MASTER M2 E.D.P. ET ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire
Devoir facultatif, novembre 2010 (2 heures)

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Soit Ω un ouvert borné régulier de $I\!R^N$. On recouvre Ω par un pavage régulier de taille ϵ. Les pavés $(Y_p^\epsilon)_{1\le p\le n(\epsilon)}$, en nombre $n(\epsilon) \approx |\Omega|\epsilon^{-N}$, sont égaux à une translation près à $[0,\epsilon]^N$. Dans chaque pavé on creuse un "trou" T_p^ϵ (fermé régulier d'intérieur non vide et simplement connexe), et on définit un ouvert "perforé" Ω_ϵ par

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \left(\cup_{p=1}^{n(\epsilon)} T_p^\epsilon \right).$$

Les trous sont de formes identiques, obtenus à partir d'un trou modèle $T \subset Y = [0,1]^N$ par homothétie de rapport ϵ, et périodiquement répartis dans Ω avec une période ϵ dans chacune des directions de l'espace. Autrement dit, la fonction caractéristique de Ω_ϵ vérifie $\chi_{\Omega_\epsilon}(x) = \chi_\Omega(x)\chi(x/\epsilon)$ où $\chi(y) \in L^\infty_\#(Y)$ est la fonction caractéristique du complémentaire de T dans Y. Pour des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ et $s \in H^1(\Omega)$, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = f & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = \epsilon s & \text{sur } \partial T_p^\epsilon, \text{ pour } 1 \le p \le n(\epsilon) \\ u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où n est la normale extérieure à Ω_ϵ.

Partie I

Dans cette partie on applique la méthode formelle des développements asymptotiques pour trouver le problème homogénéisé pour (1). On suppose donc que la solution u_ϵ admet le développement suivant

$$u_\epsilon(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i(x, \frac{x}{\epsilon})$$

avec $u_i(x,y)$ fonction Y-périodique par rapport à la variable $y \in Y$.

1. Ecrire les équations et les conditions aux limites satisfaites par u_0, u_1, et u_2.
2. Soit $g(y) \in L^2_\#(Y)$ et $h(y) \in L^2(\partial T)$. Montrer que le problème suivant admet une unique solution dans $H^1_\#(Y)/I\!R$

$$\begin{cases} -\Delta w = g & \text{dans } Y \setminus T \\ \frac{\partial w}{\partial n} = h & \text{sur } \partial T \\ y \to w(y) \ Y\text{-périodique} \end{cases} \tag{2}$$

si et seulement si les données vérifient

$$\int_{Y\setminus T} g(y)dy + \int_{\partial T} h(y)ds = 0.$$

On rappelle que l'indice # indique qu'il s'agit d'espaces de fonctions périodiques.

3. En déduire que $u_0(x,y)$ ne dépend pas de y, et que $u_1(x,y)$ peut s'écrire en fonctions de u_0 et de solutions d'un problème de cellule que l'on précisera.

4. Ecrire la condition nécessaire et suffisante d'existence pour $u_2(x,y)$. En déduire le problème homogénéisé.

Partie II

Dans cette partie on utilise la convergence à deux échelles pour démontrer rigoureusement un théorème d'homogénéisation. On note V_ϵ le sous-espace de $H^1(\Omega_\epsilon)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur $\partial\Omega$. Dans toute la suite on admettra qu'il existe un opérateur de prolongement de V_ϵ dans $H^1_0(\Omega)$, noté X_ϵ, et une constante positive $C > 0$ indépendante de ϵ tels que, pour tout $\phi \in V_\epsilon$

$$X_\epsilon \phi = \phi \text{ dans } \Omega_\epsilon, \text{ et } \|\nabla(X_\epsilon \phi)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega_\epsilon)^N}.$$

Par abus de notation on confondra la fonction ϕ avec son prolongement $X_\epsilon \phi$.

1. Vérifier que (1) admet bien une unique solution dans V_ϵ. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de ϵ, de f et de s, telle que

$$\|X_\epsilon u_\epsilon\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|s\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

2. Montrer qu'il existe une sous-suite (toujours notée ϵ), deux fonctions $u(x) \in H^1_0(\Omega)$ et $u_1(x,y) \in L^2(\Omega; H^1_\#(Y))$ telle que $\chi(x/\epsilon)u_\epsilon(x)$ et $\chi(x/\epsilon)\nabla u_\epsilon(x)$ convergent à deux échelles vers $\chi(y)u(x)$ et $\chi(y)\left(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y)\right)$ respectivement.

3. Trouver le problème limite à deux échelles satisfait par le couple (u, u_1). Indiquer brièvement pourquoi et dans quel espace il admet une unique solution. Que peut-on en conclure pour la convergence de toute la suite ?

4. Déduire de ce qui précède le problème homogénéisé. Montrer qu'il est bien posé (pour cela on vérifiera que le tenseur homogénéisé est bien coercif). Enoncer un théorème de convergence qui ne fait pas appel à la convergence à deux échelles.