

# Masse ajoutée en interaction-fluide structure

Jean-Frédéric Gerbeau \*

1<sup>er</sup> novembre 2016

Quand on cherche à simuler certains phénomènes d'interaction fluide-structure, comme l'interaction mécanique entre l'écoulement du sang et la paroi de grosses artères, on rencontre parfois des instabilités numériques assez surprenantes. Le but de ce projet est de les mettre en évidence et de les expliquer sur un modèle simplifié. La section 3 permet de comprendre par une analyse théorique des observations numériques faites dans la section 2. Mais ces deux parties peuvent, dans une large mesure, se traiter indépendamment.

## 1 Modélisation

Le fluide s'écoule dans un domaine  $\Omega_f = ]0, L[ \times ]0, R[ \subset \mathbb{R}^2$  (Fig. 1) dont la frontière est subdivisée en  $\Gamma_f^1$  (entrée),  $\Gamma_f^2$  (sortie),  $\Gamma_f^3$  (axe de symétrie) et  $\Sigma$  (interface fluide-structure). On pose  $\Gamma_f = \Gamma_f^1 \cup \Gamma_f^2$  et on note  $\mathbf{n}_f$  la normale sortante. On suppose le fluide incompressible, non visqueux

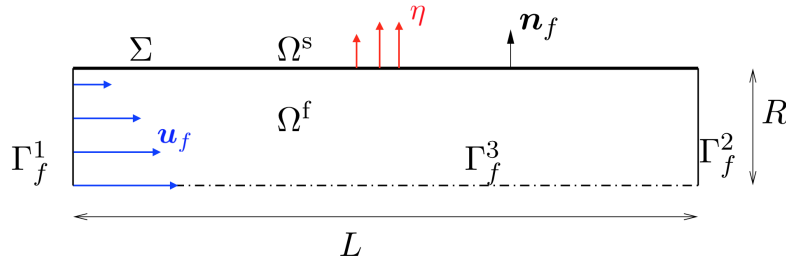


FIGURE 1 – Domaine de calcul pour le fluide (2D) et la structure (1D).

et on néglige les non linéarités. De plus, on suppose les déplacements de la structure infinitésimaux, de sorte que  $\Omega_f$  est supposé fixe. Le problème fluide consiste à chercher, pour  $(x, y, t) \in \Omega_f \times ]0, T[$  avec  $T > 0$  donné, la vitesse  $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_f(x, y, t)$  et la pression  $p = p(x, y, t)$  telles que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega_f \times ]0, T[, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_f = 0 & \text{dans } \Omega_f \times ]0, T[, \\ p = \bar{p} & \text{sur } (\Gamma_f^1 \cup \Gamma_f^2) \times ]0, T[, \\ \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f = 0 & \text{sur } \Gamma_f^3 \times ]0, T[, \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $\rho_f$  est la masse volumique du fluide, et  $\bar{p}$  est une fonction donnée sur  $]0, T[$ .

Le domaine  $\Omega_s$  occupé par la structure est tel que  $\bar{\Omega}_s = [0, L] = \Sigma$  (structure mince). Pour décrire de manière simplifiée le déplacement  $\eta = \eta(x, t)$  de la structure dans la direction de  $\mathbf{n}_f$ ,

\*Inria Paris, jean-frederic.gerbeau@inria.fr

on utilise une équation des cordes généralisée :

$$\begin{cases} \rho_s h_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + a\eta - b \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega_s \times ]0, T[, \\ \eta(0, t) = \eta(L, t) = 0, & \text{dans } ]0, T[. \end{cases} \quad (2)$$

où  $\rho_f$  et  $h_s$  sont respectivement la masse volumique et l'épaisseur de la structure,  $a = Eh_s/R^2(1 - \nu^2)$ ,  $E$  étant le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson,  $b$  un coefficient de cisaillement, et  $f$  la force extérieure venant du fluide. Les équations sont complétées par les conditions initiales :

$$\mathbf{u}_f(x, y, 0) = 0 \text{ dans } \Omega_f, \quad \eta(x, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, 0) = 0 \text{ dans } \Omega_s. \quad (3)$$

Les équations fluide et structure sont couplées par les relations :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f = \frac{\partial \eta}{\partial t} & \text{sur } \Sigma, \\ f = p & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (4)$$

**Question 1.** Vérifier que le problème fluide peut se reformuler ainsi :

$$\begin{cases} -\Delta p = 0 & \text{dans } \Omega_f \times ]0, T[, \\ p = \bar{p} & \text{sur } (\Gamma_f^1 \cup \Gamma_f^2) \times ]0, T[, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_f} = 0 & \text{sur } \Gamma_f^3 \times ]0, T[, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_f} = -\rho_f \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} & \text{sur } \Sigma \times ]0, T[. \end{cases} \quad (5)$$

On supposera toutes les fonctions suffisamment régulières pour justifier les calculs. On note  $(\cdot, \cdot)_{L^2}$  les produits scalaires  $L^2(\Omega_f)$  ou  $L^2(\Omega_s)$  et on définit les formes bilinéaires :

$$a_f(p, q) = \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \nabla q \, dx \, dy, \quad a_s(\eta, \xi) = \int_{\Omega_s} a \eta \xi \, dx + \int_{\Omega_s} b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \, dx.$$

**Question 2.** Vérifier formellement que le problème d'interaction fluide-structure peut s'écrire sous la forme variationnelle suivante : chercher  $(p(t), \eta(t))$  tel que (3) est vérifié,  $p(t)|_{\Gamma_f^1 \cup \Gamma_f^2} = \bar{p}(t)$ ,  $\forall t \in ]0, T[$  et pour tout  $(q, \xi) \in Q \times V$ , où  $Q = \mathcal{C}^0(\Omega_f)$  et  $V = \mathcal{C}^1(\Omega_f)$ ,

$$\begin{cases} a_f(p, q) = -\rho_f \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} q, \\ \left( \rho_s h_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \xi \right)_{L^2} + a_s(\eta, \xi) = (p|_{\Sigma}, \xi)_{L^2}. \end{cases} \quad (6)$$

## 2 Simulation numérique

Dans la pratique, les équations pour le fluide et pour le solide sont naturellement bien plus complexes que (2) et (5), et il est fréquent qu'on les résolve numériquement avec des programmes totalement différents. Nous allons donc considérer un schéma numérique de couplage dit *partitionné*, c'est-à-dire pour lequel les deux équations sont résolues séparément. Plus précisément, on va s'intéresser à un algorithme de couplage partitionné *explicite*, c'est-à-dire, dans lequel à chaque pas de temps, le fluide et le solide ne sont résolus qu'une fois avec les informations disponibles, provenant généralement du pas de temps précédent. Les conditions de couplage (4) ne sont donc

imposées que de manière “décalée” en temps. Bien sûr, il serait possible ici de résoudre simultanément les deux équations du système (6), mais l’idée est de reproduire dans un cadre simplifié un type de schéma numérique utilisé dans des cas plus compliqués où la résolution simultanée n’est pas envisageable.

Pour simplifier, on suppose que  $b = 0$  dans (2). On considère le schéma de discrétisation en temps suivant, où  $\delta t$  désigne le pas de temps :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{\mathbf{u}_f^n - \mathbf{u}_f^{n-1}}{\delta t} + \nabla p^n = 0 & \text{dans } \Omega_f, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_f^n = 0 & \text{dans } \Omega_f, \\ p^n = \bar{p}(t^n) & \text{sur } \Gamma_f^1 \cup \Gamma_f^2, \\ \mathbf{u}_f^n \cdot \mathbf{n}_f = 0 & \text{sur } \Gamma_f^3, \end{array} \right. \quad (7)$$

et

$$\mathbf{u}_f^n \cdot \mathbf{n}_f = \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{\delta t} \quad \text{sur } \Sigma, \quad (8)$$

$$\rho_s h_s \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\delta t^2} + a\eta^n = p^n \quad \text{dans } \Omega_s. \quad (9)$$

Remarquer que si le déplacement de la paroi  $\eta$  est connu jusqu’au temps  $t^n$  et la vitesse  $\mathbf{u}_f$  jusqu’au temps  $t^{n-1}$ , l’équation du fluide (7) avec la condition aux limites (8) permet de calculer la vitesse  $\mathbf{u}_f^n$  et la pression  $p^n$ . Une fois cette dernière connue, on peut résoudre l’équation de structure (9) pour obtenir le déplacement  $\eta^{n+1}$  au temps  $t^{n+1}$ .

Comme précédemment, on peut reformuler (7) de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta p^n = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p^n}{\partial \mathbf{n}_f} = -\rho_f \frac{(\mathbf{u}_f^n - \mathbf{u}_f^{n-1}) \cdot \mathbf{n}_f}{\delta t} = -\rho_f \frac{\eta^n - 2\eta^{n-1} + \eta^{n-2}}{\delta t^2} & \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial p^n}{\partial \mathbf{n}_f} = 0 & \text{sur } \Gamma_f^3 \\ p^n = \bar{p}(t^n) & \text{sur } \Gamma_f. \end{array} \right. \quad (10)$$

**Question 3.** Discrétiser en espace le problème (10) à l’aide de la méthode des différences finies et implémenter le schéma numérique (9)-(10).

*Indication :* l’expression de la matrice du Laplacien 2D discrétisé par différences finies se trouve dans le polycopié du cours. La prise en compte de conditions de Dirichlet non nulles ne pose pas de difficulté : il suffit de remplacer l’inconnue par sa valeur et la mettre au second membre.

Pour la condition de Neumann, on utilisera la méthode suivante. Supposons qu’on veuille imposer  $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_f}(x, R) = \frac{\partial p}{\partial y}(x, R) = g(x)$ , où  $g$  est une fonction donnée. On a :

$$\begin{aligned} p(x, R - \delta y) &= p(x, R) - \delta y \frac{\partial p}{\partial y}(x, R) + \frac{\delta y^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(x, R) + \mathcal{O}(\delta y^3) \\ &= p(x, R) - \delta y g(x) - \frac{\delta y^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x, R) + \mathcal{O}(\delta y^3). \end{aligned}$$

Le terme  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x, R)$  sera alors approché par la formule de différences finies classique.

Dans les grosses artères, l’élasticité de la paroi est responsable de la propagation d’une onde de pression (c’est la raison pour laquelle on sent le pouls). Des artères malades sont généralement plus rigides, ce qui se traduit par une vitesse de propagation plus élevée (élément de diagnostic connu

depuis longtemps en médecine chinoise!). Les expériences numériques qu'on va réaliser permettent de rendre compte de ces phénomènes, d'une manière évidemment idéalisée. Ils vont aussi mettre en évidence un problème numérique inattendu.

On considère les paramètres suivants pour les simulations numériques :  $R = 1$  cm,  $L = 6$  cm,  $h_s = 0.1$  cm,  $\rho_f = 1$  g/cm<sup>3</sup>,  $E = 0.75 \cdot 10^6$  dynes/cm<sup>2</sup>,  $\nu = 0.5$ . La pression  $\bar{p}$  est nulle sur la sortie  $\Gamma_f^2$ . Sur l'entrée  $\Gamma_f^1$ ,  $\bar{p}$  vaut  $2 \cdot 10^4$  dynes/cm<sup>2</sup> (soit environ environ 15 mmHg) de  $t = 0$  à  $t = 0.005$  s, ensuite elle vaut 0.

**Question 4.** Observer le comportement du schéma pour différentes valeurs de la densité de structure  $\rho_s$ . La valeur dans le cas des artères est de l'ordre de 1 g/cm<sup>3</sup>, mais on considèrera aussi des valeurs très différentes pour voir leur effet, certaines valeurs devant conduire à des comportements instables. Pour une valeur de  $\rho_s$  qui donne une simulation stable, mais proche de l'instabilité, faire varier la longueur  $L$  du domaine. Qu'observe-t-on ?

**Question 5.** Quand le schéma est instable, est-ce que réduire le pas de temps change significativement le comportement ? En quoi ce comportement est-il surprenant quand on le compare aux schémas numériques explicites vus en cours, par exemple pour l'équation d'advection ?

La section suivante va fournir des explications à ces observations.

### 3 Analyse de stabilité

Pour toute fonction  $w$  régulière définie sur  $\Sigma$ , on note  $\mathcal{R}w$  la solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathcal{R}w = 0 & \text{dans } \Omega_f, \\ \mathcal{R}w = 0 & \text{sur } \Gamma_f^1 \cup \Gamma_f^2, \\ \frac{\partial \mathcal{R}w}{\partial \mathbf{n}_f} = 0 & \text{sur } \Gamma_f^3, \\ \frac{\partial \mathcal{R}w}{\partial \mathbf{n}_f} = w & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (11)$$

On définit l'opérateur  $\mathcal{M}_A$  de *masse ajoutée* par :

$$\mathcal{M}_A w = \mathcal{R}w|_{\Sigma}. \quad (12)$$

L'opérateur  $\mathcal{M}_A$  est aussi appelé opérateur (inverse) de Steklov-Poincaré ou opérateur Neumann-Dirichlet.

**Question 6.** Montrer que, pour  $v$  et  $w$  définies sur  $\Sigma$ ,  $(\mathcal{M}_A w, v)_{L^2} = a_f(\mathcal{R}w, \mathcal{R}v)$ . En déduire que  $\mathcal{M}_A$  est symétrique et positif.

On introduit un opérateur de relèvement  $\mathcal{E}_F$  qui a une fonction  $q$  définie sur  $\Gamma_f$  associe une fonction  $\mathcal{E}_F q$  définie sur  $\Omega_f$  telle que  $\mathcal{E}_F q|_{\Gamma_f} = q$ . On supposera que  $\mathcal{E}_F q$  possède toutes les propriétés de régularité justifiant les calculs.

**Question 7.** Construire  $p^*$  telle que la solution de (5) soit donnée par

$$p = p^* + \mathcal{E}_F \bar{p} - \rho_f \mathcal{R} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \quad (13)$$

On introduit l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini par  $(\mathcal{L}\eta, \xi) = a_s(\eta, \xi)$  pour  $\eta, \xi \in V$ . Avec cette notation, le problème de structure peut s'écrire :

$$\rho_s h_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \mathcal{L}\eta = p|_{\Sigma}. \quad (14)$$

**Question 8.** Si  $\mathcal{I}$  désigne l'opérateur identité, et  $p_{ext} = p^*|_{\Sigma} + \mathcal{E}_F \bar{p}|_{\Sigma}$ , vérifier que le problème fluide-structure (6) s'écrit :

$$(\rho_s h_s \mathcal{I} + \rho_f \mathcal{M}_A) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \mathcal{L} \eta = p_{ext}. \quad (15)$$

Remarquer que l'équation (15) ressemble à l'équation de structure (14) à laquelle on a ajouté l'opérateur  $\rho_f \mathcal{M}_A$ . Celui-ci représente l'interaction avec le fluide et agit comme une masse supplémentaire, d'où le nom de "masse ajoutée". Remarquer que, contrairement aux opérateurs différentiels habituels ( $\nabla, \Delta$ , etc.), il s'agit d'un opérateur non local : il ne suffit pas de connaître  $w$  dans un voisinage de  $x$  pour pouvoir calculer  $\mathcal{M}_A w$  en  $x$ . En vue de l'analyse de stabilité des schémas numériques, il est utile d'étudier quelques propriétés spectrales de l'opérateur  $\mathcal{M}_A$ .

**Question 9.** Soit  $w_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ . En cherchant la solution de (11) sous la forme du produit d'une fonction de  $x$  et d'une fonction de  $y$  (séparation des variables), montrer que :

$$\mathcal{R}w_k = \frac{L}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \frac{\cosh\left(\frac{k\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi R}{L}\right)}.$$

En déduire que les  $w_k$  sont des modes propres de  $\mathcal{M}_A$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{M}_A w_k = \mu_k w_k, \quad \text{avec } \mu_k = \frac{L}{k\pi \tanh\left(\frac{k\pi R}{L}\right)}.$$

On note  $\mu_{max} = \mu_1$ . On pourra tracer  $\mu_{max}$  en fonction de  $L$  pour diverses valeurs de  $R$ . On dispose maintenant de tous les outils nous permettant d'analyser le schéma numérique précédent.

**Question 10.** Vérifier que le schéma (9)-(10) peut s'écrire :

$$\rho_s h_s \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\delta t^2} + \rho_f \mathcal{M}_A \frac{\eta^n - 2\eta^{n-1} + \eta^{n-2}}{\delta t^2} + a\eta^n = p_{ext}^n. \quad (16)$$

**Question 11.** Projeter, au sens du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ , l'équation (16) sur un mode  $w_k$ . On note  $\eta_k^n = (\eta^n, w_k)$ .

**Question 12.** Soit  $\chi$  le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence définissant la suite  $(\eta_k^n)_{n \geq 0}$ . Vérifier que

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \chi(\eta) = -\infty \quad \text{et} \quad \chi(-1) = a + \frac{4}{\delta t^2} (\rho_f \mu_k - \rho_s h_s). \quad (17)$$

En déduire que le schéma de couplage est instable quand :

$$\frac{\rho_s h_s}{\rho_f \mu_{max}} < 1.$$

Reprendre les observations faites sur le schéma numérique à la lumière de cette relation.