

# Simulation en cryochirurgie

Jean-Frédéric Gerbeau \*

7 novembre 2017

La cryochirurgie consiste à détruire des cellules cancéreuses par le froid. Cette technique est utilisée pour divers types de tumeurs (peau, poumon, foie, os, etc.) Le froid est produit par de l'azote liquide ou de l'argon, et mis au contact de la tumeur à l'aide d'une sonde. Dans certains cas, le cycle gel-dégel doit être répété plusieurs fois. Il est important lors du traitement de bien contrôler la position du front de congélation afin d'éliminer le maximum de cellules cancéreuses et de limiter l'endommagement des cellules saines.

Nous considérons dans ce projet un modèle extrêmement idéalisé de cryochirurgie, qui donne un petit aperçu de ce qu'on peut attendre de la simulation et de quelques difficultés qui peuvent se poser. Plus précisément, nous nous concentrons sur la manière de décrire le changement de phase dans un tissu à  $37^{\circ}C$  qui est porté à des températures très négatives.

## 1 Equation de la chaleur

Avant d'aborder la question du changement de phase, on rappelle quelques généralités sur l'équation de la chaleur et on introduit deux schémas numériques classiques utiles pour la suite. Le domaine physique  $\omega$  est supposé être un cylindre droit de hauteur  $l > 0$  et de base  $\mathcal{A}$  ( $\omega = [0, l] \times \mathcal{A}$ ).

Sur le domaine  $\omega$  et pour des temps  $t \in ]0, T[$ , où  $T > 0$ , la conservation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} \phi = 0, \quad (1)$$

où  $h$  est l'enthalpie volumique, supposée reliée à la température  $u$  par la relation  $h = \rho c u$ , où  $\rho$  est la masse volumique,  $c$  est la capacité thermique massique (ou chaleur spécifique). La densité de flux de chaleur est donnée par la loi de Fourier :  $\phi = -\kappa \nabla u$  où  $\kappa$  est la conductivité thermique du milieu. On suppose que la température ne varie que selon la direction de la hauteur du cylindre, ainsi  $\nabla u = (\partial_x u, 0, 0)$ . En notant  $\phi$  la première composante de  $\phi$ , on a donc :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Quand les quantités  $\rho$ ,  $c$  et  $\kappa$  sont supposées constantes, la température  $u$  est solution de l'équation :

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in ]0, l[, \forall t \in ]0, T[, \quad (3)$$

complétée par la condition initiale et les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(x, 0) &= u_0(x), & \forall x \in ]0, l[, \\ u(0, t) &= u_g, & \forall t \in ]0, T[, \\ u(l, t) &= u_d, & \forall t \in ]0, T[, \end{cases} \quad (4)$$

où  $u_0$  est une fonction donnée (température initiale), et  $u_g$  et  $u_d$  sont des constantes représentant respectivement les températures imposées sur les frontières gauche et droite du domaine.

---

\*Centre de Recherche Inria de Paris et Laboratoire Jacques-Louis Lions, [jean-frederic.gerbeau@inria.fr](mailto:jean-frederic.gerbeau@inria.fr)

On considère une discrétisation par différences finies. On introduit pour cela sur l'intervalle  $[0, l]$  les points  $x_j = j\delta x$ ,  $j = 0, \dots, N + 1$ , où  $\delta x = l/(N + 1)$ , et les instants  $t_n = n\delta t$ , où  $\delta t$  est un pas de temps donné. La valeur inconnue  $u(x_j, t_n)$  est approchée par  $U_j^n$ .

On considère les deux schémas numériques suivants :

$$\rho c \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\delta t} - \kappa \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\delta x^2} = 0, \quad (5)$$

et

$$\rho c \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\delta t} - \kappa \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{\delta x^2} = 0. \quad (6)$$

**Question 1.** Rappeler les principales propriétés de précision et de stabilité des schémas (5) et (6).

**Question 2.** On suppose dans cette question que le domaine est  $[0, +\infty[$  et que  $u_d$  est la valeur limite quand  $x \rightarrow +\infty$ . En cherchant la solution de (3) sous la forme  $u(x, t) = U(x/\sqrt{t})$ , vérifier que la solution exacte est donnée par

$$u(x, t) = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + B$$

où  $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$ ,  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$  et  $A$  et  $B$  sont des constantes à déterminer.

**Question 3.** Réaliser quelques simulations numériques à l'aide des deux schémas précédents. Illustrer les commentaires faits à la question 1, et utiliser la question 2 pour vérifier le programme. Comme le domaine de calcul est fini, on utilisera la valeur de la solution exacte comme condition aux limites en  $x = l$ .

Valeurs numériques :  $T = 5400 \text{ s}$ ,  $l = 0.1 \text{ m}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\kappa = 0.38 \text{ Wm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $c = 1200 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $u_g = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $u_d = 37 \text{ }^\circ\text{C}$ . On pourra prendre par exemple  $N = 10$  ou  $100$ , et  $\delta t = 1 \text{ s}$  ou  $10 \text{ s}$ .

## 2 Changement de phase

Le tissu qui est traité par cryochirurgie est un mélange complexe de cellules saines et cancéreuses. On va le considérer, pour simplifier, comme un milieu homogène en phase liquide. En imposant sur la frontière gauche du domaine une température inférieure à la température de fusion  $u_m$ , le milieu va passer progressivement en phase solide. On note  $s(t)$  la position au temps  $t$  du front de changement de phase. À l'instant initial  $s(0) = 0$ . À un instant  $t > 0$ , si  $x < s(t)$  le milieu est solide, avec une chaleur spécifique  $c_S$  et une conductivité thermique  $\kappa_S$ , et si  $x > s(t)$  le milieu est fluide avec une chaleur spécifique  $c_L$  et une conductivité thermique  $\kappa_L$ . En  $x = s(t)$  la température vaut  $u_m$ . La masse volumique  $\rho$  est supposée la même dans les deux phases. Les quantités  $\rho$ ,  $\kappa_L$ ,  $\kappa_S$ ,  $c_L$  et  $c_S$  sont des constantes positives.

**Question 4.** On note  $H(t) = A \int_0^l h(x, t) dx$  l'enthalpie totale du milieu. En utilisant (1), vérifier que

$$\frac{dH}{dt}(t) = A\kappa_L \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) - A\kappa_S \frac{\partial u}{\partial x}(0, t). \quad (7)$$

L'enthalpie volumique dans le liquide est donnée par  $h_L = \rho c_L(u - u_m) + \rho L$ , où le premier terme représente la chaleur sensible, liée à la température, et le second terme la chaleur latente,

liée à l'état de la matière ( $\rho L$  étant l'énergie volumique nécessaire pour faire fondre le solide). L'enthalpie volumique dans le solide est donnée par  $h_S = \rho c_S(u - u_m)$ . Ainsi :

$$H(t) = A \int_0^{s(t)} \rho c_S(u(x, t) - u_m) dx + A \int_{s(t)}^l [\rho c_L(u(x, t) - u_m) + \rho L] dx.$$

**Question 5.** En utilisant (3) dans chacune des phases et (7) montrer que

$$\rho L \frac{ds}{dt}(t) = \kappa_S \frac{\partial u}{\partial x}(s(t)^-, t) - \kappa_L \frac{\partial u}{\partial x}(s(t)^+, t). \quad (8)$$

où  $\frac{\partial u}{\partial x}(s(t)^+, t)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}(s(t)^-, t)$  désignent respectivement les limites à droite à gauche de  $\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, t)$  en  $s(t)$ .

Pour résumer, on cherche l'évolution de la température au cours du temps, ainsi que la position  $s(t)$  de l'interface entre le solide et le liquide, telles que pour  $x \in ]0, s(t)[$ ,  $t > 0$  :

$$\rho c_L \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa_L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (9)$$

pour  $x \in ]s(t), l[$ ,  $t > 0$  :

$$\rho c_S \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa_S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (10)$$

complétés par les conditions aux limites et initiale (4). On suppose que  $u_g(t) < u_m$ ,  $u_d(t) > u_m$ ,  $u_0(x) > u_m$ . La position du front est donnée par (8), avec  $s(0) = 0$ . Sur le front la température vérifie  $u(s(t), t) = u_m$  pour  $t > 0$ .

**Question 6.** On suppose dans cette question que le domaine est  $[0, +\infty[$  et que  $u_d$  est la valeur limite quand  $x \rightarrow +\infty$ . En s'inspirant de la question 2, montrer que

$$\begin{cases} u(x, t) = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}}\right) + B, & \text{si } x < s(t), \\ u(x, t) = A' \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_L t}}\right) + B', & \text{si } x > s(t), \\ s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_S t}, \end{cases}$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  et  $B'$  sont des constantes à déterminer, et où  $\lambda$  est solution de

$$\lambda = \frac{S_S}{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\lambda) \exp(\lambda^2)} - \frac{S_L}{\sqrt{\pi} \nu \operatorname{erfc}(\nu\lambda) \exp(\lambda^2 \nu^2)}, \quad (11)$$

avec  $\nu = \sqrt{\frac{\alpha_S}{\alpha_L}}$ ,  $\alpha_S = \frac{\kappa_S}{\rho c_S}$ ,  $\alpha_L = \frac{\kappa_L}{\rho c_L}$ ,  $S_L = \frac{c_L(u_d - u_m)}{L}$ ,  $S_S = \frac{c_S(u_m - u_g)}{L}$ . On rappelle que  $\operatorname{erfc}(\xi) = 1 - \operatorname{erf}(\xi)$ .

### 3 Simulation par une méthode de suivi de front

On note  $S^n$  une approximation de  $s(t^n)$  et  $i_n$  le plus grand indice tel que  $U_{i_n}^n < u_m$ . On discrétise l'équation (8) à l'aide du schéma suivant :

$$\rho L \frac{S^{n+1} - S^n}{\delta t} = \kappa_S \frac{U_{i_n}^n - U_{i_n-1}^n}{\delta x} - \kappa_L \frac{U_{i_n+1}^n - U_{i_n}^n}{\delta x}$$

**Question 7.** Implémenter ce schéma en le couplant au schéma implicite (6). Utiliser la question précédente pour vérifier le programme. On tracera entre autre la position du front en fonction du temps, et le profil de température au temps final. Comme le domaine de calcul est fini, on utilisera la valeur de la solution exacte comme condition aux limites en  $x = l$ .

Indication : l'équation définissant  $\lambda$  ne peut être traitée analytiquement, on utilisera donc une méthode numérique pour la résoudre de manière approchée.

Valeurs numériques :  $T = 5400 \text{ s}$ ,  $l = 0.1 \text{ m}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\kappa_L = 0.38 \text{ Wm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $c_L = 1200 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\kappa_S = 0.11 \text{ Wm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $c_S = 4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $L = 333000 \text{ J kg}^{-1}$ ,  $u_g = -40 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $u_d = 37 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $u_m = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ . On prendra par exemple  $N = 200$ , et  $\delta t = 10 \text{ s}$ .

## 4 Simulation par une méthode de capture de front

On propose maintenant une autre approche, qui n'est plus basée sur le suivi explicite du front à l'aide de l'équation (8). Repartant de l'équation (2), on introduit le schéma suivant :

$$\frac{H_j^{n+1} - H_j^n}{\delta t} + \frac{\phi_{j+1/2}^n - \phi_{j-1/2}^n}{\delta x} = 0, \quad (12)$$

où

$$\phi_{j-1/2}^n = -\kappa(U_{j-1}^n) \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\delta x}, \quad j = 1, \dots, N,$$

avec  $\kappa(u) = \kappa_L$  si  $u > u_m$  et  $\kappa(u) = \kappa_S$  si  $u \leq u_m$ . Pour imposer les conditions aux limites, on utilisera

$$H(u) = \begin{cases} \rho c_S (u - u_m) & \text{si } u < u_m, \\ \rho L + \rho c_L (u - u_m) & \text{si } u \geq u_m. \end{cases}$$

Une fois l'enthalpie calculée, on déduit la température par :

$$u(h) = \begin{cases} u_m + \frac{h}{\rho c_S} & \text{si } h \leq 0, \\ u_m & \text{si } 0 < h < \rho L, \\ u_m + \frac{h - \rho L}{\rho c_L} & \text{si } h \geq \rho L. \end{cases}$$

**Question 8.** Reprendre la question 7 avec ce nouveau schéma. Utiliser en particulier divers pas de temps et commenter.

**Question 9.** [ouverte et facultative] Proposer une version implicite du schéma précédent.