Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 411

Propagation d'ondes dans un canal

sujet proposé par A. de Bouard
debouard@cmap.polytechnique.fr

Les questions théoriques peuvent être rédigées sur papier et rendues a la scolarité (il est inutile de les scanner). Les courbes demandées doivent être soit imprimées et rendues en version papier, soit envoyées par courrier électronique à l'adresse ci-dessus. Elles doivent être accompagnées des commentaires requis. Les fichiers sources (.py) des programmes doivent être envoyés par courrier électronique à cette même adresse; ils doivent être exécutables sans aucune modification.

Le but de ce projet est d'étudier la propagation d'une onde dispersive dans un canal infini (de profondeur finie), en ne prenant en compte que les variations de cette onde dans la direction de la propagation, c'est à dire en négligeant les variations dans la direction transverse. Cette propagation est modélisée à l'aide de l'équation de Schrödinger non linéaire

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \lambda |u|^2 u = 0 \tag{1}$$

où ici $u = u(t,x)$ est une fonction à valeurs complexes, qui représente l'amplitude complexe de l'onde (la quantité d'intérêt est le module de u), et x est la coordonnée dans la direction de propagation (le long du canal). On ajoute à cette équation une condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$.

1. Discrétisation de l'équation linéaire par différences finies

On commence par considérer le cas où $\lambda = 0$, c'est à dire qu'on s'intéresse à l'équation

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0. \tag{2}$$

Question 1 - On suppose que u est une solution régulière de l'équation (2) avec $x \in \mathbb{R}$; exprimer la transformée de Fourier en espace de u au temps t en fonction de celle de u_0; en déduire que

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Question 2 - Discrétiser l'équation (2) à l'aide d'un θ-schéma. Dans chacun des cas $\theta = 0$, $1/2$ et 1, calculer le facteur d'amplification. Dans quel cas le schéma est il L^2-stable ?

Question 3 - Implémenter le schéma précédent pour $\theta = 1/2$ et $\theta = 1$ à l'aide d'un programme en python. On se placera sur l'intervalle $[0, L]$, avec $L = 20$ et on utilisera des conditions aux limites de Dirichlet homogènes $u(t, 0) = u(t, L) = 0$. On prendra pour pas de temps $\Delta t = (\Delta x)^2$, avec $\Delta x \sim 10^{-1}$, et pour donnée initiale $u_0(x) = e^{-\frac{(x-10)^2}{a^2}}$ pour $a = 0.5$. On tracera, dans les deux cas, sur un même graphique le module de la donnée initiale et de la solution au temps final $T = 0.8$. Calculer numériquement la norme L^2 de la solution au temps initial et au temps final, et comparer, en les commentant, les résultats obtenus pour le schéma implicite et pour le schéma de Crank-Nicolson.

2. L'équation non linéaire

On considère maintenant l'équation non linéaire (1). On supposera dans toute la suite que $\lambda = 1$.

2.1. **Etude théorique.** On suppose dans ce paragraphe que u est une solution régulière de (1) qui tend rapidement vers 0 à l'infini (en x), de même que ses dérivées.

Question 4 - a - En multipliant l'équation (1) par $\bar{u}$ et en intégrant sur $\mathbb{R}$, montrer que l'on a encore $\|u(t,.)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$ pour tout t.

Question 4 - b - En multipliant cette fois l'équation par $\partial \bar{u}/\partial t$ et en intégrant sur $\mathbb{R}$, montrer de manière similaire la conservation de l'énergie : $\mathsf{E}(t) = \mathsf{E}(0)$ où

$$\mathsf{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} |u|^4 dx.$$

On cherche alors une solution de (1) de la forme

$$u(t, x) = \varphi(x - ct)e^{i(kx - \omega t)},$$

où φ est une fonction à valeurs positives qui décroit rapidement vers 0 à l'infini. Une telle solution est appelée un soliton.

Question 5 - a - Montrer que si $c = 2k$ et si on pose $\alpha = k^2 - \omega$, alors u est solution de (1) si φ vérifie l'équation différentielle

$$\varphi'' - \alpha\varphi + \varphi^3 = 0.$$

Question 5 - b - On suppose $\alpha > 0$; en multipliant cette équation par φ' et en supposant que φ et ses dérivées tendent vers 0 rapidement à l'infini, montrer que

$$\varphi(\xi) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\mathrm{ch}(\sqrt{\alpha}\xi)}. \tag{3}$$

2.2. **Résolution numérique par un schéma de Crank-Nicolson.** On se propose dans cette partie de calculer numériquement des solutions approchées de l'équation (1) en utilisant le schéma suivant :

$$(4)\qquad \begin{aligned} & i\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}+\frac{1}{2(\Delta x)^2}(v_{j+1}^{n+1}-2v_j^{n+1}+v_{j-1}^{n+1}+v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n) \\ & +\frac{1}{4}(|v_j^n|^2+|v_j^{n+1}|^2)(v_j^n+v_j^{n+1})=0 \end{aligned}$$

où v_j^n désigne une valeur approchée de $u(t_n, x_j)$, et avec toujours les conditions de Dirichlet $v_0^n = v_{M+1}^n = 0$, pour tout n.

Question 6 - a - Montrer que si on pose $V^n = (v_1^n, v_2^n, ..., v_M^n)^t \in \mathbb{C}^M$, le schéma (4) s'écrit

$$(5)\qquad AV^{n+1} = BV^n + F(V^n, V^{n+1})$$

où l'on précisera les matrices A et B de taille M (à coefficients complexes) et le vecteur $F(V^n, V^{n+1}) \in \mathbb{C}^M$.

La mise en oeuvre du schéma non linéaire (4) nécessite à chaque itération la résolution d'un système algébrique non linéaire. Pour cela, on utilise une méthode de point fixe : on calcule à chaque pas de temps une suite d'itérées $(W_l)_{l\geq 0}$ définies par :

$$W^0 = V^n, \quad AW^{l+1} = BV^n + F(V^n, W^l), \forall l \geq 0.$$

Si cette suite, obtenue par résolution de systèmes linéaires converge dans $\mathbb{C}^M$ alors elle converge vers la solution du problème (5).

Question 6 - b - Ecrire un programme en python, qui permet de calculer la solution approchée en un temps final T, à l'aide du schéma (4) et de la méthode de point fixe précédente. On pourra utiliser comme critère d'arrêt le critère

$$\frac{\max_j |w_j^{l+1} - w_j^l|}{\max_j |w_j^1 - v_j^n|} < \varepsilon_0$$

où ε_0 est un petit paramètre par exemple ($\varepsilon_0 = 10^{-4}$).

Question 6 - c - Tester le programme précédent sur la propagation de solitons : en notant φ_α la fonction donnée par (3), on calculera la solution correspondant à $u_0(x) = \varphi_\alpha(x - x_0)e^{ikx}$ pour $k = 0, 1, 2$, et $\alpha = 5$; on ajustera le paramètre x_0 pour que le soliton reste plus longtemps dans la fenêtre de calcul, et on ajustera le temps final pour éviter les effets des conditions aux limites artificielles. On tracera à chaque fois, sur un même graphique, le module de la solution approchée et le module de la solution exacte au temps final. Commenter.

2.3. **Méthodes à pas fractionnaires.** La méthode des pas fractionnaires consiste à résoudre alternativement l'équation linéaire, et l'équation non linéaire sans le terme laplacien. Pour résoudre l'équation linéaire, on utilisera le schéma de Crank-Nicolson, et on notera $S(\Delta t)V^n$ la solution V de $AV = BV^n$ (où A et B sont les matrices de la question 6 - a) qui est donc la solution de ce schéma sur un pas de temps, partant de V^n.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'équation non linéaire sans le terme laplacien, i.e.

$$\left\{\begin{aligned} & i\partial_t v^n(t,x) = -|v^n(t,x)|^2 v^n(t,x) \text{ pour } t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t], \\ & v^n(n\Delta t, x) = v_0^n(x). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Question 7 - Montrer que la solution de (6) vérifie $|v^n(t,x)| = |v_0^n(x)|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ou tout $x \in [0,L]$) puis que cette solution s'écrit

$$v^n(t,x) = v_0^n(x)\exp(i(t - n\Delta t)|v_0^n(x)|^2).$$

Deux schémas à pas fractionnaires sont proposés :

Schéma de Lie : On pose $V_j^0 = u_0(x_j)$, puis V^n étant donné,

- Première étape : $V^{n+1/2} = S(\Delta t)V^n$
- Deuxième étape :
$$v_j^{n+1} = e^{i\Delta t|v_j^{n+1/2}|^2} v_j^{n+1/2}$$
où $V^{n+1/2} = (v_j^{n+1/2})_{0\le j\le M+1}$ et on note alors V^{n+1} le vecteur de coordonnées v_j^{n+1}.

Ce schéma consiste donc à alterner une étape linéaire et une étape non linéaire sans le laplacien.

Schéma de Strang : On pose $V_j^0 = u_0(x_j)$, puis V^n étant donné,

- Première étape : $v_j^{n+1/4} = e^{i\frac{1}{2}\Delta t|v_j^n|^2} v_j^n$
- Deuxième étape : $V^{n+3/4} = S(\Delta t)V^{n+1/4}$
- Troisième étape : $v_j^{n+1} = e^{i\frac{1}{2}\Delta t|v_j^{n+3/4}|^2} v_j^{n+3/4}$

Ce schéma consiste donc à alterner une étape linéaire encadrée par deux demi-étapes non linéaires sans le laplacien.

Question 8 - Implémenter ces deux schémas à l'aide de python. On reprendra les données de la question 6. Comme précédemment, on règlera la valeur de x_0 et le temps final de manière adéquate; tracer à nouveau sur un même graphique la solution donnée par le schéma et la solution exacte au temps final, et commenter, en comparant les deux schémas.

Question 9 - On fixe pour donnée initiale $u_0(x) = \varphi_\alpha(x)e^{ikx}$ pour $k = 0$, et $\alpha = 5$. L'erreur au temps final en norme L^2 est donnée par

$$e(T) = \Big(\sum_j |v_j^N - u(T, x_j)|^2 \Delta x\Big)^{1/2}$$

où u est la solution exacte de (1) correspondant à $u(0, x) = u_0(x)$, et $N = T/\Delta t$. En faisant varier le pas de temps Δt, (avec toujours $\Delta t = \Delta x^2$), tracer sur un même graphe les courbes donnant pour les trois schémas étudiés dans ce projet, l'erreur au temps final, en norme L^2, en fonction du pas de temps. En déduire (numériquement) l'ordre de convergence de ces schémas.