Ecole Polytechnique
Approximation numérique et Optimisation (MAP 411)
Mini-Projet

MODÉLISATION D'UNE CORDE ÉLASTIQUE À L'ÉQUILIBRE

Proposé par Flore Nabet
flore.nabet@polytechnique.edu

1 Résolution d'un problème elliptique

On considère une corde tendue de longueur 1, fixée à ses deux extrémités, initialement au repos représentée par le segment $[0,1]$. On suspend une charge sur la corde et on note $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction qui représente le champ de forces exercé sur la corde par le poids de la charge.
La fonction $x \mapsto u(x)$ représente le déplacement vertical de la corde par rapport à sa position au repos. On suppose que la corde n'est pas homogène et donc que sa raideur k dépend de la position x sur la corde.

L'objectif de cette partie est de trouver la position $(x, u(x))$, $x \in [0,1]$, de la corde à l'équilibre sous l'hypothèse de petits déplacements.
La configuration u de la corde à l'équilibre est l'unique fonction vérifiant les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$ (ce qui traduit le fait que la corde est fixée à ses extrémités) et qui minimise l'énergie suivante :

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 k(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x)\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)u(x)\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que s'il existe $u \in X = \{v \in \mathcal{C}^2([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}$ tel que $E(u) = \inf_{v\in X} E(v)$, alors cette solution est unique.

On admet le résultat suivant :
Théorème

Soient $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $k \in \mathcal{C}(|0,1],\mathbb{R})$ *telle que* $\inf_{[0,1]} k > 0$ *alors :*

$$\exists! u \in X, \forall v \in V, E(u) \leq E(v). \tag{1}$$

2. Sous les hypothèses du Théorème, montrer que l'unique solution du problème (1) est aussi solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x)\right) = f(x),\ \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

3. Montrer que le problème (2) a une unique solution en la calculant.
4. En utilisant le théorème de Fubini montrer que l'unique solution de (2) s'écrit :

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\mathrm{d}y,\ \forall x \in [0,1],$$

où $G : [0,1] \mapsto G(x,y)$ est une fonction à déterminer.
En déduire le principe du maximum continu : si $f \geq 0$ alors $u \geq 0$.

Indication : Utiliser le théorème de Fubini pour montrer que $u(x)$ s'écrit :

$$u(x) = \frac{1}{\int_0^1 h}\Bigg[\left(\int_0^1\left(\int_y^1 h(t)\mathrm{d}t\right) f(y)\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^x h(t)\mathrm{d}t\right) \\ - \left(\int_0^x\left(\int_y^x h(t)\mathrm{d}t\right) f(y)\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t\right)\Bigg],$$

puis utiliser que $\int_y^x h(t)\mathrm{d}t = \int_y^1 h(t)\mathrm{d}t - \int_x^1 h(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t = \int_0^x h(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 h(t)\mathrm{d}t$, où h est une fonction à déterminer.

5. On cherche maintenant à approcher la solution du problème (2) par un schéma aux différences finies sur un maillage uniforme de l'intervalle $[0,1]$ en posant $x_i = i\Delta x$ pour $i \in \{0,\cdots,N+1\}$ et $\Delta x = \frac{1}{N+1}$. On propose le schéma suivant :

$$-\frac{k\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} - k\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = f(x_i),\ \forall i \in \{1,\cdots,N\}, \tag{3}$$

avec $u_0 = u_{N+1} = 0$.

   (a) Démontrer que ce schéma est consistant avec le problème (2) et préciser l'ordre de consistance en norme $\|\cdot\|_\infty$. On supposera k aussi régulière que nécessaire.

   (b) Ecrire le schéma sous la forme d'un système linéaire $AU = F$ en précisant la matrice A. Programmer ce schéma et le tester pour diverses fonctions k et diverses solutions u.

   (c) Démontrer que ce schéma vérifie le principe du maximum discret, c'est à dire montrer que si $F \geq 0$ alors $U \geq 0$.
   En déduire que celui-ci admet une unique solution pour toute donnée f.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde en supposant que $\min u_i < 0$ et considérer le plus petit indice i_0 pour lequel le minimum est atteint.

   (d) Mettre en évidence numériquement la stabilité L^∞ du schéma.

6. On suppose maintenant que l'on ne connaît les valeurs de la fonction k qu'aux points $(x_i)_i$ du maillage. Proposer un schéma aux différences finies qui n'utilise que ces valeurs de la fonction k.

2 Résolution d'un problème de minimisation

On souhaite maintenant s'assurer que la présence de la charge n'entraîne pas la rupture des points d'attache. On admet que les forces exercées par la corde en tension sur les deux points d'attache sont respectivement données par :

$$F_0 = k(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0) \quad \text{et} \quad F_1 = k(1)\frac{\partial u}{\partial x}(1),$$

où u est la position d'équilibre de la corde.
L'énergie de rupture associée est alors définie par la quantité suivante :

$$R = \frac{1}{2}\left|k(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|k(1)\frac{\partial u}{\partial x}(1)\right|^2.$$

On considère une fonction $p \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ à support dans $[-\ell,\ell]$, avec $0 < \ell < \frac{1}{2}$, qui représente le poids de la charge de longueur 2ℓ avec laquelle on va travailler. Notons que du fait de l'orientation usuelle de la gravité nous choisirons des fonctions p négatives. On note $a \in [\ell, 1-\ell]$ la position du centre de la charge, alors le champ de force f^a auquel est soumis la corde est défini par $f^a(x) = p(x-a)$.
Ainsi, à chaque valeur de a on associe une unique solution, notée u^a, du problème (2) (avec f^a comme second membre) et l'énergie de rupture associée $R(a)$.

L'objectif est maintenant de trouver la valeur de a qui va minimiser la fonctionnelle R et ainsi les risques de rupture des attaches de la corde.
Pour cela, dans un premier temps, on utilise la méthode numérique présentée en Section 1 pour déterminer une solution approchée du problème (2) et ainsi obtenir une approximation de la fonction R. Ensuite, à N fixé, on va chercher à minimiser par rapport à a la fonctionnelle R_N qui approche R et définie par :

$$\begin{aligned} R_N(a) &= \frac{1}{2}\left(k\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\frac{u_1^a-u_0^a}{\Delta x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(k\left(\frac{x_N+x_{N+1}}{2}\right)\frac{u_{N+1}^a-u_N^a}{\Delta x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(k\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\frac{u_1^a}{\Delta x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(k\left(\frac{x_N+x_{N+1}}{2}\right)\frac{u_N^a}{\Delta x}\right)^2. \end{aligned}$$

Si l'on suppose que $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ alors la dérivée de R_N s'écrit de la façon suivante :

$$R_N'(a) = \left(k\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\right)^2 \frac{u_1^a v_1^a}{\Delta x^2} + \left(k\left(\frac{x_N+x_{N+1}}{2}\right)\right)^2 \frac{u_N^a v_N^a}{\Delta x^2},$$

où V^a est l'unique solution du système linéaire :

$$AV^a = G^a \quad \text{avec} \quad V^a = \begin{pmatrix} v_1^a \\ \vdots \\ v_N^a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G^a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^a}{\partial a}(x_1) \\ \vdots \\ \frac{\partial f^a}{\partial a}(x_N) \end{pmatrix}.$$

7. Mettre en place un algorithme de gradient à pas constant ρ permettant de minimiser la fonction R_N et de trouver une valeur approchée du minimum.
8. En prenant

$$p(x) = -\lambda e^{-(\lambda x)^2} \quad \text{avec } \lambda = 20 \qquad \text{et} \qquad k(x) = 1 + 0.8\sin(10x)\cos(5x),$$

   calculer la position optimale de la charge ainsi que l'énergie de rupture minimale (on pourra choisir $N = 100$ et initialiser l'algorithme de gradient avec $a_0 = 0.5$ par exemple).
   Tracer alors la position de la corde au point minimum.
   On pourra également tracer la fonction R_N en fonction de a afin de vérifier la solution obtenue.
9. Commenter la méthode de gradient utilisée, discuter le choix du pas de descente. Cette discussion pourra être illustrée par des résultats numériques faisant intervenir différentes valeur du pas ρ.
10. Question facultative : Proposer une méthode alternative.