Ecole Polytechnique
Approximation numérique et Optimisation (MAP 411)
Mini-Projet

Autour d'un problème elliptique à coefficients variables

Proposé par Flore Nabet

Consignes :
Il n'est pas utile de fournir les codes en annexe. Ceux-ci devront être envoyés à l'adresse suivante flore.nabet@polytechnique.edu et la présentation devra être soignée (présence de commentaires, fonctions intermédiaires dans des fichiers séparés, ...).

Les résultats numériques doivent être illustrés par des figures présentes dans le rapport. Celles-ci doivent contenir une légende, un titre et doivent être commentées. De plus l'ensemble des paramètres utilisés doivent être mentionnés. Dans le cas contraire la question sera considérée comme non traitée.

Un soin particulier devra être apporté à la rédaction et les détails des calculs devront être fournis dans le rapport.

1 Résolution d'un problème aux limites

On se place dans le cas monodimensionnel et on considère une corde tendue, de longueur 1, fixée à ses deux extrémités et initialement au repos représentée par le segment $[0,1]$. On suspend une charge sur la corde et on note $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction qui représente le champ de forces exercé sur la corde par le poids de la charge.
La fonction $x \mapsto u(x)$ représente le déplacement vertical de la corde par rapport à sa position au repos. Le fait que la corde soit fixée à ses extrémités se traduit par les conditions $u(0) = u(1) = 0$.
On suppose de plus que la corde n'est pas homogène, ainsi sa raideur k dépend de la position x sur la corde. On supposera dans la suite que k vérifie $\inf_{[0,1]} k > 0$.

L'objectif est donc de trouver la position $(x, u(x))$, $x \in [0,1]$, de la corde à l'équilibre sous l'hypothèse de petits déplacements.
Le déplacement est alors solution du problème de Poisson-Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u(x)\big) = f(x), \quad \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

On supposera dans la suite que les fonctions f et k sont continues.

1.1 Résultats théoriques

1. Donner toutes les solutions de l'équation $-\partial_x\big(k(x)\partial_x u(x)\big) = f(x)$ vérifiant la condition $u(0) = 0$.
2. Montrer que parmi toutes les solutions données à la question précédente, une seule d'entre elles vérifie en plus la condition $u(1) = 0$. En déduire que le problème (1) admet une unique solution.
3. En utilisant le théorème de Fubini montrer que l'unique solution de (1) s'écrit :

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) \mathrm{d}y, \ \forall x \in [0,1],$$

   où $G : [0,1]^2 \mapsto G(x,y)$ est une fonction à déterminer.

Indication : Utiliser le théorème de Fubini pour montrer que $u(x)$ s'écrit :

$$u(x) = \frac{1}{\int_0^1 h} \Bigg[\left(\int_0^1 \left(\int_y^1 h(t)\mathrm{d}t \right) f(y)\mathrm{d}y \right) \left(\int_0^x h(t)\mathrm{d}t \right) \\ - \left(\int_0^x \left(\int_y^x h(t)\mathrm{d}t \right) f(y)\mathrm{d}y \right) \left(\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t \right) \Bigg],$$

puis utiliser que $\int_y^x h(t)\mathrm{d}t = \int_y^1 h(t)\mathrm{d}t - \int_x^1 h(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t = \int_0^x h(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 h(t)\mathrm{d}t$, où h est une fonction à déterminer.

4. Vérifier que G est symétrique et positive. En déduire le principe du maximum continu :
   - si $f \geq 0$ alors $u \geq 0$;
   - si $f \geq 0$ et f non identiquement nulle, alors $u > 0$.

1.2 Schéma aux différences finies

On cherche maintenant à approcher la solution du problème (1) par un schéma aux différences finies sur un maillage uniforme de l'intervalle $[0,1]$. On se donne un entier N et un pas de discrétisation $h = \frac{1}{N+1}$, puis on pose $x_i = ih$ pour $i \in \{0, \ldots, N+1\}$.
Il est également commode d'introduire une nouvelle grille sur $[0,1]$ constituée des points milieux $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, \ldots, N$.
On propose alors le schéma suivant :

$$-\frac{k_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}-u_i}{h} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h}}{h} = f(x_i), \quad \forall i \in \{1, \cdots, N\}, \tag{2}$$

avec $u_0 = u_{N+1} = 0$ et $k_{i+\frac{1}{2}} = k(x_{i+\frac{1}{2}})$.

5. Démontrer que ce schéma est consistant avec le problème (1) et préciser l'ordre de consistance en norme $\|\cdot\|_\infty$. On supposera k aussi régulière que nécessaire.
6. Ecrire le schéma (2) sous la forme d'un système linéaire $AU = F$ en précisant la matrice A.
   Programmer ce schéma et le tester pour plusieurs fonctions k et plusieurs solutions u.
   Indication :
   (a) Dans un premier temps on choisit une fonction u et une fonction k, on peut ainsi calculer f explicitement.
   (b) A partir de là, les fonctions k et f étant connues, on résout le schéma aux différences finies (2) et on trouve la solution approchée correspondante.
   (c) Enfin on compare la solution exacte et la solution approchée.
7. Démontrer que ce schéma vérifie le principe du maximum discret, c'est à dire montrer que si $F \geq 0$ alors $U \geq 0$.
   En déduire que celui-ci admet une unique solution pour toute donnée f.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde en supposant que $\min u_i < 0$ et considérer le plus petit indice i_0 pour lequel le minimum est atteint.
8. On dit qu'un schéma aux différences finies est stable pour une norme $\|\cdot\|$ s'il existe une constante $C > 0$ indépendante du maillage telle que

$$\forall F \in \mathbb{R}^n, \ \|A^{-1}F\| \leq C\|F\|.$$

   Mettre en évidence numériquement la stabilité L^∞ du schéma.
9. On suppose maintenant que l'on ne connaît les valeurs de la fonction k qu'aux points $(x_i)_i$ du maillage. Proposer un schéma aux différences finies qui n'utilise que ces valeurs de la fonction k (et pas celles de sa dérivée).

10. On remarque que le problème (1) peut se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} -k(x)\partial_{xx}u(x) - k'(x)\partial_x u(x) = f(x), & \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

On propose d'approcher le problème (3) par le schéma suivant :

$$-k(x_i)\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - k'(x_i)\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f(x_i), \quad \forall i \in \{1, \cdots, N\}.$$

Préciser la matrice $\tilde{A}$ du système linéaire $\tilde{A}\tilde{U} = F$ à résoudre. Ce schéma est-il meilleur ou moins bon que le schéma (2) ? Justifier.

2 Un problème d'optimisation

Si l'on revient au problème de modélisation initial, la configuration u de la corde à l'équilibre est l'unique fonction vérifiant les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$ et qui minimise l'énergie suivante :

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 k(x)\left(\partial_x u(x)\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)u(x)\mathrm{d}x.$$

11. Montrer que s'il existe $u \in X = \{v \in \mathcal{C}^2([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}$ tel que $E(u) = \inf_{v \in X} E(v)$, alors cette solution est unique.

On admet le résultat suivant :

Théorème

Soient $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $k \in \mathcal{C}(|0,1],\mathbb{R})$ telle que $\inf_{[0,1]} k > 0$ alors :

$$\exists! u \in X, \forall v \in X, E(u) \leq E(v). \tag{4}$$

12. Sous les hypothèses du Théorème, montrer que l'unique solution du problème (4) est aussi solution du problème (1).

On souhaite maintenant s'assurer que la présence de la charge n'entraîne pas la rupture des points d'attache. On admet que les forces exercées par la corde en tension sur les deux points d'attache sont respectivement données par :

$$F_0 = k(0)\partial_x u(0) \quad \text{et} \quad F_1 = k(1)\partial_x u(1),$$

où u est la position d'équilibre de la corde.
L'énergie de rupture associée est alors définie par la quantité suivante :

$$R = \frac{1}{2}\left|k(0)\partial_x u(0)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|k(1)\partial_x u(1)\right|^2.$$

On considère une fonction $p \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ à support dans $[-\ell,\ell]$, avec $0 < \ell < \frac{1}{2}$, qui représente le poids de la charge de longueur 2ℓ avec laquelle on va travailler. Notons que du fait de l'orientation usuelle de la gravité nous choisirons des fonctions p négatives. On note $a \in [\ell, 1-\ell]$ la position du centre de la charge, alors le champ de force f^a auquel est soumis la corde est défini par $f^a(x) = p(x-a)$.
Ainsi, à chaque valeur de a on associe une unique solution, notée u^a, du problème (1) (avec f^a comme second membre) et l'énergie de rupture associée $R(a)$.

L'objectif est maintenant de trouver la valeur de a qui va minimiser la fonctionnelle R et ainsi les risques de rupture des attaches de la corde.
Pour cela, dans un premier temps, on utilise la méthode numérique présentée en Section 1 pour déterminer une solution approchée du problème (1) et ainsi obtenir une approximation de la fonction R.

Ensuite, à N fixé, on va chercher à minimiser par rapport à a la fonctionnelle R_N qui approche R et définie par :

$$\begin{aligned} R_N(a) &= \frac{1}{2}\left(k_{\frac{1}{2}}\frac{u_1^a - u_0^a}{h}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(k_{N+\frac{1}{2}}\frac{u_{N+1}^a - u_N^a}{h}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(k_{\frac{1}{2}}\frac{u_1^a}{h}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(k_{N+\frac{1}{2}}\frac{u_N^a}{h}\right)^2. \end{aligned}$$

Si l'on suppose que $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ alors la dérivée de R_N s'écrit de la façon suivante :

$$R_N'(a) = k_{\frac{1}{2}}^2 \frac{u_1^a v_1^a}{h^2} + k_{N+\frac{1}{2}}^2 \frac{u_N^a v_N^a}{h^2},$$

où V^a est l'unique solution du système linéaire :

$$AV^a = G^a \quad \text{avec} \quad V^a = \begin{pmatrix} v_1^a \\ \vdots \\ v_N^a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G^a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^a}{\partial a}(x_1) \\ \vdots \\ \frac{\partial f^a}{\partial a}(x_N) \end{pmatrix}.$$

13. Mettre en place un algorithme de gradient à pas constant ρ permettant de minimiser la fonction R_N et de trouver une valeur approchée du minimum.
    Décrire les différentes étapes réalisées pour mettre en place cet algorithme.
14. En prenant
    $$p(x) = -\lambda e^{-(\lambda x)^2} \quad \text{avec } \lambda = 20 \quad \text{et} \quad k(x) = 1 + 0.8\sin(10x)\cos(5x),$$
    calculer la position optimale de la charge ainsi que l'énergie de rupture minimale (on pourra choisir $N = 100$ et initialiser l'algorithme de gradient avec $a_0 = 0.5$ par exemple).
    Tracer alors la position de la corde au point minimum.
    On pourra également tracer la fonction R_N en fonction de a afin de vérifier la solution obtenue.
15. Commenter la méthode de gradient utilisée, discuter le choix du pas de descente. Cette discussion pourra être illustrée par des résultats numériques faisant intervenir différentes valeurs du pas ρ.
16. Question facultative : Proposer et mettre en place une méthode alternative.