Conditions parfaitement transparentes versus couches parfaitement absorbantes

Responsable : Houssem Haddar

houssem.haddar@inria.fr

1 Introduction et identités de base pour l'équation des ondes

Les ondes (électromagnétiques, acoustiques, ...) se propagent partout dans l'espace et les simuler numériquement nécessite des techniques spécifiques pour borner le domaine de calcul sans introduire des artifacts numériques importants. Nous allons discuter dans ce miniprojet deux techniques couramment utilisées dans les codes numériques dédiés à la simulation des ondes. Nous allons le faire dans le cadre simplifié de l'équation des ondes 1D (corde vibrante) posée sur une demi droite infinie. Le déplacement (vertical d'une cordre horizontale) $u(x,t)$ vérifie

$$\partial_t^2 u(x,t) - c^2(x)\partial_x^2 u(x,t) = 0 \quad t > 0 \text{ et } x > 0 \tag{1}$$

avec $c(x)$ désignant la vitesse de propagation de l'onde. On supposera que l'état initial est au repos

$$u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0 \tag{2}$$

et on impose

$$u(0,t) = f(t) \tag{3}$$

où la fonction causale f désigne la donnée du problème et que l'on suppose régulière et à support compact.

Question 1.1 : Donner l'expression de la solution dans le cas d'une vitesse constante $c(x) = c_0$.

On définit l'énergie par

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{c^2}|\partial_t u|^2 + |\partial_x u|^2\right) dx.$$

Question 1.2 : Montrer que $\mathcal{E}$ est constante pour t suffisamment grand.

L'équation (1) peut être formulée comme un système du premier ordre pour les variables $p := \partial_t u$ et $v := -\partial_x u$

$$\partial_t p = -c^2 \partial_x v, \tag{4}$$

$$\partial_t v = -\partial_x p \ , \tag{5}$$

pour $t > 0$ et $x > 0$ avec les données initiales

$$p(x, 0) = v(x, 0) = 0$$

et la donnée au bord

$$p(0,\, t) = f'(t). \tag{6}$$

1.1 Discrétisation par un schéma saute-mouton

On note par Δt et Δx respectivement les pas de discrétisation (uniforme) en temps et en espace. On note $x_i = i\Delta x$ et on introduit

$$p_i^n \approx p(i\Delta x, n\Delta t);\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \approx v((i+\tfrac{1}{2})\Delta x, (n+\tfrac{1}{2})\Delta t).$$

Le schéma de discrétisation que l'on propose pour (4-5) s'écrit sous la forme

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = -c^2(x_i)\, \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \tag{7}$$

et

$$\frac{v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta x} \tag{8}$$

pour $n \geq 0$ et $i > 0$ avec les conditions initiales

$$p_i^0 = 0 \text{ et } v_{i-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} = 0 \tag{9}$$

pour $i > 0$ et la donnée

$$p_0^n = f'(n\Delta t) \tag{10}$$

pour $n \geq 0$.

Question 1.3 : Montrer que le schéma numérique est d'ordre 2 en temps et en espace.

Introduisons l'énergie discrète

$$E_\infty^n := \frac{\Delta x}{2}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \left|c(x_i)^{-1}\, p_i^n\right|^2 + v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\, v_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right). \tag{11}$$

Question 1.4 : Montrer que pour n suffisamment grand

$$\frac{E_\infty^{n+1} - E_\infty^n}{\Delta t} = 0 \tag{12}$$

Question 1.5 : On pose $c^* = \max c(x)$. Montrer que sous la condition CFL : $c^*\Delta t < \Delta x$, il existe une constante C indépendante de n, Δt et Δx tel que

$$E_\infty^n \geq C\Delta_x \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \left|c(x_i)^{-1}\, p_i^n\right|^2 + \left|(v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}})\right|^2\right).$$

En déduire que le schéma est stable sous la condition CFL.

2 Conditions parfaitement transparentes

Afin d'implémenter le schéma numérique précédent, il est nécessaire de borner le domaine de calcul en espace pour pouvoir manipuler des vecteurs de tailles finies. Choisissons $L > 0$ une longueur suffisamment grande pour que $c(x) = c_0$ pour $x \geq L$. On souhaite idéalement limiter le domaine de calcul à l'intervalle $[0, L]$. Il nous faudrait alors rajouter une condition en $x = L$ simulant la présence d'un domaine de propagation infini dans la région $x \geq L$. Une telle condition est dite parfaitement transparente lorsqu'elle conduit à une solution du problème qui coincide avec la solution du problème sur le domaine non borné.

Question 2.1 : Expliquer pourquoi la stratégie qui consiste à prendre L (relativement) grand et d'appliquer la condition $u(L, t) = 0$ n'est pas satisfaisante.

Question 2.2 : Montrer que la solution du problème vérifie pour x suffisamment grand

$$\partial_t u + \partial_x u = 0. \tag{13}$$

En déduire que la condition

$$p(L, t) = v(L, t) \tag{14}$$

est parfaitement transparente.

2.1 Implémentation

On choisit L de la forme $L = N\Delta x$ pour $N > 0$. Les vecteurs p_i^n, $1 \leq i \leq N$ et $v_{n+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}$ $0 \leq i \leq N$ sont calculés via le schéma (de récurrence en n) donné par $(7) - (10)$ supplémenté par la discrétisation de (14) suivant le schéma

$$\frac{1}{2}(p_N^{n+1} + p_N^n) = \frac{1}{2}(v_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + v_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}). \tag{15}$$

Remarquer que nous avons introduit dans ce schéma une variable (de calcul) intermédiaire $v_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ pour la prise en compte de la condition aux limites. Cette variable intervient aussi dans (7) pour $i = N$.

Question 2.3 : Montrer que le schéma obtenu est d'ordre 2 en espace et en temps et que l'énergie discrete

$$E_N^n := \frac{\Delta x}{2}\left(\sum_{i=0}^{N-1} \left|c(x_i)^{-1}\, p_i^n\right|^2 + v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\, v_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right)$$

est décroissante pour n suffisamment grand (On pourra montrer d'abord cette même propriété pour l'équivalent continue de cette énergie.)

Question 2.4 : En déduire que le schéma reste stable sous la même condition CFL que précédemment.

Question 2.5 : Ecrire un programme Python qui cacule la solution numérique donnée par le schéma $(7)-(10)$ *et* (15). *Comparer cette solution avec l'expression exacte en traçant fonction $t \mapsto u(L/2, t)$ pour différentes valeurs du rapport $c\Delta t/\Delta x$. Que se passe t-il pour $c\Delta t/\Delta x = 1$ et $c\Delta t/\Delta x \mapsto 0$?* On pourra choisir $c(x) = 1$ et f un signal gaussien

$$f(t) = e^{-2\pi\sigma^2(t-T_0)^2} \quad t \in [0, 2T_0]$$

et $f(t) = 0$ sinon. Prenez $L = 2T_0$ et T_0 de manière à ce que $f(2T_0)$ soit de l'ordre de l'erreur numérique. Le pas de temps Δt doit être reglé de manière à bien représenter la fonction f.

Question bonus 2.6 : Expliquer le phénomène observé dans la question 10 en calculant la solution numérique correspondant avec $f(t) = e^{i\omega t}$, $t > 0$, pour le shéma infini $(7) - (10)$ et pour le schéma avec condition parfaitement transparente.

3 Couches parfaitement absorbantes

Le problème majeur des conditions parfaitement transparentes est qu'elles deviennent non locales pour les dimensions d'espace plus grandes que 1. On est en général amené à utiliser des approximations de ces conditions qui dans certains cas peuvent ne pas donner satisfaction. Grâce à Jean-Pierre Bérenger (1994), une nouvelle approche plus performante et plus flexible d'utilisation a été proposée. Elle repose sur le principe d'entourer le domaine de calcul par une couche parfaitement absorbante (Pefectly Matched Layers, PML). Le terme parfaitement absorbant désigne la propriété d'abosrber une onde sans générer de réflexion à l'interface. Cette dernière propriété n'est jamais vérifié par des milieux absorbants physiques comme le démontre l'exemple suivant.

Question 3.1 : On considère le cas $c(x) = c_0$ en on rajoute une couche infinie avec amortissement (physique) σ constant dans la région $x \geq L$. Dans ce cas l'onde u_σ vérifie

$$\begin{array}{l} \partial_t^2 u_\sigma - c_0^2 \partial_x^2 u_\sigma = 0 \quad t > 0 \text{ et } 0 < x < L \\ \partial_t^2 u_\sigma + \sigma \partial_t u_\sigma - c_0^2 \partial_x^2 u_\sigma = 0 \quad t > 0 \text{ et } x > L \end{array} \tag{16}$$

avec les conditions de continuité

$$u_\sigma(L^+, t) = u_\sigma(L^-, t) \text{ et } \partial_x u_\sigma(L^+, t) = \partial_x u_\sigma(L^-, t) \tag{17}$$

et les mêmes conditions initiales et aux limites que u. Montrer que $u_\sigma \neq u$ sur l'intervalle $[0, L]$ pour toute valeur de $\sigma > 0$.

Le modèle de Béranger consiste à introduire l'amortissement sur le système du premier ordre sous la forme

$$\partial_t p_\sigma + \sigma p_\sigma = -c^2 \partial_x v_\sigma, \tag{18}$$

$$\partial_t v_\sigma + \sigma v_\sigma = -\partial_x p_\sigma \ , \tag{19}$$

pour $t > 0$ et $x > L$, couplé avec l'équation non amortie dans la région d'intérêt

$$\partial_t p_\sigma = -c^2 \partial_x v_\sigma, \tag{20}$$

$$\partial_t v_\sigma = -\partial_x p_\sigma \ , \tag{21}$$

pour $t > 0$ et $0 < x < L$ à travers les conditions de continuité

$$p_\sigma(L^+, t) = p_\sigma(L^-, t) \text{ et } v_\sigma(L^+, t) = v_\sigma(L^-, t). \tag{22}$$

Question 3.2 : Montrer que pour tout $\sigma > 0$, $p_\sigma = p$ et $v_\sigma = v$ dans la région $t > 0$ et $0 < x < L$ et que p_σ et v_σ sont exponentiellement décroissants dans la région $x > L$. Indication : chercher p_σ et v_σ sous la forme $p_\sigma = \tilde{p}_\sigma e^{-\sigma t}$ et $v_\sigma = \tilde{v}_\sigma e^{-\sigma t}$ dans la région $x \geq L$.

La décroissance exponentielle de la solution p_σ et v_σ dans la couche absorbante justifie alors l'application d'une condition de type

$$p(L+R,t)=0 \tag{23}$$

avec R désignant l'épaisseur de la couche de manière à ce que $e^{-\sigma R}=\epsilon$ soit de l'ordre de l'erreur numérique du schéma.

Question 3.3 : Proposer un schéma d'ordre 2 en espace et en temps pour la discrétisation du système $(18)-(23)$

Question 3.4 : Ecrire un programme Python qui calcule la solution de ce schéma aux différences finis. Discuter la pertinence de cette approche via des expérimentations numériques.

Remarque : Afin de réduire les effets numériques de réflexions parasites à l'interface lorsque σ *est très grand, il pourrait être plus judicieux de choisir* σ *croissant entre la valeur* 0 *à l'interface et* σ_{max} *au bout de la couche tout en assurant que* $\mathrm{e}^{-\int_L^{R+L}\sigma(y)dy}=\epsilon$.