Ecole Polytechnique, Promotion 2016
Approximation numérique et optimisation (MAP 411)
Devoir obligatoire du mardi 5 décembre 2017
A rendre au plus tard le mardi 19 décembre 2017

1 Différences finies

On considére l'équation de la chaleur dans $(0,1)$ avec condition aux limites périodique

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t,x+1) = u(t,x) \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1).\end{array}\right. \tag{1}$$

Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, j \in \mathbb{Z}.$$

On note u_j^n une approximation discrète au point (t_n, x_j) de la solution exacte $u(t,x)$. On note aussi

$$\sigma_j^n = u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n.$$

On considère le schéma suivant

$$\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{5}{6}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\Delta t} - \nu\frac{\sigma_j^{n+1} + \sigma_j^n}{2(\Delta x)^2} = 0,$$

avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et la condition aux limites $u_{j+N}^n = u_j^n$, $\forall j$.

1. Vérifier que le schéma est bien défini (c'est-à-dire que l'on peut bien calculer les inconnues au temps t_{n+1} en fonction de celles au temps t_n) et qu'il est consistant.
2. Montrer que le schéma est stable en norme L^2. Que peut-on dire de sa convergence ?
3. Montrer que le schéma est précis à l'ordre 2 en temps et 4 en espace. Indication : on choisira avec soin le point (t,x) autour duquel seront centrées les formules de Taylor.

2 Optimisation

Soit deux entiers $1 \leq m < n$. Soit une matrice rectangulaire réelle A de taille $m \times n$ et de rang m. Soit deux vecteurs non nuls $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$. On suppose que toutes les composantes de A, b, c sont positives ou nulles, que, dans chaque colonne de A, au moins un coefficient est strictement positif. On définit le cône positif de $\mathbb{R}^n$

$$K = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_i \geq 0 \ \forall 1 \leq i \leq n\Big\}.$$

Sur K on définit la fonction

$$J(x) = c \cdot x + \sum_{i=1}^{n} x_i \log \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \right).$$

On considère le problème d'optimisation

$$\min_{x \in K,\ Ax=b} J(x). \tag{2}$$

Dans tout ce qui suit on suppose que l'ensemble $\{x \in K,\ Ax = b\}$ est non vide.

1. Montrer que $J(x)$ est bien définie et continue sur K.
2. Montrer que l'ensemble $\{x \in K,\ Ax = b\}$ est borné. En déduire qu'il existe au moins une solution optimale de (2).
3. Montrer que $J(tx) = tJ(x)$ pour tout $x \in K$ et tout $t > 0$. En déduire que J est convexe (on commencera par se ramener à $K \cap \{\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$).
4. Calculer la dérivée de J et montrer qu'aucune solution optimale de (2) ne peut se trouver sur le bord de K.
5. Ecrire la condition nécessaire d'optimalité satisfaite par une solution optimale. Est-elle aussi suffisante ?