# Flot de la chaleur pour les applications harmoniques

Léa Nicolas

Octobre 2017

La partie numérique devra être envoyée à l'adresse

*lea.nicolas@polytechnique.edu*

**Instructions** Pour vos programmes, il vous est demandé d'utiliser `Python`. Vous m'enverrez vos fichiers dans un dossier compressé comportant votre nom, dans lequel les questions seront traitées dans des fichiers séparés. Chaque fichier devra comporter des commentaires précisant :

1. le numéro de la question à laquelle il répond ;
2. la nature des éléments pris en entrée;
3. le(s) élément(s) affichés en sortie;
4. si le programme produit un résultat aberrant ou ne marche pas.

## 1 Introduction

Nous considerons le *flot des applications harmoniques*, allant du disque

$$\mathcal{D} := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\, |x| < 1\}$$

vers la sphère

$$\mathbb{S}^2 := \{y \in \mathbb{R}^3,\, |y| = 1\}\,.$$

Celui-ci désigne un champ de vecteurs de *norme unité*, i.e.

$$u\, : \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{S}^2\,,$$

et solution de

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u|\nabla u|^2 & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{D}\,, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathcal{D}\,, \\ u(\cdot,t) = u_0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}, t \leq 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

avec une donnée initiale $u_0 \in C^\infty(\mathcal{D})$ telle que pour tout $x$ dans $\mathcal{D}$, $u(x) \in \mathbb{S}^2$.
L'étude de (1) a été initiée par Eells et Sampson [1] dans le but de construire des applications harmoniques d'une surface $\mathcal{D}$ dans une variété (qui est ici $\mathbb{S}^2$), qui soit une déformation continue de $u_0$. En effet, sous certaines conditions, la limite asymptotique d'une solution globale de (1) vérifie

$$0 = \Delta u + u|\nabla u|^2 \; x \in \mathcal{D}\,,$$

c'est-à-dire que $u$ est harmonique de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{S}^2$. En physique, l'équation (1) survient dans deux situations : la théorie des cristaux liquides, ainsi que le micromagnétisme (équation de Landau-Lifschitz-Gilbert [2]).
Il se peut qu'il n'existe pas, au sens $C^\infty$, de solution $u(t,\cdot)$ pour tout $t \leq 0$. Dans ce cas, on dit que $u$ *explose en temps fini*.

**Notations.** L'expression $a \cdot b$ désignera le produit scalaire canonique d'un espace euclidien, indifféremment selon que $a, b$ désignent des matrices ou des vecteurs. On notera $|\cdot|$ la norme euclidienne associée. La notation $|\nabla u|^2$ désigne la norme euclidienne au carré de la matrice jacobienne de $u$, i.e. si $u = (u_1, u_2, u_3)$,

$$|\nabla u|^2 := \left| \begin{bmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \\ \nabla u_3 \end{bmatrix} \right| = \sum_{i \in \{1,2\}, j \in \{1,2,3\}} (\partial_{x_i} u_j)^2 = \sum_{j=1}^{3} |\nabla u_j|^2 \,.$$

Le laplacien d'une fonction vectorielle $u$ est bien sûr

$$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)\,,$$

où $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$.

# 2 Préliminaires (7pts)

## 2.1 Equation générale (3+1pts)

On admettra que toute solution régulière $u$ de (1) préserve la contrainte

$$u(t,x) \in \mathbb{S}^2\,,$$

pour tout $(t, x)$ tel que $u$ est bien définie.

1. Montrer, en utilisant la contrainte, que toute solution $u$ vérifie que $\partial_t u$ est orthogonal point par point à $u$.

2. Dans le cas où $u_0$ s'annule sur le bord du disque $\partial\mathcal{D}$, montrer que pour toute solution $u$, l'énergie de Dirichlet

$$E(t) = \int_{\mathcal{D}} |\nabla u(t,x)|^2 dx$$

   est une fonction décroissante du temps $t$. On pourra prendre formellement le produit scalaire de (1) avec $\partial_t u$.

3. Montrer que (1) est un problème gradient pour la fonctionnelle $E$, c'est-à-dire que toute solution régulière vérifie

$$\partial_t u = -dE(u)\,,$$

   où, pour $v \in C^\infty(\mathcal{D})$,

$$dE(u)[v] := \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \int_{\mathcal{D}} \left| \nabla \left( \frac{u + \lambda v}{|u + \lambda v|} \right) \right|^2 dx\,.$$

   *Remarque* 1. L'application linéaire $v \mapsto dE(u)[v]$, $v \in C^\infty$ sera identifiée à la fonction $x \mapsto w_u(x)$ telle que pour tout $v$,

$$dE(u)[v] = \int_{\mathcal{D}} w_u \cdot v dx\,.$$

4. (Bonus) Quel est le gradient associé à la contrainte

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}\,,\ |u(t,x)|^2 = 1\,.$$

   Justifier par analogie avec le cours. Mise à part sa signification en terme de densité d'énergie, à quoi correspond le terme $|\nabla u|^2$ dans le membre de droite de (1) ?

## 2.2 Solutions symétriques (3+1pts)

On effectue le changement de variable

$$(x_1, x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta),\ r, \theta \in [0,1] \times [0, 2\pi)\,.$$

On rappelle que le gradient en coordonnées polaires s'écrit formellement

$$\nabla = e_r \partial_r + e_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta\,,$$

où

$$e_r := (\cos\theta, \sin\theta), \qquad e_\theta := (-\sin\theta, \cos\theta)\,.$$

Quant au laplacien, celui-ci s'écrit :

$$\Delta = \partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}\,.$$

Il peut être montré que dans le cas d'une conditions aux bords symétrique du type

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \left(\frac{x_1}{|x_1|}\sin h_0(|x|), \frac{x_2}{|x_2|}\sin h_0(|x|), \cos h_0(|x|)\right) \\ &= (\cos\theta \sin h_0(r), \sin\theta \sin h_0(r), \cos h_0(r)) \end{aligned}$$

pour $(x_1, x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $x \in \mathcal{D}$, alors (1) admet des solutions symétriques s'écrivant

$$\begin{aligned} u(t,x) &:= \left(\frac{x_1}{|x_1|}\sin h(t,|x|), \frac{x_2}{|x_2|}\sin h(t,|x|), \cos h(t,|x|)\right) \\ &= (\cos\theta \sin h(t,r), \sin\theta \sin h(t,r), \cos h(t,r))\,. \end{aligned} \tag{2}$$

1. Exprimer $|\nabla u|^2(t,x)$ en fonction de $h(t,r)$, où $r = |x|$.
2. En déduire $E(t)$, quand $u(t,\cdot)$ est bien définie.
3. Injecter l'expression (2) dans (1). Prendre le produit scalaire de l'égalité ainsi obtenue avec le vecteur

$$u^\perp(t,x) := (\cos\theta \cos h(t,r), \sin\theta \cos h(t,r), -\sin h(t,r))\,,$$

et en déduire l'équation vérifiée par $h(t,r)$ pour $r \in (0,1)$. Quelles sont les conditions au bord dans le cas où $u_0(x)|_{\partial\mathcal{D}} = e_z := (0,0,1)$ ?

# 3 Différences finies (15pts)

On considère l'équation en polaires

$$\begin{cases} \partial_t h = \partial_{rr} h + \dfrac{1}{r}\partial_r h - \dfrac{\sin 2h}{2r^2}, & (t,r) \in \mathbb{R}^+ \times (0,1)\,, \\ h(t,0) = h(t,1) = 0, & t \in \mathbb{R}^+\,, \\ h(r,0) = h_0(r), & r \in (0,1)\,. \end{cases} \tag{3}$$

1. Remarquant que l'équation

$$\partial_t h = \frac{1}{r}\partial_r h$$

est une équation de type "transport à vitesse variable", préciser, dans le cas d'un schéma décentré pour (3), lequelle de ces deux approximations est "la bonne" :

$$\partial_r h \simeq \frac{h(r+\Delta r) - h(r)}{\Delta r}$$

ou

$$\partial_r h \simeq \frac{h(r) - h(r - \Delta r)}{\Delta r} \,,$$

pour $\Delta r > 0$.

2. Proposer un schéma aux différences finies explicite en temps pour (3), et créer une fonction `explicitDF(r,h0,T,dt)`, qui renvoie le vecteur

$$(h_i^n), \qquad 0 \leq ndt \leq T, \qquad 0 \leq idr \leq 1$$

en fonction de

$$r = (r_i)_{0 \leq idr \leq 1}, \qquad (h_{0,i})_{0 \leq idr \leq 1}, \qquad dt > 0, \qquad \text{et } T > 0\,.$$

Ici, le paramètre $n$ correspond à la discrétisation en temps et $i$ correspond à la discrétisation en espace. En vous aidant du cours, expliquer pourquoi les pas de temps et d'espace doivent vérifier une condition CFL du type

$$\frac{dt}{(dr)^2} < \text{constante}\ .$$

Numériquement, quelle valeur observez-vous pour cette constante ?

3. On peut montrer que si $h_0(r) \geq cr(1-r)$, avec $c > 0$ suffisamment grande, alors la solution $h$ explose dans le sens suivant : il existe $t^* > 0$, tel que

$$\lim_{t \to t^*} \partial_r h(t, 0) \to \infty.$$

Dans un script, tester la fonction précédente pour

$$h_0(r) = cr(1-r)\,,$$

pour différentes valeurs de $c > 0$. Evaluer approximativement la valeur limite $c_{\mathrm{expl}}$ pour laquelle on observe un phénomène d'explosion en temps fini. Pour une donnée initiale bien choisie, tracer deux graphes représentant respectivement

- la solution $h(t^* - \epsilon, \cdot)$ (juste avant explosion),
- la solution $h(t^*, \cdot)$ (juste après).

4. Utilisant la même fonction que pour la question précédente, réaliser un script qui trace l'énergie $E(t)$ au cours du temps. Qu'observe-t-on dans le cas d'une explosion quand $t = t^*$ ?

5. Créer une fonction `implicitDF(r,h0,T,dt)` qui implémente le pendant implicite du schéma précédent, en faisant attention aux conditions au bord. Quel est l'avantage de ce programme par rapport au cas explicite ? Refaire les questions 3 et 4 dans le cas implicite. En particulier, donner la valeur de $c > 0$ optimale, et comparer les deux valeurs obtenues $c_{\mathrm{impl}}$ et $c_{\mathrm{expl}}$.