux échelles $u_0(t, \tau, x) \in \mathrm{L}^2([0; \mathrm{T}] \times [0; 1]; \mathrm{H}_0^1(\Omega))$. Puis on multiplie (5) par une fonction test du type $\varphi(x)\psi(t, t/\varepsilon)$, et, après intégration par parties en temps et en espace, on passe à la limite pour obtenir (6). Enfin il est facile de voir que (6) admet une solution unique dans l'espace $L^2([0; 1]; H_0^1(\Omega)) \cap C([0; 1]; L^2(\Omega))$. La proposition 8 découle du théorème 4 et de la convergence de l'énergie de (5) vers celle de (6).

Remarque. — Le problème (5) est tout à fait semblable à un problème ouvert posé dans le livre [6] (chapitre 2, section 4), ainsi qu'à un problème étudié par F. Murat et L. Tartar ([14], [15]) (dans un cadre général, non périodique) pour lequel l'homogénéisation fait apparaître un terme non local. Des problèmes de convection très proche de (5) ont été étudiés dans [3], [5] et [9].

Note remise le 29 janvier 1991, acceptée le 11 février 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] G. ALLAIRE, en préparation.

[2] G. ALLAIRE et F. MURAT, *Homogenization of the Neuman problem with non-isolated holes* (à paraître).

[3] Y. AMIRAT, K. HAMDACHE et A. ZIANI, Homogénéisation d'équations hyperboliques du premier ordre et application aux écoulements miscibles en milieu poreux, *Ann. Inst. Henri-Poincaré, Analyse non linéaire*, 6, (5), 1989, p. 397-417.

[4] T. ARBOGAST, J. DOUGLAS et U. HORNUNG, Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory, *S.I.A.M. J. Math. Anal.* (soumis).

[5] M. AVELLANEDA et A. MAJDA, Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport, *Comm. Math. Phys.* (à paraître).

[6] A. BENSOUSSAN, J.-L. LIONS et G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, 1978.

[7] W. E, *Homogenization of linear and nonlinear transport equations* (à paraître).

[8] J.-L. LIONS, Homogénéisation non locale, *Proceedings Intem. Meeting on Recent Methods in Non-Linear Analysis*, DE GIORGI et coll. éd., Pitagora, Bologne, 1979, p. 189-203.

[9] D. MCLAUGHLIN, G. PAPANICOLAOU et O. PIRONNEAU, Convection of microstructure and related problems, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, 45, (5), 1985, p. 780-797.

[10] G. NGUETSENG, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *S.I.A.M. J. Math. Anal.*, 20, (3), 1989, p. 608-623.

[11] G. NGUETSENG, Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics, *S.I.A.M. J. Math. Anal.*, 21, (6), 1990, p. 1394-1414.

[12] E. SANCHEZ-PALENCIA, Non homogeneous media and vibration theory, *Lecture notes in physics*, n° 127, Springer-Verlag, 1980.

[13] L. TARTAR, *Cours Peccot au Collège de France*, mars 1977.

[14] L. TARTAR, Non local effects induced by homogenization, *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, Essays in Honor of Ennio De Giorgi*, F. COLOMBINI et coll. éd., Birkhauser, 1989.

[15] L. TARTAR, *Remarks on homogenization. Homogenization and effective moduli of materials and media*, J. L. ERICKSEN et coll. éd., The I.M.A. Volumes in Math. and its Applications, 1, Springer Verlag, 1986.

Centre d'Études nucléaires de Saclay,
L.E.T.R./S.E.R.M.A./D.M.T., Bât. n° 70, 91191 *Gif-sur-Yvette Cedex.*