MASTER M2 E.D.P. ET ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire, "Homogénéisation"
13 Janvier 2011 (3 heures)

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. On rappelle que l'indice # indique des espaces de fonctions périodiques. Dans tout le problème C désigne des constantes positives indépendantes de ϵ.

Le but de ce problème est l'étude d'un modèle d'écoulement réactif en milieu poreux. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ qui va représenter le milieu poreux. On recouvre Ω par un pavage régulier périodique de taille ϵ. Les pavés $(Y_p^\epsilon)_{1\leq p\leq n(\epsilon)}$, en nombre $n(\epsilon) \approx |\Omega|\epsilon^{-N}$, sont égaux à une translation près à $[0,\epsilon]^N$. Après cette translation, chaque pavé est homothétique de rapport ϵ à la cellule unité $Y = [0,1]^N$ qui se décompose en parties fluide Y_f et solide Y_s, d'interface Γ, avec $Y = Y_f \cup Y_s$. En notant de même chaque pavé $Y_p^\epsilon = Y_{f,p}^\epsilon \cup Y_{s,p}^\epsilon$, on définit la partie fluide du milieu poreux Ω_ϵ (supposée régulière et connexe) par

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \left(\cup_{p=1}^{n(\epsilon)} Y_{s,p}^\epsilon\right).$$

On note Γ_ϵ l'interface entre la partie fluide et la partie solide du milieu poreux, définie par

$$\Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon \setminus \partial\Omega.$$

La partie fluide Ω_ϵ du milieu poreux est occupée, comme son nom l'indique, par un fluide incompressible dont la vitesse est donnée par $b\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ où $b(y) \in C^1_\#(Y_f)^N$ est un champ de vitesse périodique régulier qui vérifie

$$\mathrm{div}_y b(y) = 0 \text{ dans } Y_f, \quad b(y) = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Le tenseur de diffusion dans le fluide est $A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ où $A(y) \in L^\infty_\#(Y_f)^{N\times N}$ est une matrice symétrique périodique coercive qui vérifie, pour $0 < \alpha \leq \beta$,

$$\alpha|\xi|^2 \leq A(y)\xi\cdot\xi \leq \beta|\xi|^2, \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N, y \in Y_f.$$

Une espèce chimique est dissoute dans le fluide et peut aussi réagir avec la paroi solide par absorption/désorption. On note $u_\epsilon(t,x)$ la concentration de cette espèce dans le fluide et $v_\epsilon(t,x)$ la concentration sur la paroi solide. On note $u_{in}(x)$ et $v_{in}(x)$ les concentrations initiales que l'on suppose appartenir à $H^1_0(\Omega)$.

En notant $k > 0$ et $K > 0$ deux constantes positives de réactions chimiques et n la normale extérieure à Ω_ϵ, le modèle est un système d'équations d'évolution pour les concentrations:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + b\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right) \cdot \nabla u_\epsilon - \operatorname{div}\left(A\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon\right) = 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon \times (0,T), \\
-A\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon \cdot n = \epsilon \dfrac{\partial v_\epsilon}{\partial t} & \text{sur } \Gamma_\epsilon \times (0,T), \\
\dfrac{\partial v_\epsilon}{\partial t} = \dfrac{k}{\epsilon^2}\Big(u_\epsilon - \dfrac{v_\epsilon}{K}\Big) & \text{sur } \Gamma_\epsilon \times (0,T), \\
u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\
u_\epsilon(x,0) = u_{in}(x) & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\
v_\epsilon(x,0) = v_{in}(x) & \text{sur } \Gamma_\epsilon.
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

Dans le système (1) la deuxième ligne est une condition aux limites qui exprime la conservation de la masse totale de la concentration à l'interface fluide/solide, tandis que la troisième ligne est une équation différentielle ordinaire gouvernant l'évolution de la concentration sur la paroi solide

Partie I

Dans cette partie on applique la méthode formelle des développements asymptotiques pour trouver le problème homogénéisé pour (1). On suppose donc que la solution (u_ϵ, v_ϵ) admet le développement suivant

$$
u_\epsilon(t,x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i(t,x,\frac{x}{\epsilon}), \quad v_\epsilon(t,x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i v_i(t,x,\frac{x}{\epsilon})
$$

avec $u_i(t,x,y)$ et $v_i(t,x,y)$ fonctions Y-périodiques par rapport à la variable $y \in Y$.

1. Ecrire les équations et les conditions aux limites satisfaites par u_0, v_0, u_1, v_1, et u_2, v_2. Montrer en particulier que chaque v_i, pour $0 \le i \le 2$, se calcule explicitement en fonction des u_j avec $0 \le j \le i$.

2. Soit $g(y) \in L^2_\#(Y_f)$ et $h(y) \in L^2(\Gamma)$. Montrer que le problème suivant admet une unique solution dans $H^1_\#(Y_f)/\mathbb{R}$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
-\operatorname{div}_y\left(A(y)\nabla_y w\right) = g & \text{dans } Y_f \\
A(y)\nabla_y w \cdot n = h & \text{sur } \Gamma \\
y \to w(y) \ Y\text{-périodique} &
\end{array}
\right.
\tag{2}
$$

si et seulement si les données vérifient

$$
\int_{Y_f} g(y)dy + \int_\Gamma h(y)ds = 0.
$$

3. En déduire que $u_0(t,x,y)$ ne dépend pas de y, et que $u_1(t,x,y)$ peut s'écrire en fonctions du gradient de u_0 et de solutions d'un problème de cellule que l'on précisera.

4. Ecrire la condition nécessaire et suffisante d'existence pour $u_2(t,x,y)$. En déduire l'équation homogénéisée ainsi que la condition aux limites sur $\partial\Omega$ (on ne demande pas de trouver la condition initiale).

Partie II

Dans cette partie on démontre des estimations a priori sur la solution du système (1). On note V_ϵ le sous-espace de $H^1(\Omega_\epsilon)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur $\partial\Omega$. Dans toute la suite on admettra qu'il existe un opérateur linéaire continu de prolongement de V_ϵ dans $H_0^1(\Omega)$, noté X_ϵ tel que, pour tout $\phi \in V_\epsilon$

$$X_\epsilon \phi = \phi \text{ dans } \Omega_\epsilon, \text{ et } \|\nabla(X_\epsilon \phi)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega_\epsilon)^N}.$$

Par abus de notation on confondra la fonction ϕ avec son prolongement $X_\epsilon \phi$.

1. Montrer que (1) admet comme formulation variationnelle

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \phi \, dx + \frac{\epsilon}{K} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} \psi \, ds + a\Big((u_\epsilon, v_\epsilon), (\phi, \psi)\Big) = 0 \tag{3}$$

pour toute fonction test $(\phi, \psi) \in L^2((0,T); V_\epsilon) \times L^2((0,T) \times \Gamma_\epsilon)$, avec la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} a\Big((u_\epsilon, v_\epsilon), (\phi, \psi)\Big) &= \int_{\Omega_\epsilon} \Big(b\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \cdot \nabla u_\epsilon \phi + A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \phi \Big) dx \\ &+ \frac{k}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} \left(u_\epsilon - \frac{v_\epsilon}{K} \right) \left(\phi - \frac{\psi}{K} \right) ds. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Montrer que, à ϵ fixé, la forme bilinéaire (4), intégrée en temps de 0 à T, est coercive sur l'espace $L^2((0,T); V_\epsilon) \times L^2((0,T) \times \Gamma_\epsilon)$. On admettra que cela suffit à montrer que (1) admet bien une unique solution (u_ϵ, v_ϵ) dans $\big\{L^2((0,T); V_\epsilon) \cap C([0,T]; L^2(\Omega_\epsilon))\big\} \times C([0,T]; L^2(\Gamma_\epsilon))$.

3. Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute fonction $w \in V_\epsilon$,

$$\|w\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq C\big(\epsilon \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \sqrt{\epsilon} \|w\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)}\big),$$

et

$$\sqrt{\epsilon} \|w\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)} \leq C\big(\|w\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \epsilon \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}\big).$$

4. En intégrant en temps (3) avec $(\phi, \psi) = (u_\epsilon, v_\epsilon)$, démontrer qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de ϵ, telle que

$$\begin{aligned} &\|u_\epsilon\|_{L^\infty((0,T); L^2(\Omega_\epsilon))} + \sqrt{\epsilon} \|v_\epsilon\|_{L^\infty((0,T); L^2(\Gamma_\epsilon))} + \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega_\epsilon)} \\ &+ \sqrt{\epsilon} \|\epsilon^{-1}(u_\epsilon - \tfrac{v_\epsilon}{K})\|_{L^2((0,T) \times \Gamma_\epsilon)} \leq C\left(\|u_{in}\|_{L^2(\Omega)} + \|v_{in}\|_{H^1(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

5. En supposant connu u_ϵ, écrire explicitement la solution v_ϵ de l'équation différentielle ordinaire en 3ème ligne de (1). En déduire, puisque $v_{in} \in H_0^1(\Omega)$ et $u_\epsilon \in L^2((0,T);V_\epsilon)$, que v_ϵ admet ainsi une extension dans $L^2((0,T);V_\epsilon)$ qui vérifie

$$\|v_\epsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega_\epsilon)} \leq C\left(\|u_\epsilon\|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega_\epsilon))} + \epsilon\|v_{in}\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

et

$$\epsilon\|\nabla v_\epsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega_\epsilon)} \leq C\left(\|\nabla u_\epsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega_\epsilon)} + \epsilon\|v_{in}\|_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

Indication: on utilisera le fait que $\displaystyle\int_0^t \epsilon^{-2} e^{\frac{2k(s-t)}{K\epsilon^2}}\, ds \leq C.$

Partie III

Dans cette partie on utilise la convergence à deux échelles pour démontrer rigoureusement un théorème d'homogénéisation. Dans ce contexte instationnaire on rappelle le théorème principal: pour toute suite $z_\epsilon(t,x)$ uniformément bornée dans $L^2((0,T)\times\Omega_\epsilon)$ il existe une sous-suite ϵ et une limite $z_0(t,x,y) \in L^2((0,T)\times\Omega\times Y_f)$ telles que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{\Omega_\epsilon} z_\epsilon(t,x)\phi\left(t,x,\frac{x}{\epsilon}\right) dt\, dx = \int_0^T\int_\Omega\int_{Y_f} z_0(t,x,y)\phi(t,x,y)\, dt\, dx\, dy$$

pour toute fonction test régulière $\phi(t,x,y)$ qui soit Y-périodique en y. On rappelle aussi la notion de convergence à deux échelles pour une suite de fonctions définies sur le bord Γ_ϵ: soit $\zeta_\epsilon(t,x)$ une suite vérifiant

$$\sqrt{\epsilon}\|\zeta_\epsilon\|_{L^2((0,T)\times\Gamma_\epsilon)} \leq C,$$

il existe une sous-suite ϵ et une limite $\zeta_0(t,x,y) \in L^2((0,T)\times\Omega\times\Gamma)$ tels que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{\epsilon}\int_0^T\int_{\Gamma_\epsilon}\zeta_\epsilon(t,x)\phi\left(t,x,\frac{x}{\epsilon}\right) dt\, dx = \int_0^T\int_\Omega\int_\Gamma \zeta_0(t,x,y)\phi(t,x,y)\, dt\, dx\, dy$$

pour toute fonction test régulière Y-périodique $\phi(t,x,y)$.

1. Rappeler les résultats du cours sur la structure de la limite à deux échelles, d'une part pour une suite z_ϵ (ainsi que son gradient ∇z_ϵ) bornée dans $L^2((0,T);V_\epsilon)$, d'autre part pour une suite ζ_ϵ vérifiant

$$\|\zeta_\epsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega_\epsilon)} + \epsilon\|\nabla\zeta_\epsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega_\epsilon)} + \sqrt{\epsilon}\|\zeta_\epsilon\|_{L^2((0,T)\times\Gamma_\epsilon)} \leq C.$$

Dans chaque cas on reliera les limites à deux échelles obtenues pour les deux notions de convergence ci-dessus.

2. Déduire de (5) (et plus précisément de l'estimation sur $\epsilon^{-1}(u_\epsilon - \frac{v_\epsilon}{K})$) que les limites à deux échelles de u_ϵ et v_ϵ coincident sur Γ.

3. En multipliant l'équation pour u_ϵ dans (1) par une fonction test du type $\phi(t,x)+\epsilon\phi_1(t,x,\frac{x}{\epsilon})$, trouver le problème limite à deux échelles (sous forme variationnelle).

4. Déduire de ce qui précède le problème de cellule (dont on montrera qu'il admet une solution unique dans un espace indépendant du temps) ainsi que le problème homogénéisé (dont on précisera la condition initiale). Montrer que le problème homogénéisé est bien posé (pour cela on indiquera pourquoi le tenseur homogénéisé est bien coercif). Que peut-on en conclure pour la convergence de toute la suite ?