
Optimisation de structure avec contact unilatéral

Boris Desmorat

LM²S, Université Paris 6

Introduction

- OpenFEM-Scilab :
 - programme d'optimisation modulaire (maillage, CL, lois de comportement, contact, ...)
 - mise en place d'un élément fini de contact
- Optimisation de structure
- Prise en compte de contact unilatéral dans le cadre de l'optimisation
- Algorithme d'optimisation numériquement performant programmé sous Scilab

→ Exemple d'utilisation d'OpenFEM-Scilab

Plan de l'exposé

- Problématique de l'optimisation structurale avec contact unilatéral
- Formulation du problème élastique de référence
- Problème et algorithme d'optimisation
- Mise en oeuvre numérique en OpenFEM-Scilab
- Exemple

▷ Opti. avec contact

Problématique

Opti. topologique

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

Exemple

Optimisation de structure avec contact

Les différentes problématiques

Opti. avec contact

▷ Problématique

Opti. topologique

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

Exemple

Objectif de l'optimisation :

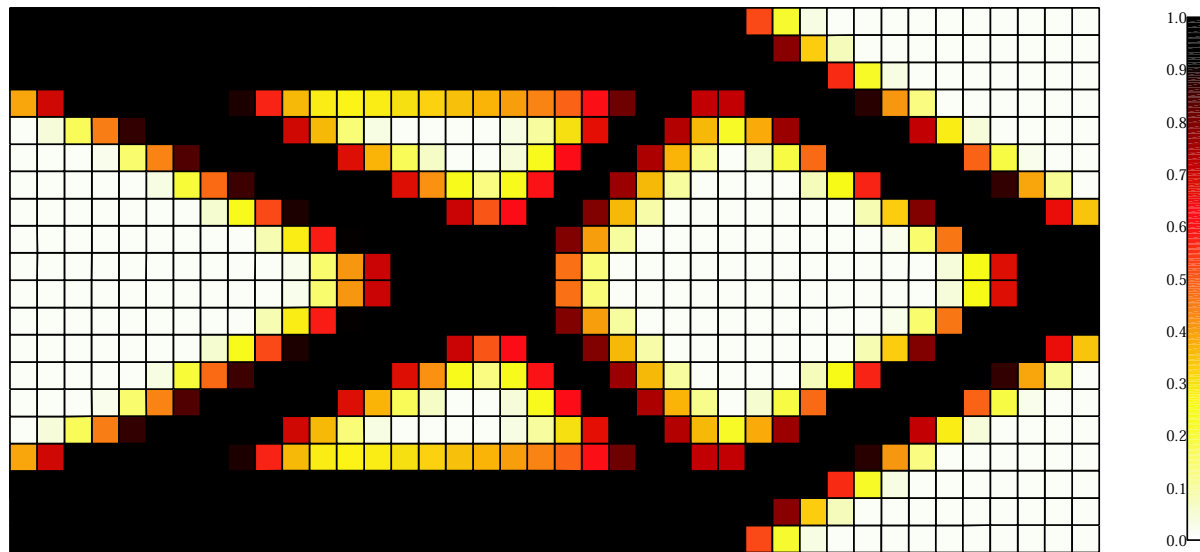
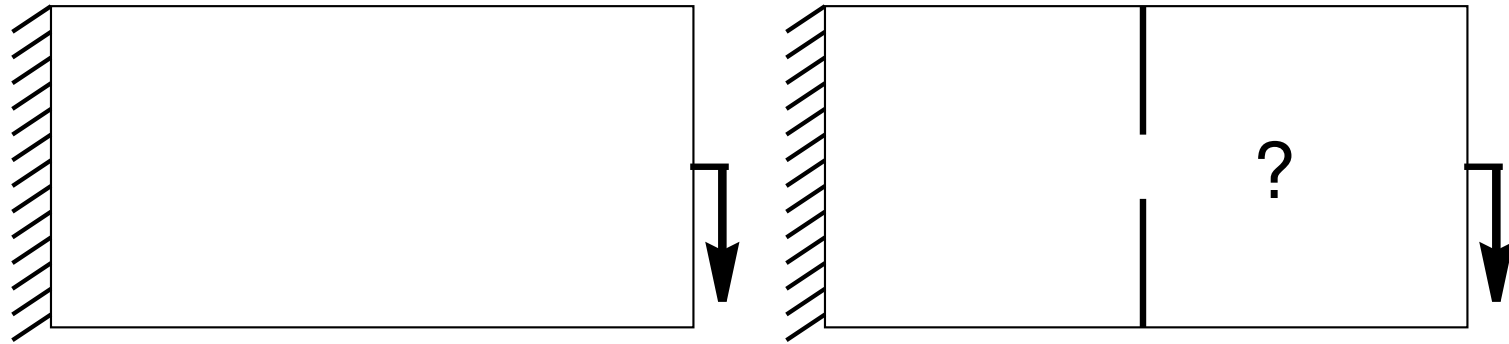
- obtenir une pression de contact uniforme
- minimiser la pression de contact maximale
- maximiser la rigidité de la structure avec une distribution de pression de contact aussi uniforme que possible
- maximiser la rigidité de la structure sans tenir compte de la répartition de la pression de contact

Paramètres d'optimisation :

- la géométrie de la frontière extérieure de la structure (*optimisation de forme*)
- la géométrie de la zone de contact (*optimisation de forme*)
- la répartition de la distance initiale entre les surfaces en contact potentiel
- la distribution d'une quantité disponible de matériau dans un domaine potentiel donné sans imposer de géométrie particulière (*optimisation topologique*)

Optimisation topologique

- Opti. avec contact
- Problématique
- ▷ Opti. topologique
- Formulation du problème
- Problème d'optimisation
- Implémentation
- Exemple



Opti. avec contact

▷ Formulation du problème

Structure avec contact

Milieu 3D

Contact extérieur

Contact interne

Form. variationnelle

Problème d'optimisation

Implémentation

Exemple

Formulation du problème élastique

Structure élastique avec contact

Opti. avec contact

Formulation du problème

▷ Structure avec contact

Milieu 3D

Contact extérieur

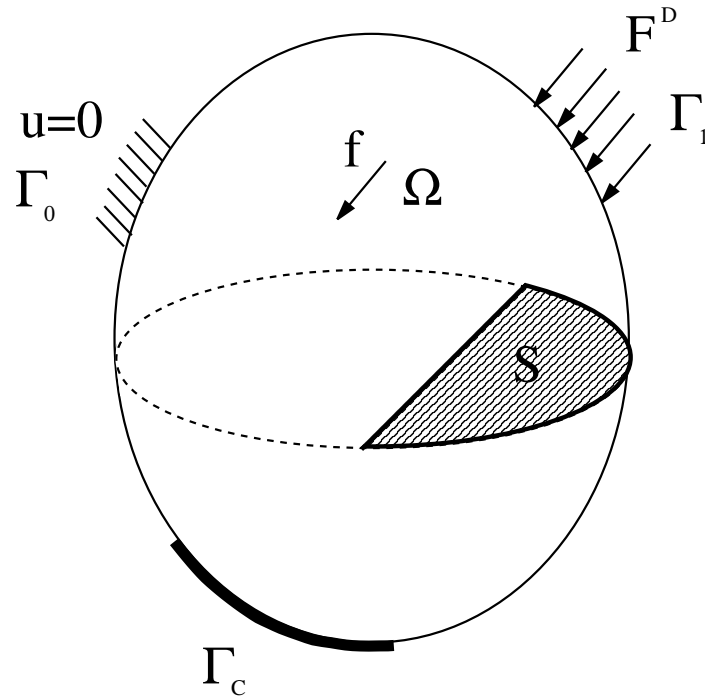
Contact interne

Form. variationnelle

Problème d'optimisation

Implémentation

Exemple



- Contact unilatéral sans frottement
- Modélisation du contact sous une forme "régularisée"
 \Rightarrow *égalité variationnelle*

Equations relatives au milieu 3D

Opti. avec contact

Formulation du problème

Structure avec contact

▷ Milieu 3D

Contact extérieur

Contact interne

Form. variationnelle

Problème d'optimisation

Implémentation

Exemple

Hypothèse des petits déplacements et petites déformations

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + f_i &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij}n_j &= F_i^d && \text{sur } \Gamma_1 \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_0 \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\end{aligned}$$

Loi de comportement du matériau du milieu 3D :

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial \psi_V(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

Contact extérieur

Opti. avec contact

Formulation du problème

Structure avec contact

Milieu 3D

▷ Contact extérieur

Contact interne

Form. variationnelle

Problème d'optimisation

Implémentation

Exemple

On définit :

$$\begin{aligned}u_N &= u_i n_i^C \\ \sigma_N &= \sigma_{ij} n_i^C n_j^C \\ \sigma_T &= \|\sigma_{ij} n_j^C - \sigma_N n_i^C\|\end{aligned}$$

La composante tangentielle du vecteur contrainte est imposée à zero :

$$\sigma_T = 0$$

Modélisation par une interface dont le comportement dérive du potentiel $\varphi_C(u_N)$:

$$\sigma_N = \frac{\partial \varphi_C(u_N)}{\partial u_N}$$

Contact interne

Opti. avec contact

Formulation du problème

Structure avec contact

Milieu 3D

Contact extérieur

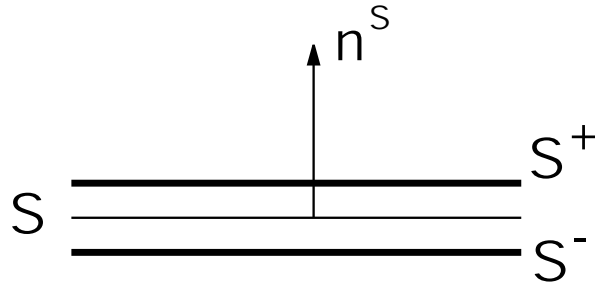
▷ Contact interne

Form. variationnelle

Problème d'optimisation

Implémentation

Exemple



$$[[u_N]] = u_N^+ - u_N^-$$

- Les composantes tangentielles des vecteurs contraintes sont imposées nulles
- La composante normale du vecteur contrainte est supposée continue au travers de S

Modélisation par une interface dont le comportement dérive du potentiel $\varphi_C([[u_N]])$:

$$\sigma_N = \frac{\partial \varphi_S([[u_N]])}{\partial [[u_N]]}$$

Formulation variationnelle

Opti. avec contact

Formulation du problème

Structure avec contact

Milieu 3D

Contact extérieur

Contact interne

▷ Form. variationnelle

Problème d'optimisation

Implémentation

Exemple

Si u est solution alors :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in U_{ad} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_V(\epsilon(\mathbf{u}))}{\partial \epsilon(\mathbf{u})} : \epsilon(\mathbf{v}) dx + \dots \\ \quad \dots \int_{\Gamma_C} \frac{\partial \varphi_C(u_N)}{\partial u_N} v_N dS + \int_S \frac{\partial \varphi_S([[u_N]])}{\partial ([[u_N]])} [[v_N]] dS \\ L(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F}^d \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \end{cases}$$

Si σ est solution alors :

$$\sigma = \underset{\tau \in \Sigma_{ad}}{\operatorname{argmin}} \left[\int_{\Omega} \psi_V(\tau) dx + \int_S \psi_S(\tau_N) dS + \int_{\Gamma_C} \psi_C(\tau_N) dS \right]$$

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème
▷ d'optimisation

Formulation

Potentiel homogène

Relation Compliance/Ec

Définition

Algorithme

Implémentation

Exemple

Problème d'optimisation

Formulation du problème d'optimisation

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

▷ Formulation

Potentiel homogène

Relation Compliance/Ec

Définition

Algorithme

Implémentation

Exemple

Objectif : maximiser la rigidité de la structure

Paramètres : $\beta_i(x)$ avec $\beta_i^{min} < \beta_i < \beta_i^{max}$

Mesure : travail des efforts extérieurs (compliance)

Critère :

$$Crit(\beta_i) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F}^d \cdot \mathbf{u} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx + \int_{\Omega} cost(\beta_i) dx$$

Problème d'optimisation :

$$\min_{\beta_i \in [\beta_i^{min}, \beta_i^{max}]} \left[L(\mathbf{u}) + \int_{\Omega} cost(\beta_i) dx \right]$$

Potentiers thermodynamiques positivement homogènes

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Formulation

▷ Potentiel homogène

Relation Compliance/Ec

Définition

Algorithme

Implémentation

Exemple

- Un potentiel $\varphi(\epsilon)$ est positivement homogène de degré p si :

$$\varphi(\lambda\epsilon) = \lambda^p \varphi(\epsilon) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

- Soit $\varphi(\epsilon)$ et $\psi(\sigma)$ deux potentiels thermodynamiques duaux par la transformée de Legendre

Si (σ, ϵ) vérifient la loi de comportement (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$):

$$\begin{aligned} p\varphi(\epsilon) = q\psi(\sigma) &\Leftrightarrow \psi(\sigma) \text{ est positivement homogène de degré } q \\ &\Leftrightarrow \varphi(\epsilon) \text{ est positivement homogène de degré } p \end{aligned}$$

Relation Compliance / Energie complémentaire

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Formulation

Potentiel homogène

Relation
▷ Compliance/Ec

Définition

Algorithme

Implémentation

Exemple

$$\begin{aligned} -\left(\int_{\Omega} \varphi_V(\epsilon(\mathbf{u}))dx + \int_S \varphi_S([[u_N]])dS + \int_{\Gamma_C} \varphi_C(u_N)dS - L(\mathbf{u})\right) \\ = \int_{\Omega} \psi_V(\sigma)dx + \int_S \psi_S(\sigma_N)dS + \int_{\Gamma_C} \psi_C(\sigma_N)dS \end{aligned}$$

On suppose que :

- ψ_V, ψ_S, ψ_C sont positivement homogènes de même degré q
- q est constant sur Ω, S et Γ_C

Alors

$$L(\mathbf{u}) = q \left(\int_{\Omega} \psi_V(\sigma)dx + \int_S \psi_S(\sigma_N)dS + \int_{\Gamma_C} \psi_C(\sigma_N)dS \right)$$

Définition du problème d'optimisation

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Formulation

Potentiel homogène

Relation Compliance/Ec

▷ Définition

Algorithme

Implémentation

Exemple

Le problème d'optimisation se met sous la forme :

$$\min_{\beta_i \in [\beta_i^{min}, \beta_i^{max}]} \left[L(\mathbf{u}) + \int_{\Omega} cost(\beta_i) dx \right]$$

\Leftrightarrow

$$\min_{\beta_i \in [\beta_i^{min}, \beta_i^{max}]} \min_{\tau \in \Sigma_{ad}} \left[q \left(\int_{\Omega} \psi_V(\tau) dx + \int_S \psi_S(\tau_N) dS + \int_{\Gamma_C} \psi_C(\tau_N) dS \right) + \int_{\Omega} cost(\beta_i) dx \right]$$

Algorithme d'optimisation

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Formulation

Potentiel homogène

Relation Compliance/Ec

Définition

▷ Algorithme

Implémentation

Exemple

Boucle sur :

(Allaire et al.(1993) dans le cadre de l'élasticité linéaire)

- Minimisations locales à contraintes fixées :

$$\min_{\beta_i \in [\beta_i^{min}, \beta_i^{max}]} (q \psi_V(\sigma) + \text{cout}(\beta_i))$$

- Minimisation globale à paramètres d'optimisation fixés

$$\min_{\tau \in \Sigma_{ad}} \left(\int_{\Omega} \psi_V(\tau) dx + \int_S \psi_S(\tau_N) dS + \int_{\Gamma_C} \psi_C(\tau_N) dS \right)$$

Cet algorithme est convergent.

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

▷ Implémentation

Utilisation
d'OpenFEM-Scilab

Programmation

Lois de comportement

Élément fini de contact
interne

Avantages d'OpenFEM

Limites / manques

Exemple

Mise en oeuvre numérique

Utilisation d'OpenFEM-Scilab

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

Utilisation
▷ d'OpenFEM-Scilab

Programmation

Lois de comportement

Élément fini de contact
interne

Avantages d'OpenFEM

Limites / manques

Exemple

- Utilisation conventionnelle des éléments finis 2D
- Programme d'optimisation modulaire sous Scilab :
 - Maillage et conditions aux limites
 - Différentes lois de comportement
 - ▷ composites (mélange fibres/matrice, multicouches)
 - ▷ SIMP
 - Une optimisation locale associée à chaque loi de comportement
 - Contact / Pas de contact
 - Lois de comportement non-linéaires (loi puissance, dissymétrique en traction-compression)
 - Post-traitement

Programmation

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

Utilisation
d'OpenFEM-Scilab

▷ Programmation

Lois de comportement

Élément fini de contact
interne

Avantages d'OpenFEM

Limites / manques

Exemple

- Maillage (noeuds, éléments) stocké sous forme matricielle
⇒ Manipulation simple

- Prise en compte d'un comportement distinct sur chaque élément :

$$\text{Éléments : } \begin{bmatrix} n1 & n2 & n3 & n4 & \boxed{Eltid^{(i)}} & \dots \\ n5 & n6 & n7 & n8 & Eltid^{(j)} & \dots \\ \dots & & & & & \dots \end{bmatrix}$$

$$\text{Comportement : } \begin{bmatrix} \boxed{Eltid^{(i)}} & K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} & K_{22}^{(i)} & \dots \\ Eltid^{(j)} & K_{11}^{(j)} & K_{12}^{(j)} & K_{22}^{(j)} & \dots \end{bmatrix}$$

Lois de comportement

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

Utilisation
d'OpenFEM-Scilab

Programmation

▷ Lois de comportement

Élément fini de contact
interne

Avantages d'OpenFEM

Limites / manques

Exemple

On se place dans le cadre de l'élasticité en contraintes planes.

- Dans le milieu 2D : (potentiel homogène de degré 2)

$$\sigma = a : \epsilon$$

- Pour le contact extérieur (Γ_C) : (potentiel homogène de degré 2)

$$\varphi_C(u_N) = \frac{1}{2}k^- u_N^2 H(-u_N)$$

$$\Rightarrow \sigma_N = \frac{\partial \varphi_C(u_N)}{\partial u_N} = k^- u_N H(-u_N)$$

- Pour le contact interne (S) : (potentiel homogène de degré 2)

$$\varphi_S([[u_N]]) = \frac{1}{2}k^- [[u_N]]^2 H(-[[u_N]])$$

$$\Rightarrow \sigma_N = \frac{\partial \varphi_S([[u_N]])}{\partial [[u_N]]} = k^- [[u_N]] H(-[[u_N]])$$

Élément fini de contact interne

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

Utilisation
d'OpenFEM-Scilab

Programmation

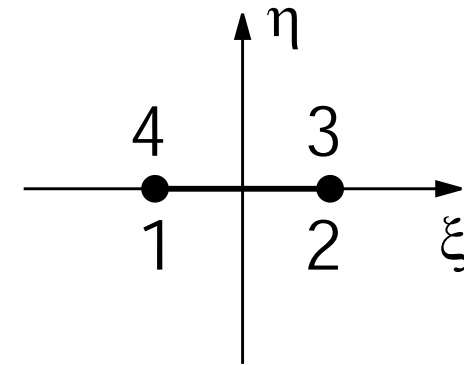
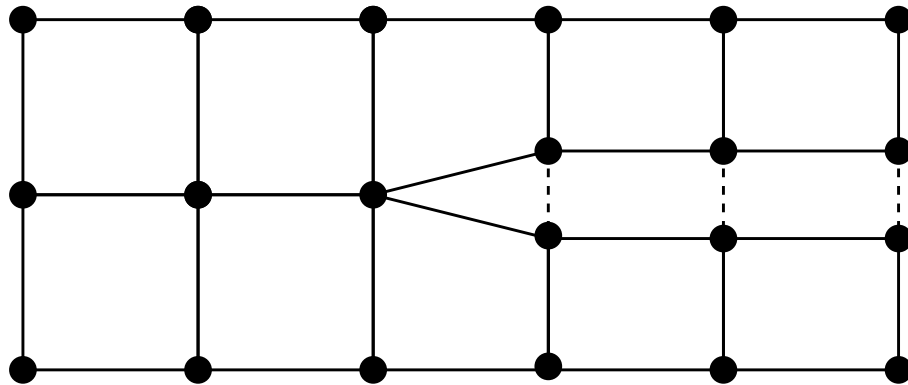
Lois de comportement

▷ Élément fini de
contact interne

Avantages d'OpenFEM

Limites / manques

Exemple



- Maillage avec noeuds superposés
- Élément 2D : Q1 Lagrange
- Element de contact isoparamétrique à 4 noeuds (mêmes ddl)
- Traitement numérique :
 - création de la liste des éléments de contact
 - vecteur d'état de contact (défini au centre des éléments)
 - mise à jour de $K_{globale}$
 - résolution itérative jusqu'à convergence du vecteur d'état de contact

Avantages d'OpenFEM

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

Utilisation
d'OpenFEM-Scilab

Programmation

Lois de comportement

Élément fini de contact
interne

Avantages
▷ d'OpenFEM

Limites / manques

Exemple

- Environnement Scilab :
 - simplicité de programmation en langage Scilab (Matlab)
 - outils de mise au point efficaces (pause, évaluation sous pause)
- Prise en compte des conditions du calcul EF par des fonctions "utilisateur"
(conditions aux limites, matériau, type d'élément fini ...)
- Assemblage : `fe_mknl` (gain : 30 à 40 % de temps CPU)
 - `fe_mknl('init',model)` : opérations faites une fois pour toutes
 - `fe_mknl('assemble',model,...)` : assemblage avec prise en compte d'un nouveau comportement

Limites / manques

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

Utilisation
d'OpenFEM-Scilab

Programmation

Lois de comportement

Élément fini de contact
interne

Avantages d'OpenFEM

▷ Limites / manques

Exemple

- assemblage avec des comportements différents par élément beaucoup plus long qu'avec un comportement homogène
- calcul en grands déplacements
- résolution EF avec des lois de comportement non-linéaires générales

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

▷ Exemple

Approche SIMP

Résultats

Exemple

Approche SIMP

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

Exemple

▷ Approche SIMP

Résultats

Paramètre d'optimisation : ρ

Loi de comportement du milieu Ω :

$$a_{ijkl} = \rho^n a_{ijkl}^0$$

Matériau isotrope, $n=6$ (pénalisation des densités intermédiaires)

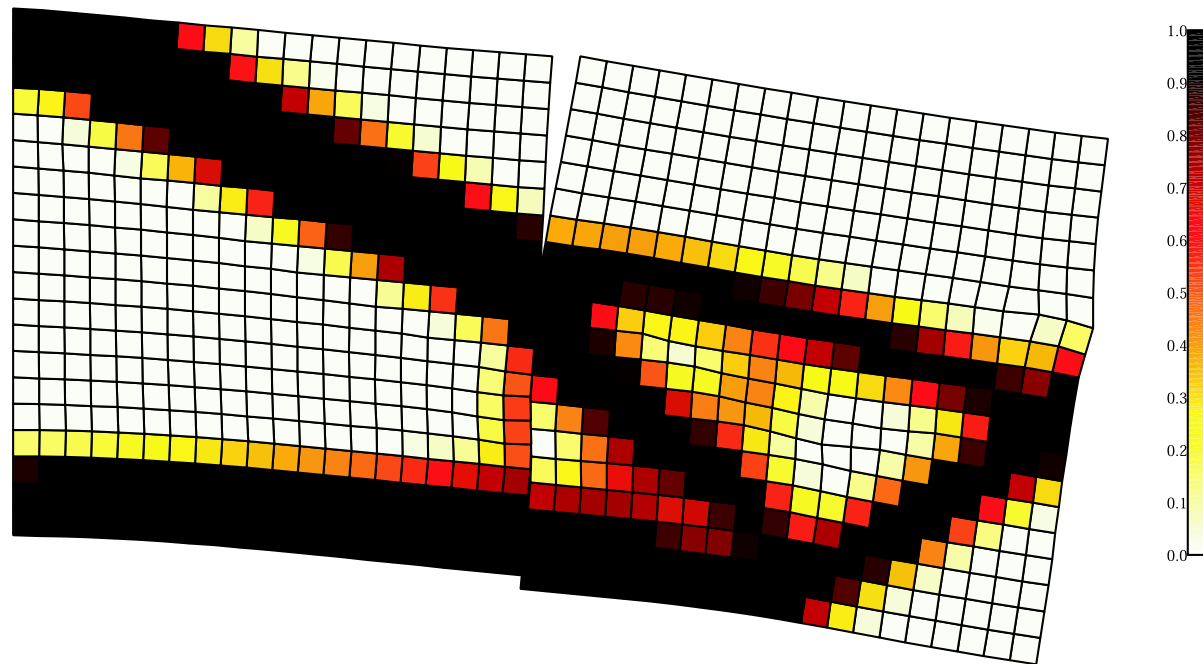
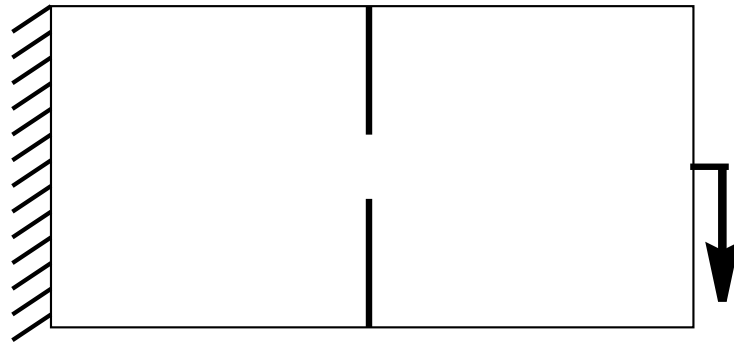
Définition du terme de coût :

$$COUT = k \int_{\Omega} \rho dx$$

k : limite la quantité totale de matériau introduit

Résultats

- Opti. avec contact
- Formulation du problème
- Problème d'optimisation
- Implémentation
- Exemple
- Approche SIMP
- ▷ Résultats



Conclusion

- Programme d'optimisation modulaire en OpenFEM-Scilab
- Optimisation avec comportements non-linéaires (linéaires par morceaux)
- Maquette numérique évolutive, facilement utilisable et modifiable

Autres exemples :

- Optimisation de voiles de bateaux en 2D (Voilerie Incidences)
- Composite à comportement différent en traction et en compression

Perspectives :

- Optimisation de voiles de bateaux (Voilerie Incidences)
- Optimisation de fans de réacteur d'avion

Remerciements : Joël Frelat (LMM, Université Paris 6)

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

Exemple

▷ Autre exemple

Opti. voiles

Autre exemple

Optimisation de voiles de bateaux (Voilerie Incidences)

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

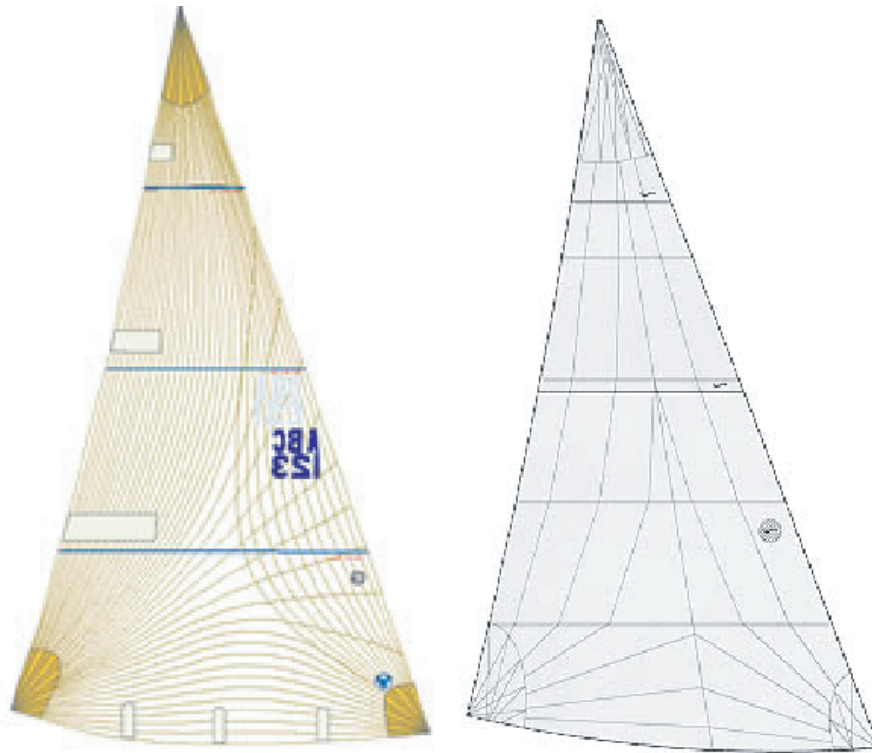
Implémentation

Exemple

Autre exemple

▷ Opti. voiles

- matériau composite bicouche à fibres longues
- comportement élastique linéaire
- modélisation en élasticité 2D en contraintes planes
- paramètres d'optimisation : orientation et épaisseur relative



Optimisation de voiles de bateaux (Voilerie Incidences)

Opti. avec contact

Formulation du problème

Problème d'optimisation

Implémentation

Exemple

Autre exemple

Opti. voiles

Objectif : Définition de la forme optimale des sous-domaines à matériaux *identiques* (fibres rectilignes, épaisseur relative constante)

- optimisation à paramètres distribués
- détermination de la forme optimale des sous-domaines
- optimisation à paramètres constants par sous-domaine

Détermination de la forme optimale des sous-domaines :

- Définition des intervalles par paramètre
- Définition des domaines associés
- Définitions des SD connexes
- Elimination des SD de tailles réduites

Résultats

[Opti. avec contact](#)

[Formulation du problème](#)

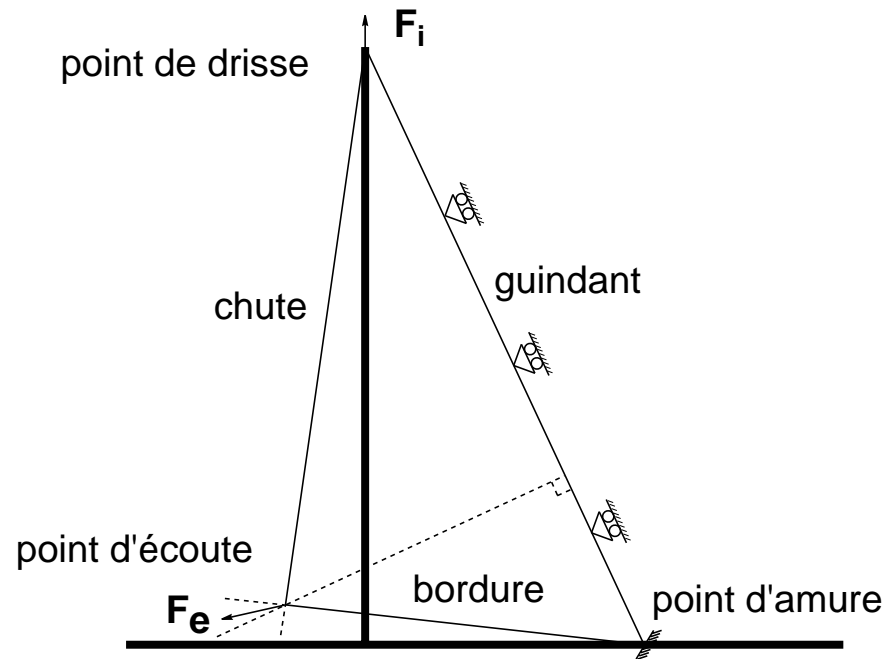
[Problème d'optimisation](#)

[Implémentation](#)

[Exemple](#)

[Autre exemple](#)

[Opti. voiles](#)



Résultats

[Opti. avec contact](#)

[Formulation du problème](#)

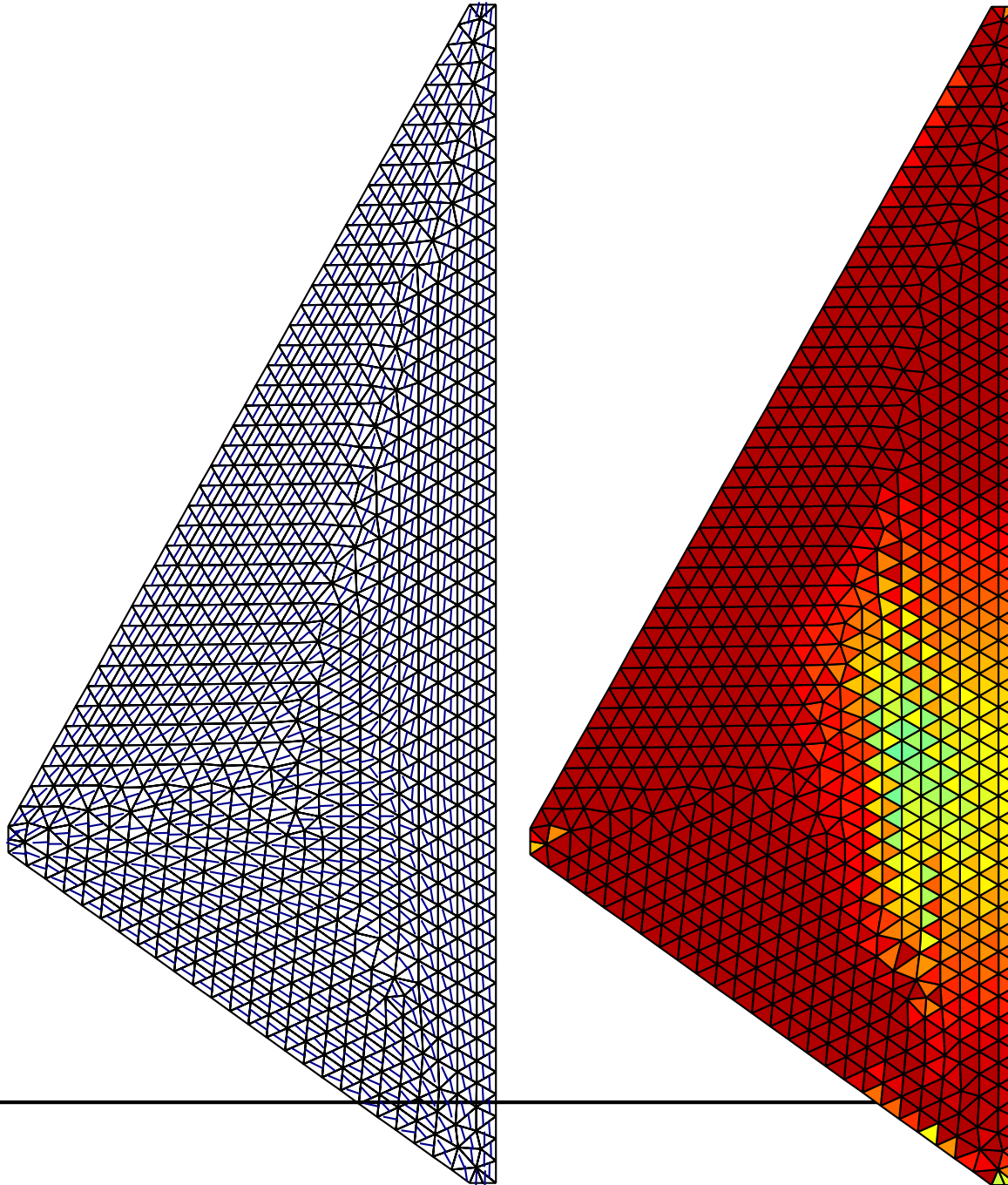
[Problème d'optimisation](#)

[Implémentation](#)

[Exemple](#)

[Autre exemple](#)

[Opti. voiles](#)



Résultats

[Opti. avec contact](#)

[Formulation du problème](#)

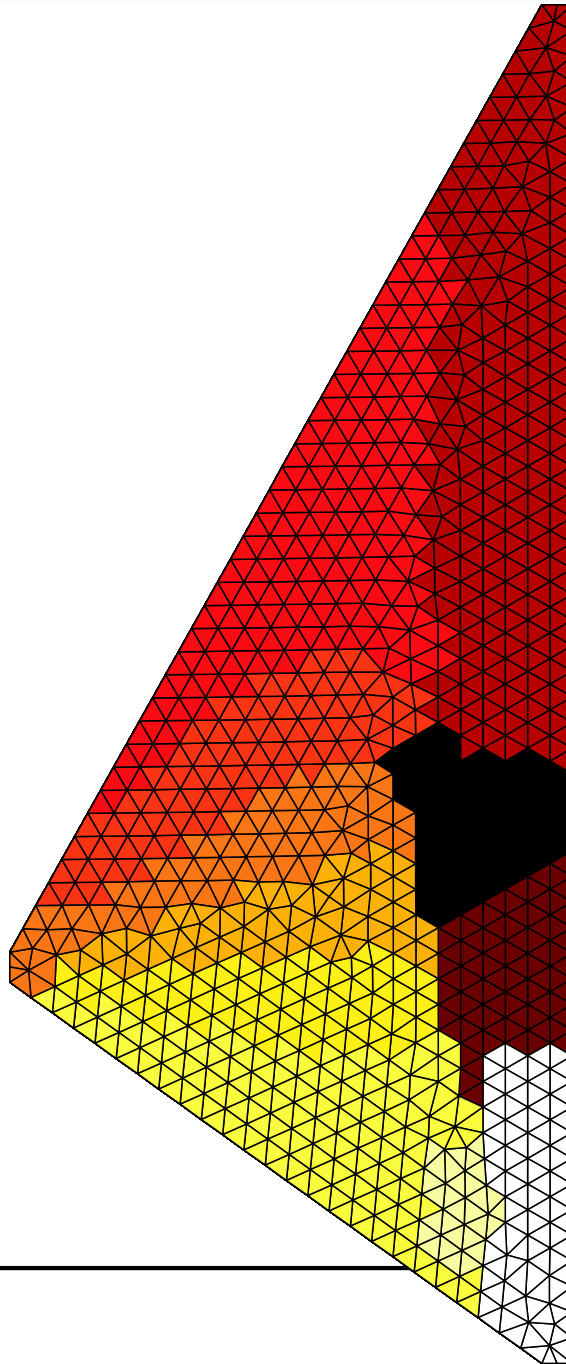
[Problème d'optimisation](#)

[Implémentation](#)

[Exemple](#)

[Autre exemple](#)

[Opti. voiles](#)



Résultats

[Opti. avec contact](#)

[Formulation du problème](#)

[Problème d'optimisation](#)

[Implémentation](#)

[Exemple](#)

[Autre exemple](#)

[Opti. voiles](#)

