MASTER M2 E.D.P. ET ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire, "Homogénéisation"
5 Janvier 2012 (3 heures)

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. On rappelle que l'indice # indique des espaces de fonctions périodiques. Dans tout le problème C désigne des constantes positives indépendantes de ϵ.

Le but de ce problème est l'étude d'un modèle de transfert thermique dans un milieu poreux, mélant diffusion et rayonnement. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ qui va représenter le milieu poreux. On recouvre Ω par un pavage régulier périodique de taille ϵ. Les pavés $(Y_p^\epsilon)_{1\leq p\leq n(\epsilon)}$, en nombre $n(\epsilon) \approx |\Omega|\epsilon^{-N}$, sont égaux à une translation près à $[0,\epsilon]^N$. Après cette translation, chaque pavé est homothétique de rapport ϵ à la cellule unité $Y = [0,1]^N$ qui se décompose en une partie solide Y^* et un trou régulier, simplement connexe $T \Subset Y$, strictement inclus dans Y, de bord $\Gamma = \partial T$, avec $Y = Y^* \cup T$. En notant de même chaque pavé $Y_p^\epsilon = Y_p^{*,\epsilon} \cup T_p^\epsilon$, on définit la partie solide du milieu poreux Ω_ϵ par

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \left(\bigcup_{p=1}^{n(\epsilon)} T_p^\epsilon \right).$$

Les trous T_p^ϵ étant tous disjoints deux à deux, le domaine Ω_ϵ est connexe. On note Γ_ϵ l'interface entre les trous et la partie solide du milieu poreux, définie par

$$\Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon \setminus \partial\Omega = \cup_{p=1}^{n(\epsilon)} \partial T_p^\epsilon.$$

On suppose pour simplifier qu'aucun trou ne coupe le bord extérieur $\partial\Omega$. Dans la partie solide Ω_ϵ la chaleur se propage par simple diffusion, tandis que dans les trous elle se propage par rayonnement sans atténuation.

Le tenseur de diffusion dans le solide est $A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ où $A(y) \in L^\infty_\#(Y^*)^{N\times N}$ est une matrice symétrique périodique coercive qui vérifie, pour $0 < \alpha \leq \beta$,

$$\alpha|\xi|^2 \leq A(y)\xi\cdot\xi \leq \beta|\xi|^2, \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N, y \in Y^*.$$

On note $u_\epsilon(x)$ la température dans le milieu poreux. On considère un modèle (très) simplifié de rayonnement dans lequel chaque point x du bord d'un trou ∂T_p^ϵ émet un rayonnement thermique proportionnel à sa température et reçoit un rayonnement thermique de tous les autres points du même bord, égal à la moyenne de la température sur ∂T_p^ϵ. Sur le bord de chacun des trous on écrit la continuité du flux de chaleur normal

$$-\epsilon A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon \cdot n = G_\epsilon(u_\epsilon) \text{ sur } \partial T_p^\epsilon$$

où G_ϵ est un opérateur intégral, définissant le rayonnement, donné par

$$G_\epsilon(u_\epsilon)(x) = \sigma\left(u_\epsilon(x) - \frac{1}{|\partial T_p^\epsilon|}\int_{\partial T_p^\epsilon} u_\epsilon(x')\, ds(x') \right)$$

avec $\sigma > 0$ une constante positive, $ds(x')$ la mesure surfacique (dépendant de la variable x'). Le modèle est donc:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
-\mathrm{div}\left(A\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon\right) = f & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\
-A\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon \cdot n = \dfrac{1}{\epsilon} G_\epsilon(u_\epsilon) & \text{sur } \Gamma_\epsilon, \\
u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega,
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

où n est la normale extérieure à Ω_ϵ et $f(x) \in L^2(\Omega)$ est le terme source. La mise à l'échelle dans la deuxième ligne de (1) est naturelle car elle assure une balance parfaite entre diffusion et rayonnement thermique comme nous allons le voir.

Partie I

Dans cette partie on étudie, à ϵ fixé, les propriétés du modèle (1).

1. Montrer que l'opérateur G_ϵ est linéaire continu auto-adjoint de $L^2(\Gamma_\epsilon)$ dans $L^2(\Gamma_\epsilon)$ et qu'il est positif au sens où

$$
\int_{\Gamma_\epsilon} G_\epsilon(u)\, u\, ds \geq 0 \quad \forall\, u \in L^2(\Gamma_\epsilon).
$$

2. En déduire l'existence et l'unicité d'une solution de (1) dans l'espace $H^1(\Omega_\epsilon) \cap H^1_0(\Omega)$.

3. Montrer que le noyau de l'opérateur G_ϵ est constitué des fonctions de $L^2(\Gamma_\epsilon)$ qui sont constantes sur chaque composante ∂T_p^ϵ.

Partie II

Dans cette partie on applique la méthode formelle des développements asymptotiques pour trouver le problème homogénéisé pour (1). On suppose donc que la solution u_ϵ admet le développement suivant

$$
u_\epsilon(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i(x, \frac{x}{\epsilon})
$$

avec $u_i(x, y)$ fonctions Y-périodiques par rapport à la variable $y \in Y$.

1. Soit $\phi(y) \in L^2(\Gamma)$ étendu par Y-périodicité. On définit $\phi^\epsilon(x) = \phi(\frac{x}{\epsilon}) \in L^2(\Gamma_\epsilon)$. Montrer que $G_\epsilon(\phi^\epsilon)(x) = [G(\phi)](y = \frac{x}{\epsilon})$ avec G l'opérateur défini sur $L^2(\Gamma)$ par

$$
G(\phi)(y) = \sigma\left(\phi(y) - \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma \phi(y')\, ds(y')\right).
$$

Malheureusement, si $\phi(x,y)$ est une fonction régulière, Y-périodique en y, on a généralement pour $\phi^\epsilon(x) = \phi(x, \frac{x}{\epsilon})$

$$G_\epsilon(\phi^\epsilon)(x) \neq \Big[G(\phi(x,\cdot))\Big](y = \frac{x}{\epsilon}),$$

où l'opérateur G est intégral en y (mais pas en x). Cette différence engendre des complications supplémentaires dans la méthode formelle des développements asymptotiques...

2. Pour chaque cellule Y_p^ϵ on note x_ϵ^p son origine de manière à ce qu'on ait le changement de variable $x = x_\epsilon^p + \epsilon y$ avec $x \in Y_p^\epsilon$ et $y \in Y$. Montrer qu'une fonction régulière $u_i(x,y)$ vérifie pour tout $x \in Y_p^\epsilon$

$$\begin{aligned} u_i(x, \frac{x}{\epsilon}) \quad &= u_i(x_\epsilon^p, \frac{x}{\epsilon}) + (x - x_\epsilon^p)\cdot \nabla_x u_i(x_\epsilon^p, \frac{x}{\epsilon}) \\ &+ \frac{1}{2}(x - x_\epsilon^p)\otimes(x - x_\epsilon^p)\cdot \nabla_x\nabla_x u_i(x_\epsilon^p, \frac{x}{\epsilon}) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \tag{2}$$

3. Montrer que, sur chaque bord ∂T_p^ϵ,

$$G_\epsilon(u_\epsilon)(x) = Q_0(x_\epsilon^p, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon Q_1(x_\epsilon^p, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2 Q_2(x_\epsilon^p, \frac{x}{\epsilon}) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

avec

$$Q_0(x_\epsilon^p, y) = G\Big(u_0(x_\epsilon^p, y)\Big),$$

$$Q_1(x_\epsilon^p, y) = G\Big(u_1(x_\epsilon^p, y) + y\cdot\nabla_x u_0(x_\epsilon^p, y)\Big),$$

$$Q_2(x_\epsilon^p, y) = G\Big(u_2(x_\epsilon^p, y) + y\cdot\nabla_x u_1(x_\epsilon^p, y) + \frac{1}{2} y\otimes y\cdot\nabla_x\nabla_x u_0(x_\epsilon^p, y)\Big),$$

où l'opérateur G est intégral en y seulement. Montrer aussi que, pour tout $x \in \partial T_p^\epsilon$,

$$Q_i(x_\epsilon^p, y) = Q_i(x,y) - (x - x_\epsilon^p)\cdot\nabla_x Q_i(x,y) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3}$$

4. En injectant l'ansatz dans (1) et en utilisant (2) et (3), écrire les équations et les conditions aux limites satisfaites par u_0, u_1 et u_2. Indication: ces équations ne doivent faire intervenir que les variables x et y ; on ne doit plus y voir les points x_ϵ^p.

5. Soit $g(y) \in L^2_\#(Y^*)$ et $h(y) \in L^2(\Gamma)$. Montrer que le problème suivant admet une unique solution dans $H^1_\#(Y^*)/\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mathrm{div}_y\,(A(y)\nabla_y w) = g & \text{dans } Y^* \\ -A(y)\nabla_y w\cdot n = G(w) - h & \text{sur } \Gamma \\ y \to w(y)\ Y\text{-périodique} & \end{array} \right. \tag{4}$$

si et seulement si les données vérifient

$$\int_{Y^*} g(y)dy + \int_\Gamma h(y)ds = 0.$$

On utilisera le fait que G est auto-adjoint et a un noyau explicite.

6. En déduire que $u_0(x,y)$ ne dépend pas de y, et que $u_1(x,y)$ peut s'écrire en fonctions du gradient de u_0 et de solutions $w_k(y)$ d'un problème de cellule que l'on précisera.

7. Ecrire la condition nécessaire et suffisante d'existence pour $u_2(x,y)$. En déduire que l'équation homogénéisée est une équation de diffusion dans Ω avec un tenseur homogénéisé constant A^* que l'on précisera.

8. En utilisant la formulation variationnelle du problème de cellule, montrer que A^* est défini positif.

Partie III

Dans cette partie on utilise la convergence à deux échelles pour démontrer rigoureusement un théorème d'homogénéisation. On rappelle l'inégalité de Poincaré (uniforme en ϵ) suivante: il existe $C > 0$ tel que

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq C\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega_\epsilon)^N} \quad \forall\, \phi \in H^1(\Omega_\epsilon) \cap H_0^1(\Omega).$$

1. Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que la solution u_ϵ de (1) vérifie

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)^N} + \sqrt{\epsilon}\|u_\epsilon\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5}$$

2. Rappeler les résultats du cours sur la structure de la limite à deux échelles d'une suite u_ϵ vérifiant l'estimation a priori (5).

3. Soit une fonction test régulière $\phi_1(x,y)$, à support compact en x dans Ω et Y-périodique. Montrer qu'il existe au moins une fonction vectorielle $\theta(x,y)$ qui vérifie (avec le même support compact en x)

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mathrm{div}_y\theta(x,y) = 0 & \text{dans } Y^*, \\ \theta(x,y)\cdot n = G(\phi_1)(x,y) & \text{sur } \Gamma, \\ y \ \to \ \theta(x,y) & Y\text{-périodique.} \end{array}\right.$$

4. En multipliant (1) par une fonction test $\epsilon\phi_1(x,\frac{x}{\epsilon})$, trouver le problème de cellule. On utilisera d'abord le développement de Taylor (2) pour ϕ_1 avant de lui appliquer l'opérateur G_ϵ, puis la question précédente pour $x = x_\epsilon^p$.

5. En multipliant (1) par une fonction test du type $\phi(x) + \epsilon\phi_1(x,\frac{x}{\epsilon})$, avec ϕ régulière à support compact dans Ω et avec ϕ_1 explicitement donné par

$$\phi_1(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial\phi}{\partial x_k}(x) w_k(y)$$

où les w_k sont les solutions des problèmes de cellule, trouver le problème homogénéisé. On utilisera encore le développement de Taylor (2) pour ϕ, ϕ_1 avant de lui appliquer l'opérateur G_ϵ, ainsi que l'équation du problème de cellule pour $w_k(y)$.

   Montrer que le problème homogénéisé a une solution unique et en déduire la convergence de toute la suite u_ϵ.