MASTER M2 E.D.P. ET ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire
Devoir facultatif, novembre 2010 (2 heures)

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Soit Ω un ouvert borné régulier de $I\!R^N$. On suppose que ce domaine est occupé par un mélange périodique de fluides visqueux, et on s'intéresse à l'homogénéisation de ce mélange. Soit $\mu(y) \geq \mu_0 > 0$ une fonction positive dans $L^\infty_\#(Y)$ qui représente la viscosité du mélange dans la cellule de périodicité ($Y = [0,1]^N$ est le cube unité). Pour $\epsilon > 0$, on définit la fonction oscillante périodiquement $\mu_\epsilon(x) = \mu(x/\epsilon)$. On considère les équations de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla p_\epsilon - \text{div } (\mu_\epsilon \nabla u_\epsilon) = f \text{ dans } \Omega \\ \text{div } u_\epsilon = 0 \text{ dans } \Omega \\ u_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

où la fonction scalaire $p_\epsilon(x)$ est la pression, la fonction vectorielle $u_\epsilon(x)$ est la vitesse, et la fonction vectorielle $f(x)$ est la résultante des forces. On admettra que, si $f \in L^2(\Omega)^N$, alors il existe une unique solution de (1) avec $u_\epsilon \in H^1_0(\Omega)^N$ et $p_\epsilon \in L^2(\Omega)/I\!R$ (la pression est définie à une constante près).

1. Soit $g \in L^2_\#(Y)^N$ et $h \in L^2_\#(Y)$. Montrer que le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_y q - \text{div }_y(\mu(y) \nabla_y w) = g \text{ dans } \Omega \times Y, \\ \text{div }_y w = h \text{ dans } \Omega \times Y, \\ y \to (q, w) \ Y - \text{périodique}, \end{array} \right. \tag{2}$$

admet une unique solution (q, w) dans $(L^2_\#(Y)/I\!R) \times H^1_\#(Y)^N$ si et seulement si on a

$$\int_Y g(y)dy = 0 \quad \text{et} \quad \int_Y h(y)dy = 0.$$

2. Appliquer la méthode des développements asymptotiques à deux échelles à (1) et en déduire formellement le problème homogénéisé. Indication: on pourra utiliser les développements suivants

$$u_\epsilon(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i(x, \frac{x}{\epsilon}) \quad \text{et} \quad p_\epsilon(x) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \epsilon^i p_i(x, \frac{x}{\epsilon})$$

où la série pour la pression démarre à un ordre plus élevé que celle sur la vitesse.

3. En multipliant l'équation (1) par u_ϵ et en intégrant par parties, montrer que la suite u_ϵ, lorsque ϵ tends vers 0, est bornée dans $H^1_0(\Omega)^N$. En déduire que la suite ∇p_ϵ est bornée dans $H^{-1}(\Omega)$. On admettra dans la suite que ce dernier résultat implique que la suite p_ϵ est bornée dans $L^2(\Omega)/I\!R$.

4. Montrer que, pour une sous-suite, u_ϵ converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)^N$, ∇u_ϵ converge à deux échelles vers $\nabla_x u(x)+\nabla_y u_1(x,y)$ avec $u_1 \in L^2(\Omega; H^1_\#(Y))^N$, et p_ϵ converge à deux échelles vers $p_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$. Montrer aussi que ces limites vérifient div $_x u = 0$ dans Ω et div $_y u_1 = 0$ dans $\Omega \times Y$.

5. Déduire de (1), par convergence à deux échelles, le problème de cellule suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_y p_0 - \mathrm{div}\ _y \mu(y)(\nabla_x u + \nabla_y u_1) = 0 \text{ dans } \Omega \times Y \\ \mathrm{div}\ _y u_1 = 0 \text{ dans } \Omega \times Y \\ y \to (p_0, u_1)\ Y - \text{périodique.} \end{array} \right. \tag{3}$$

   Donner une expression de u_1 en fonction de $\nabla_x u$.

6. En multipliant (1) par une fonction test (à valeurs vectorielles) $\phi(x) + \epsilon\phi_1(x, x/\epsilon)$ avec $y \to \phi_1$ Y-périodique, en déduire le système limite vérifié par u, u_1, p_0.

7. En éliminant la variable microscopique y trouver le système homogénéisé satisfait par $u(x)$ et $p(x) = \int_Y p_0(x,y)dy$. En admettant qu'il possède une solution unique dans les mêmes espaces fonctionnels que (1), en déduire que toute la suite u_ϵ et p_ϵ converge vers une unique limite.