Un problème de dynamique des populations

Sujet proposé par Philippe Moireau
Contact: philippe.moireau@polytechnique.edu

Consignes : *On veillera autant que possible à proposer une rédaction compacte, mais où chaque concept clé est souligné. Par ailleurs, toute initiative visant à illustrer votre propos sera valorisée. La qualité de présentation de vos résultats y compris numériques seront pris en compte.*

Dans ce projet, nous nous intéressons à des modèles de dynamique de populations structurées en age. Plus précisément, on note $0 \leq a \leq a^*$ la variable d'âge borné par un âge limite a^* et $t \geq 0$ la variable temporelle et on note $p(a,t)$ la densité d'individus d'âge a au temps t. On introduit par ailleurs $\mu(a)$ le taux de mortalité et $\beta(a)$ le taux de natalité de la population. La distribution initiale est dénotée $\zeta(a)$. On considère typiquement :

- $\mu \geq 0$, $\mu \in C^0([0,a^*])$, $\displaystyle\int_0^{a^*} \mu(s)\mathrm{d}s = +\infty$;
- $\beta \geq 0$, $\beta \in C^1([0,a^*])$
.
- $\zeta \geq 0$, $\zeta \in C^1([0,a^*])$

On s'intéresse alors au modèle

$$\begin{cases} \partial_t p(a,t) + \partial_a p(a,t) = -\mu(a)p(a,t), & a \in (0,a^*), t > 0, \\ p(0,t) = \displaystyle\int_0^{a^*} \beta(a)p(a,t)\,\mathrm{d}a, & t > 0. \\ p(a,0) = \zeta(a), & a \in (0,a^*). \end{cases} \tag{1}$$

Ce modèle a été imaginé par McKendrick en 1926. Son étude mathématique a été réalisée par von Foerster en 1959. On parle ainsi de modèle de McKendrick-von Foerster.

Pour illustrer ce modèle, on considèrera typiquement $a^* = 2$ et une fenêtre en temps $[0,T^*]$, avec $T = 2a^*$. Par ailleurs, on pourra choisir

$$\beta(a) = 10a(a^* - a)\exp\left(-20\Big(a - \frac{a^*}{3}\Big)^2\right),$$

ainsi que

$$\mu(a) = (a^* - a)^{-1}.$$

1 Méthode des caractéristiques

Question 0.
Commenter la formulation du modèle.

Question 1.
On considère l'équation de transport suivante

$$\begin{cases} \partial_t p(a,t) + \partial_a p(a,t) = -\mu(a)p(a,t), & a \in (0,a^*), t > 0, \\ p(a,0) = \zeta(a), & a \in (0,a^*), \\ p(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2}$$

a. Quel est le comportement de p sur les droites caractéristiques

$$\mathcal{C}_\alpha = \{(a,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \,|\, a = \alpha + t\}, \alpha \geq 0.$$

b. Quel est le comportement de p sur les droites caractéristiques

$$\mathcal{C}^\tau = \{(a,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \,|\, t = a + \tau\}, \tau \geq 0.$$

c. On suppose de plus que $\zeta(0) = 0$ et $\zeta'(0) = 0$. Construire une solution C^1 de (2).
d. Démontrer que toute solution $C^1(0,a^*)$ vérifie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^{a^*} |p(a,t)|^2 \mathrm{d}a\right) \leq 0.$$

e. En déduire que l'équation (2) admet une unique solution C^1.

Question 2.
Considérons une discrétisation régulière de pas Δa du segment $(0,a^*)$. On note $a_i = i\Delta a$, $0 \leq i \leq N_a$. De même le temps est discrétisé sur une grille régulière de pas de temps Δt avec $t_n = n\Delta t, n \in \mathbb{N}$. On pourra typiquement considérer $N_a = 120$ et $N_t = 50$.
Pour discrétiser (2), on considère le schéma numérique suivant

$$\begin{cases} \dfrac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} + \dfrac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\Delta a} = -\mu(a_i)p_i^{n+1}, & 1 \leq i \leq N_a, n \in \mathbb{N} \\ p_0^n = 0, & n \in \mathbb{N}, \\ p_i^0 = \zeta(a_i), & 1 \leq i \leq N_a. \end{cases} \tag{3}$$

a. Démontrer que le schéma est consistant.
b. Démontrer que

$$\sum_{i=0}^{N_a} (p_i^{n+1})^2 - (p_i^n)^2 \leq 0,$$

Indication : On pourra multiplier (3) par p_i et utiliser $2p_i^n p_i^{n+1} = (p_i^n + p_i^{n+1})^2 - (p_i^{n+1})^2 - (p_i^n)^2$ ainsi qu'une transformée d'Abel sur le terme de transport.
c. Qu'en déduire sur le schéma ?
d. Procéder à l'implémentation numérique de ce schéma. On pourra considérer une condition initiale

$$\zeta(a) = \exp\left(-30\left(a - \frac{a^*}{4}\right)^2\right),$$

ou une fonction créneau de même moyenne et écart type. Interpréter vos résultats.
e. Retrouver numériquement les courbes caractéristiques introduites à la question 1.
Indication : On pourra utiliser la fonction `contour` *de* `matplotlib`

Question 3.
Soit $b \in C^1(\mathbb{R})$. On considère désormais l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t p(a,t) + \partial_a p(a,t) = 0, & a \in (0, a^*), t > 0, \\ p(a,0) = \zeta(a), & a \in (0, a^*), \\ p(0,t) = b(t) & t > 0. \end{cases} \tag{4}$$

a. Quel est le comportement de p sur les droites caractéristiques

$$\mathcal{C}_\alpha = \{(a,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \,|\, a = \alpha + t\}, \alpha \geq 0.$$

b. Quel est le comportement de p sur les droites caractéristiques

$$\mathcal{C}^\tau = \{(a,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \,|\, t = a + \tau\}, \tau \geq 0.$$

c. Donner les conditions suffisantes sur β et ζ pour construire une solution C^1.

Question 4.
En utilisant la méthode des caractéristiques, montrer qu'une solution C^1 de (1) satisfait

$$\begin{cases} p(a,t) = p(0, t-a) \exp\left(\int_0^a \mu(\alpha) \mathrm{d}\alpha \right), & t \geq a \\ p(a,t) = \zeta(a-t) \exp\left(- \int_{a-t}^a \mu(\alpha) \mathrm{d}\alpha \right), & t < a \end{cases}$$

Dans la suite on notera $b(t) = p(0,t)$ et

$$\pi(a) = \exp\left(- \int_0^a \mu(\alpha) \mathrm{d}\alpha \right), \quad \pi(a^*) = 0.$$

Question 5.
Etablir que pour les solutions de (1), l'équation de renouvellement

$$b(t) = \psi(t) + \int_0^t \beta(a) \pi(a) b(t-a) \mathrm{d}a, \tag{5}$$

où ψ est une fonction (ne dépendant ni de p ni de b) à déterminer.

Question 6. Bonus
Proposer une méthode de résolution de cette équation.

2 Equation de Lotka-Sharpe et comportement asymptotique

On cherche dans cette partie des solutions de la forme $p(a,t) = \exp(\lambda t) \phi_\lambda(a)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

Question 7.
Démontrer que si une telle solution existe alors $\phi_\lambda(a) = \exp(\lambda a) \pi(a)$ et λ est solution de

$$F(\lambda) = \int_0^{a^*} \beta(a) \exp(-\lambda a) \pi(a) \mathrm{d}a = 1. \tag{6}$$

Question 8.
a. Démontrer qu'il n'existe qu'une seule solution réelle λ_0 de (6).
b. Démontrer que $\lambda_0 > 0$ (resp. $\lambda_0 < 0$) si et seulement si $F(0) > 1$ (resp. $F(0) < 1$)
c. On admettra qu'il existe qu'un nombre dénombrable de solutions $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$ de (6). Celles-ci sont de plus isolées. Démontrer que dans ce cas

$$\lambda_0 > \Re(\lambda_n), \quad \forall n > 0.$$

Question 9. Discrétisation
On discrétise l'intégrale (6) par une méthode des trapèzes. Donner les coefficients $(w(a_i))_{1\le i\le N_a}$ tels que

$$\int_0^{a^*} \beta(a)\exp(-\lambda a)\pi(a)\mathrm{d}a \simeq \sum_{i=0}^{N_a} w(a_i)\beta(a_i)\exp(-\lambda a_i)\pi(a_i).$$

Rappeler quel est l'ordre d'approximation d'une telle méthode.

Question 10. Implementation
Procéder à l'implémentation de la résolution par un algorithme de Newton de l'équation de Lotka-Sharpe (6) discrétisée.
Indication : On pourra s'assurer du résultat du code ainsi produit par l'utilisation de fonctions existantes telles que `fsolve`.

3 Discrétisation

Question 11. Changement de variable
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ un petit paramètre. On pose $\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon$ où λ_0 a été déterminé à la question 8. Nous introduisons la variable auxiliaire u définie par

$$u(a,t) = \frac{\exp(-\lambda_\varepsilon t)}{\pi(a)} p(a,t)$$

Démontrer formellement que u est solution de

$$\begin{cases} \partial_t u(a,t) + \partial_a u(a,t) + \lambda_\varepsilon u = 0, & a \in (0,a^*), t > 0, \\ u(0,t) = \displaystyle\int_0^{a^*} m(a)u(a,t)\,\mathrm{d}a, & t > 0. \\ u(a,0) = u^0(a), & a \in (0,a^*). \end{cases} \tag{7}$$

où $m(a) = \beta(a)\pi(a)$.

Question 12. Règle de quadrature
Nous discrétisons l'équation obtenue à la question précédente suivant un schéma explicite aux différences finies donné par

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \dfrac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta a} + \lambda_\varepsilon u_i^{n+1} = 0, & 1 \le i \le N_a,\, n \in \mathbb{N} \\ u_0^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{N_a} w(a_i)m(a_i)u_i^n, & n \in \mathbb{N} \\ u_i^0 = u_0(a_i), & 1 \le i \le N_a \end{cases} \tag{8}$$

Question 13.
Étudier la consistance de ce schéma.

Question 14.
a. Réécrire (8) sous la forme d'un système linéaire du type

$$(\mathbb{1} - \Delta t \mathbb{A}) u^{n+1} = u^n,$$

où $u^n = (u_1^n \dots u_{N_a}^n)^\intercal$.
b. Quelle équation de type Lotka-Sharpe satisfont les valeurs propres de $\mathbb{A}$?
c. Implémeter numériquement la résolution de cette équation. Calculer numériquement le spectre avec la fonction `eigs` et vérifier vos calculs.
d. Que dire de la stabilité du schéma numérique ?

Question 15.
Procéder à l'implémentation et à la résolution. On pourra choisir par exemple une condition initiale du type

$$\zeta(a) = \frac{a^* - a}{a^*} e^{-\lambda_\varepsilon a}.$$

Ou alors on pourra considérer une condition initiale du type

$$\zeta(a) = \exp\left(-30\Big(a - \frac{a^*}{4}\Big)^2\right),$$

dont on évaluera par ailleurs la pertinence au vu du problème considéré.

4 Pour aller plus loin – Modèle avec diffusion spatiale

Une généralisation possible de ce modèle vise à prendre en compte la diffusion spatiale. Le modèle devient alors

$$\begin{cases} \partial_t p(a,x,t) + \partial_a p(a,x,t) = -\mu(a) p(a,x,t) + \sigma \partial_{xx}^2 p(a,x,t), & a \in (0,a^*), x \in (0,\ell), t > 0, \\ p(a,0,t) = p(a,\ell,t) = 0, & a \in (0,a^*), t > 0, \\ p(0,x,t) = \displaystyle\int_0^{a^*} \beta(a) p(a,x,t)\,\mathrm{d}a, & x \in (0,\ell), t > 0. \\ p(a,x,0) = \zeta(a,x), & a \in (0,a^*), x \in (0,\ell). \end{cases} \tag{9}$$

En effectuant le changement de variable $p \mapsto u$ où

$$u(a,x,t) = \frac{\exp(-\lambda_0 t)}{\pi(a)} p(a,x,t),$$

nous obtenons le système

$$\begin{cases} \partial_t u(a,x,t) + \partial_a u(a,x,t) - \sigma \partial_{xx}^2 u(a,x,t) + \lambda_0 u(a,x,t) = 0, & a \in (0,a^*), x \in (0,\ell), t > 0, \\ u(a,0,t) = u(a,l,t) = 0, & a \in (0,a^*), t > 0, \\ u(0,x,t) = \displaystyle\int_0^{a^*} m(a) u(a,x,t) da, & x \in (0,\ell), t > 0, \\ u(a,x,0) = u_0(a,x), & a \in (0,a^*), x \in (0,\ell). \end{cases} \tag{10}$$

Pour discrétiser une telle équation, nous considérons une grille régulière en espace $x_j = jh = j\ell/(N_x+1)$, $0 \leqslant i \leqslant N_x+1$. On choisira typiquement $N_x = 100$. La variable discrète $u_{i,j}^n$ approche $u(a_i, x_j, t_n)$ et on note

$$U_i^n = \begin{pmatrix} u_{i,1}^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i,N_x}^n \end{pmatrix}, \quad 0 \leq i \leq N_a$$

Le schéma s'écrit alors

$$\begin{cases} \dfrac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \dfrac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta a} + (\lambda \mathbb{1} + \mathbb{K}) U_i^{n+1} = 0, & 1 \leq i \leq N_a, n \in \mathbb{N} \\ U_0^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{N_a} w(a_i) m(a_i) U_i^n, & n \in \mathbb{N} \\ U_i^0 = (u_0(a_i, x_j))_{1 \leq j \leq N_x}, & 1 \leq i \leq N_a \end{cases} \tag{11}$$

où

$$\mathbb{K} = \frac{\sigma}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{N_x}(\mathbb{R}).$$

Question 16. Difficile
Réécrire ce schéma sous la forme

$$(\mathbb{1} - \Delta t \mathbb{A}^\flat) U^{n+1} = U^n,$$

où $U^n = (U_1^n \dots U_{N_a}^n)^\intercal$ et $\mathbb{A}^\flat$ peut s'exprimer à partir de matrices du type $\mathbb{A} \otimes \mathbb{1}_{N_x}$ ou $\mathbb{1}_{N_a} \otimes \mathbb{K}$. Étudier son spectre et en déduire la stabilité du schéma.
Indication : On s'appuiera sur les propriétés du produit tensoriel de matrices $\otimes$.

Question 17.
Implémenter, illustrer et commenter. On considèrera typiquement $\ell = \pi$. On pourra par exemple choisir

$$p_0(a,x) = \frac{a^* - a}{a^*} e^{-\lambda_1^0 a} \sin(x),$$

ou alors

$$p_0(a,x) = \exp\left(-30\Big(a - \frac{a^*}{4}\Big)^2 + 20\Big(x - \frac{\ell}{4}\Big)^2 \right).$$

Indication : Deux versions sont possibles, soit en codant directement (11) soit en utilisant la fonction `kron`.

5 Pour aller encore plus loin (évidemment du bonus)

Un modèle de McKendrick-von Foerster comprenant deux populations (les hommes et les femmes) en interaction a été introduit pour rendre compte de la pyramide des âges aux États-Unis dans les années 70. On pourra s'inspirer de ce projet et de l'article [1] pour réaliser un simulateur réaliste.

Références

[1] T. Arbogast and F.A. Milner. A finite difference method for a two-sex model of population dynamics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26(6) :1471–1486, January 2012.

[2] W. L. Chan and B.-Z. Guo. On the semigroups of age-size dependent population dynamics with spatial diffusion. *Manuscripta Math*, 66(2) :161–181, 1989.

[3] C. Cusulin and L. Gerardo-Giorda. A numerical method for spatial diffusion in age-structured populations. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 26(2) :253–273, 2010.

[4] B.L. Keyfitz and N. Keyfitz. The McKendrick partial differential equation and its uses in epidemiology and population study. *Math. Comput. Modelling*, 26(6) :1–9, 1997.