**Marier les ondes**

Proposé par : Habib Ammari – Département de Mathématiques et Applications– Ecole Normale Supérieure - habib.ammari@ens.fr

En imagerie médicale, pour chaque méthode, il y a deux critères importants : la résolution ou la sensitivité, i.e., le plus petit détail qu'on pourrait détecter, et la spécificité, i.e., la capacité de distinguer une anomalie cancéreuse et une anomalie bénigne. En général, ces deux critères sont conjointement assez mauvais et ne permettent pas un diagnostic très fiable. La solution pour augmenter la sensitivité et la spécificité de l'imagerie onde (et même de permettre une reconstruction de cartes de paramètres physiques) est de combiner au moins deux ondes aux caractéristiques différentes pour réaliser une image quantitative plus résolue que dans les systèmes standards.

Les méthodes multi-ondes font l'objet de recherches très actives en mathématiques appliquées afin de développer des algorithmes perfomants et d'estimer leur stabilité, leur résolution et leur vitesse de convergence.

L'objet de ce projet est d'étudier une méthode multi-onde, dite imagerie optique par modulation acoustique, pour l'imagerie du contraste optique. On considère un modèle simplifié.

Soit $\Omega$ un ouvert borné et régulier. On suppose que $\Omega$ est simplement connexe. On note $\nu$ la normale sortante au bord $\partial\Omega$ de $\Omega$. On considère l'équation de la diffusion dont la solution $\varphi_*$ est la densité lumineuse :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_* + q_*\varphi_* &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu\varphi_* + \varphi_* &= g \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $q_* \geq 0$ est la distribution (variable) d'absorption optique, $g \geq 0$ est l'intensité de la lumière incidente et $\partial_\nu$ est la dérivée normale. Dans toute la suite on suppose que $q_* = 0$ dans un voisinage de $\partial\Omega$.

**1.** Écrire une formulation variationnelle à (1).

**2.** Ecrire un programme FreeFem qui résout (1). Dans tous les exemples numériques abordés dans ce sujet, on prend $\Omega$ le dique unité, $g = 1$ sur $\partial\Omega$ et $q_*(r,\theta) = 1 + (r - \frac{1}{2})\sin\theta$ pour $r < \frac{1}{2}$ et $q_*(r,\theta) = 0$ pour $r \geq \frac{1}{2}$ ; $(r,\theta)$ étant les coordonnées polaires.

En imagerie purement optique, on cherche à déterminer la distribution de l'absorption optique à partir de mesures de $\partial_\nu\varphi_*$ sur le bord $\partial\Omega$.

**3.** Soit $F : q \mapsto \partial_\nu \varphi|_{\partial\Omega}$ où $\varphi$ est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\varphi + q\varphi & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu\varphi + \varphi & = & g & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2}$$

On définit par

Soit $h \in L^\infty(\Omega)$. Montrer que lorsque $||h||_{L^\infty} \to 0$, on a

$$F[q+h] = F[q] + DF[q](h) + o(||h||_{L^\infty}).$$

On dit que $F$ est dérivable au sens de Fréchet et que $DF[q]$, qui est une forme linéaire sur $L^\infty$, est sa dérivée.

Montrer que $DF[q](h) = \partial_\nu u|_{\partial\Omega}$ où $u$ est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + qu & = & -h\varphi & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u + u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

avec $\varphi$ définie par (2).

**4.** Implémenter le schéma itératif suivant, dit de Landweber, pour la reconstruction de $q_*$ à partir de $\partial_\nu \varphi_*|_{\partial\Omega}$ :

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} - \mu DF[q^{(n)}]^*(F[q^{(n)}] - \partial_\nu\varphi_*),$$

où l'état initial est donné par $q^{(0)} = 0$, $DF^*$ est l'adjoint de $DF$ (pour le produit scalaire $L^2$) et $\mu = 10^{-2}$ est un paramètre de régularisation.

En imagerie optique par modulation acoustique, on cherche à déterminer le coefficient de l'absorption optique $q_*$ à partir de mesures de $\varphi_*^2 \nabla q_*$ dans tout $\Omega$.

Afin de résoudre ce problème inverse, on considère le système d'équations en $\varphi$ et $q$ :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\varphi + q\varphi & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu\varphi + \varphi & = & g & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\nabla \cdot (\varphi^2 \nabla q) & = & -\nabla \cdot (\varphi_*^2 \nabla q_*) & \text{dans } \Omega, \\ q & = & 1 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4}$$

**5.** Ecrire un programme FreeFem qui résout le problème de détermination du point fixe suivant

1. Choisir l'état initial comme suit : $q^{(0)} = 0$.

2. Calculer $\{q^{(n)}\}$ comme suit :

   (a) Pour $n \geq 1$, résoudre

$$\begin{cases} -\Delta\varphi^{(n)} + q^{(n-1)}\varphi^{(n)} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu\varphi^{(n)} + \varphi^{(n)} &= g \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

   (b) Trouver $q^{(n)}$ en résolvant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot ((\varphi^{(n)})^2\nabla q^{(n)}) &= -\nabla \cdot (\varphi_*^2\nabla q_*) \quad \text{dans } \Omega, \\ q^{(n)} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

**6.** Soit $G : q \mapsto q|\nabla\varphi|^2|_\Omega$ où $\varphi$ est la solution de (2). Calculer la dérivée, $DG$, au sens de Fréchet de $G$ (définie de la même manière que $DF$).
**7.** Implémenter le schéma itératif de Landweber pour la reconstruction de $q_*$ à partir de $q_*|\nabla\varphi_*|^2$ dans $\Omega$ :

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} - \mu DG[q^{(n)}]^*(G[q^{(n)}] - q_*|\nabla\varphi_*|^2),$$

où l'état initial est donné par $q^{(0)} = 0$, $\mu = 10^{-2}$ est un paramètre de réfularisation et $DG^*$ est l'adjoint de $DG$ (pour le produit scalaire $L^2$).
**8.** Comparer numériquement le schéma du point fixe avec celui de Landweber.
**9.** Comparer numériquement les performances de l'imagerie purement optique et celles de l'imagerie optique par modulation acoustique.