Equation des ondes avec amortissement fractionnaire

Responsable : Houssem Haddar

houssem.haddar@inria.fr

1 Modèle de Webster–Lokshin

La musicalité d'un instrument est fortement liée à la manière avec laquelle les harmoniques générées par celui-ci sont amorties en temps. Nous nous intéressons dans ce projet au cas des instruments à vent pour lesquels la modélisation de cet amortissement se fait via l'introduction d'un terme de dissipation proportionnel à une dérivée fractionnaire en temps de la pression : modèle de Webster–Lokshin.

Pour simplifier nous nous plaçons dans le cas d'un instrument axisymétrique d'axe Oz située entre $z = 0$ et $z = 1$ et on note $r(z)$ le rayon de la section en z (satisfaisant $0 < r_0 \leq r(z) \leq r_1 < \infty$). Après une mise à l'échelle adéquate, le potentiel de vitesse ϕ dans l'instrument vérifie

$$(1 + a(z)\,\partial_t^{-\beta})\partial_t^2\phi + b(z)\partial_t\phi - \frac{1}{r^2(z)}\partial_z(r^2(z)\,\partial_z\phi) = 0, \tag{1}$$

pour $t > 0$ et $z \in (0, 1)$, où le paramètre $\beta \in]0, 1[$ et les fonctions a et $b \in L^\infty(0, 1; \mathbb{R}^+)$. Le terme en $\partial_t^{-\beta}$ modélise les pertes visco-thermiques sur les parois latérales de l'instrument. Il s'agit d'une dérivée fractionnaire (de Riemann-Liouville) d'ordre $-\beta$ définie comme suit

$$(\partial_t^{-\beta} f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}}\, d\tau. \tag{2}$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler. L'équation (1) peut être formulée comme un système du premier ordre pour les variables (p, v) où $p := \partial_t\phi$ désigne la pression et $v := -r^2\,\partial_z\phi$ désigne la vitesse volumique moyenne. Ainsi

$$\partial_t p = -r^{-2}\,\partial_z v - b\,p - a\,\partial_t^{-\beta}(\partial_t p)\ , \tag{3}$$

$$\partial_t v = -r^2\,\partial_z p\ , \tag{4}$$

pour $t > 0$ et $z \in (0, 1)$. On supposera que l'état initial est au repos,

$$p(z, t = 0) = v(z, t = 0) = 0$$

et on se donne les conditions aux limites suivantes

$$p_0(t) := p(z = 0,\, t) = u(t)\ , \tag{5}$$

$$v_1(t) := v(z = 1,\, t) = 0. \tag{6}$$

où la fonction causale $u(t)$ désigne la pression exercée à l'entrée de l'instrument et constitue la donnée du problème. La quantité d'intérêt serait la pression $p(z = 1, t)$ à la sortie de l'instrument.

2 Discrétisation du modèle sans dérivées fractionnaires

On s'intéresse dans cette section au modèle sans dérivées fractionnaires, c.à.d. on prend $a = 0$. Nous proposons d'étudier un schéma de différences finis centrées associé au système (3-4).

On note par Δt et $h = 1/N$ respectivement les pas de discrétisation (uniforme) en temps et en espace avec N désignant le nombre de points de discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$. On note $z_i = ih$, $z_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})h$ et on introduit

$$p_i^n \approx p(ih, n\Delta t);\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \approx v((i + \tfrac{1}{2})h, (n + \tfrac{1}{2})\Delta t).$$

Le schéma de discrétisation que l'on propose pour (3-4) s'écrit sous la forme

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{r^2(z_i)} \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} - b(z_i) \frac{p_i^{n+1} + p_i^n}{2} \tag{7}$$

pour $n > 0$ et $0 < i \leq N$ et

$$\frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -r^2(z_{i+\frac{1}{2}}) \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h}. \tag{8}$$

Les conditions aux limites sont prises en compte sous la forme

$$v_N^{n+\frac{1}{2}} := (v_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + v_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})/2 = 0$$

et

$$p_0^n = u(n\Delta t)$$

où u désigne le terme source.

Remarquer que nous avons introduit dans ce schéma une variable (de calcul) intermédiaire $v_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ pour la prise en compte de la condition aux limites. Cette variable intervient aussi dans (7) pour $i = N$.

Question 1 : Montrer que le schéma numérique est d'ordre 2 en temps et en espace.
Introduisons l'énergie discrète

$$E^n = \frac{h}{2} \left(\sum_{i=0}^{N-1} |r(z_i)\, p_i^n|^2 + \frac{1}{r(z_{i+\frac{1}{2}})^2} v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\, v_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) + \frac{h}{4} |r(z_N)\, p_N^n|^2 . \tag{9}$$

Question 2 : Montrer que dans la cas $b = 0$ et $u = 0$ cette énergie est conservée

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = 0 \tag{10}$$

Que devient cette identité lorsque $b \neq 0$?

On pose $\gamma = \max \left\{ r(z_{i+\frac{1}{2}})/r(z_{i+1}),\ r(z_{i+\frac{1}{2}})/r(z_i),\ \ i = 1, \cdots, N-1 \right\}$

Question 3 : Montrer que sous la condition CFL : $\gamma\Delta t < h$, il existe une constante C indépendante de n, Δt et h tel que

$$E^n \geq Ch\left(\sum_{i=1}^{N}|r(z_i)\,p_i^n|^2 + \left|(v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}})/2r(z_{i-\frac{1}{2}})\right|^2\right).$$

En déduire que le schéma est stable sous la condition CFL.

Question 4 : Implémenter le schéma numérique explicité dans cette section. On pourra se limiter au cas $r(z)$ et $b(z)$ constants.
On pourra choisir pour u un signal gaussien de la forme

$$u(t) = e^{-2\pi\sigma^2(t-T_0)^2} \quad t \in (0, 2T_0)$$

et $u(t) = 0$ sinon.
Représenter $t \mapsto p(z = 1, t)$ et vérifier la conservation de l'énergie discrète E^n dans le cas $b = 0$. (Exemple de choix de paramètres : $CFL = 0.99$, $\sigma = 4$, $N = 100$).

3 Représentations diffusives des dérivées fractionnaires

On appelle fonction causale f toute fonction vérifiant $f(t) = 0$ pour $t \leq 0$. Tel que définie, la dérivée fractionnaire d'une fonction causale f n'est autre que la convolution avec le noyau causal

$$h_\beta(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1} \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

La transformée de Laplace de ce noyau est égale à $G_\beta\, \xi^{-\beta}$ avec $G_\beta := \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)} = \frac{\sin\beta\pi}{\pi}$, c.à.d.

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{(t-\tau)^{1-\beta}} = G_\beta \int_0^\infty e^{-\xi\,(t-\tau)}\xi^{-\beta}\, d\xi, \tag{11}$$

pour $t > \tau$. Soit $f \in L^2([0,T])$, on définit $\theta^{[\beta]}(f) \in L^2([0,T])$ par

$$\theta^{[\beta]}(f)(t) := G_\beta \int_0^\infty \varphi(\xi, t)\, \xi^{-\beta}\ d\xi, \tag{12}$$

où pour tout $\xi \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(\xi, .)$ est solution de

$$\partial_t\varphi(\xi, t) = -\xi\varphi(\xi, t) + f(t),\ t > 0, \tag{13}$$

$$\varphi(\xi, 0) = 0. \tag{14}$$

Question 5 : Montrer que $\theta^{[\beta]}(f) = \partial_t^{-\beta} f$ et que l'on a la balance d'énergie

$$\int_0^T f\, \theta^{[\beta]}(f)\, dt = E_\varphi(T) + G_\beta \int_0^T |\varphi|^2\, \xi^{1-\beta}\, d\xi\, dt \tag{15}$$

où l'on a posé

$$E_\varphi := \frac{G_\beta}{2}\int_0^\infty |\varphi|^2\, \xi^{-\beta}\, d\xi.$$

On dit que (12) réalise une représentation diffusive de la dérivée fractionnaire $\partial_t^{-\beta}$. L'intérêt d'une telle représentation est d'ordre numérique (Voir section suivante). En particulier, afin d'évaluer $\partial_t^{-\beta}$ on préfère utiliser une discrétisation de l'intégrale (12) plutôt que de la convolution (2). La raison (formelle) étant que le coût d'évaluation de (12) est indépendant de t alors que celui de (2) l'est. La méthode de représentation diffusive est donc potentiellement avantageuse (en terme de coût numérique) pour les temps longs.

Question 6 : Montrer que le même système dynamique (13-14) avec la sortie

$$\widetilde{\theta}^{[1-\beta]}(f)(t) := G_\beta \int_0^\infty [f(t) - \xi\, \varphi(\xi, t)]\ \xi^{-\beta}\ d\xi, \tag{16}$$

réalise une représentation diffusive de la dérivée fractionnaire $\partial_t^{1-\beta}$, c.à.d.

$$\widetilde{\theta}^{[1-\beta]}(f)(t) = \partial_t^{-\beta}(\partial_t f)$$

pour une fonction causale $f \in H^1((-\infty, T])$. Montrer que l'on a la balance d'énergie

$$\int_0^T f\, \widetilde{\theta}^{[1-\beta]}(f)\, dt = \widetilde{E}_\varphi(T) + G_\beta \int_0^T \int_0^{+\infty} (f - \xi\, \varphi)^2\, \xi^{-\beta}\, dt\ . \tag{17}$$

où l'on a posé

$$\widetilde{E}_\varphi := \frac{G_\beta}{2} \int_0^\infty |\varphi|^2\, \xi^{1-\beta}\, d\xi.$$

3.1 Stabilité du modèle

On réécrit l'équation (3) à l'aide de la représentation diffusive

$$\partial_t^{-\beta}(\partial_t p)(z, t) = \widetilde{\theta}^{[1-\beta]}(p)(z, t) \tag{18}$$

où pour $t > 0$ et $z \in (0, 1)$, $\widetilde{\theta}^{[1-\beta]}(p)(z, t)$ est définie par (16) avec $\varphi(\xi, z, t)$ solution de

$$\partial_t \varphi(\xi, z, t) = -\xi \varphi(\xi, z, t) + p(z, t),\ t > 0, \tag{19}$$

$$\varphi(\xi, z, 0) = 0 \tag{20}$$

Question 7 : En admettant l'existence de solutions régulières p, v, φ, montrer que l'identité d'énergie suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 |p(z,t)|^2 r^2(z)\, dz + \frac{1}{2}\int_0^1 |v(z,t)|^2 r^{-2}(z)\, dz + \int_0^1 a(z) \widetilde{E}_\varphi(z,t)\, r^2(z)\, dz\right) \\ &\quad = -\int_0^1 G_\beta \int_0^\infty |p - \xi\, \varphi|^2 \xi^{-\beta} d\xi\, a(z)\, r^2(z)\, dz - \int_0^1 |p|^2 b(z)\, r^2(z)\, dz + v(z=0,t)\, u(t). \end{aligned} \tag{21}$$

4 Discrétisation numérique du modèle complet

4.1 Discrétisation des représentations diffusives

On appelle une formule de quadrature associée à (12) la donnée d'une suite de noeuds ξ_j et de poids $\rho_j(\beta)$, $j = 1, ..., N_\xi$ tel que

$$G_\beta \int_0^\infty \psi(\xi)\, \xi^{-\beta}\; d\xi \approx \sum_{j=1}^{N_\xi - 1} \rho_j(\beta)\psi(\xi_j)$$

Un choix communément utilisé pour l'évaluation des représentations diffusives et de définir les noeuds de quadratures comme une suite géométrique

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_j = \left(\frac{\xi_M}{\xi_m}\right)^{\frac{j-1}{N_\xi - 1}} \xi_{m};\; j = 1, \cdots, N_\xi$$

définie par les paramètres ξ_M, ξ_m et N_ξ.

Question 8 : Calculer les poids $\rho_j(\beta)$ associés à ce choix de noeuds pour que l'intégrale soit exacte pour les fonctions ψ continues affines sur les intervalles (ξ_j, ξ_{j+1}) et nulles pour $\xi \geq \xi_M$. On pourra vérifier que dans ce cas

$$\rho_j(\beta) = G_\beta \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_{j+1}} \hat{\psi}_j(\xi)\, \xi^{-\beta}\, d\xi$$

où la fonction $\hat{\psi}_j$ est la fonction affine sur chaque intervalle et valant 1 en ξ_j et 0 en $\xi_{j'}$, $j' \neq j$.

Question 9 : Discuter la précision de cette quadrature suivant le choix de ξ_M, ξ_m et N_ξ et suivant la valeur de β. On pourra prendre comme exemple $f(t) = t$ pour $t > 0$, calculer explicitement $\theta^{[\beta]}(f)$, $\varphi(\xi, t)$ et évaluer numériquement

$$\theta^{[\beta]}(f) := \sum_{j=1}^{N_\xi} \rho_j(\beta)\, \varphi(\xi_j, t).$$

4.2 Discrétisation du modèle de Webster-Lokshin

Pour tenir compte du terme diffusif on modifie l'équation (7) sous la forme

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{r^2(z_i)}\, \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} - b(z_i)\, \frac{p_i^{n+1} + p_i^n}{2} - a(z_i)\, (\partial_t^{1-\beta} p_i)^{n+\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

pour $n > 0$ et $0 < i \leq N$, où $(\partial_t^{1-\beta} p_i)^{n+\frac{1}{2}}$ désigne une approximation de $(\partial_t^{1-\beta} p_i)$ à $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$. Motivé par l'identité d'énergie du modèle continu (21), nous choisissons d'évaluer $(\partial_t^{1-\beta} p_i)^{n+\frac{1}{2}}$ sous la forme

$$(\partial_t^{1-\beta} p_i)^{n+\frac{1}{2}} = \left(\tilde{\theta}_i^{n+1} + \tilde{\theta}_i^n\right)/2\,,$$

où $\tilde{\theta}_i^n$ désigne une certaine approximation de $\widetilde{\theta}^{[1-\beta]}(p_i)(n\Delta t)$. Cette approximation est obtenue en utilisant la formule de quadrature proposée ci-haut. Plus précisément, on pose

$$\tilde{\theta}_i^n = \sum_{j=1}^{N_\xi} \rho_j(\beta)(p_i^n - \xi_j \varphi_{i,j}^n)\,, \tag{23}$$

avec $\varphi_{i,j}^n \approx \varphi(\xi_j, z_i, n\Delta t)$. Pour calculer $\varphi_{i,j}^n$, nous discrétisons l'équation différentielle (20) suivant le schéma numérique

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = e^{-\xi_j \Delta t}\varphi_{i,j}^n + \frac{1 - e^{-\xi_j \Delta t}}{\xi_j}\frac{p_i^{n+1} + p_i^n}{2}\,, \tag{24}$$

Question 10 : Programmer le nouveau schéma. On considère la cas $b = 0$ et $a \neq 0$ (par exemple $a = 0.4$ et $\beta = 1/2$). Calibrer les paramètres de discrétisation de la représentation diffusive pour assurer une bonne précision de la solution obtenue (expliciter la démarche adoptée pour s'assurer de la convergence de l'algorithme numérique).

Question 11 : Vérifier la décroissance de l'énergie dans les cas $b \neq 0$ (par exemple $b = 0.001$) et/ou $a \neq 0$. Comparer l'allure de la solution dans les cas $a \neq 0$ et $a = 0$. Quel phénomène physique illustre l'allure de la solution dans le cas $a \neq 0$. Comment évolue ce phénomène par rapport à β.