

ANALYSE NUMERIQUE ET OPTIMISATION

Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique

G. ALLAIRE

25 Janvier 2011

CHAPITRE I

- ➡ Analyse numérique: amphis 1 à 12. Optimisation: amphis 13 à 18.
- ➡ 3 premiers amphis: Grégoire ALLAIRE. 9 amphis suivants: François ALOUGES. 6 derniers amphis: Pierre-Louis LIONS.
- ➡ Site web du cours:
http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours_X_annee2.html
- ➡ Mes coordonnées: gregoire.allaire@polytechnique.fr

Introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique

Les trois étapes des mathématiques appliquées:

- ➔ Modélisation.
- ➔ Analyse du modèle.
- ➔ Simulation numérique.

Domaines d'applications innombrables ! Quelques exemples:

- ➔ Sciences de l'ingénieur: aérodynamique, calcul des structures, électromagnétisme, énergie, automatique, signal, finance...
- ➔ Autres sciences: physique, optique, chimie, biologie, économie...
- ➔ Enjeux sociétaux: climat, environnement...

Dans ce cours: modèles déterministes.

Objectif final du cours

Acquérir les outils mathématiques pour comprendre et interpréter (sinon réaliser) des simulations numériques. *A quoi ça sert ?*

- ⇒ **Prévisions:** météo, environnement, sureté...
- ⇒ **Conception:** soufflerie numérique pour l'aérodynamique, optimisation...
- ⇒ **Expérimentation:** validation d'un modèle, vérification d'une théorie...

Avertissement

Attention aux belles images sans signification !

CFD = computational fluid dynamics

CFD \neq color fluid dynamics !

Ne jamais oublier de valider un calcul !

Buts de cette leçon

- ⇒ Expliquer brièvement ce qu'est la modélisation.
- ⇒ Introduire la méthode des différences finies.
- ⇒ Présenter quelques idées de base du calcul numérique.
- ⇒ Montrer que les aspects théoriques et pratiques forment un tout !
- ⇒ Montrer l'utilité des mathématiques appliquées !
- ⇒ Présenter une application d'un résultat récent.

Remarque: on reste assez formel dans l'analyse (voir les prochaines leçons pour un formalisme plus rigoureux).

Exemple de modélisation

Convection et diffusion de la chaleur.

Notations. Inconnue \equiv température $\theta(t, x)$.

\Rightarrow Variables de temps $t \in \mathbb{R}^+$ et d'espace $x \in \mathbb{R}^N$.

\Rightarrow Dérivée partielle en temps: $\frac{\partial \theta}{\partial t}$

\Rightarrow Gradient en espace: $\nabla \theta = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \theta}{\partial x_N} \right)^T$

\Rightarrow Divergence d'un vecteur $q = (q_1, \dots, q_N)^T$: $\operatorname{div} q = \sum_{i=1}^N \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$

\Rightarrow Laplacien: $\Delta \theta = \operatorname{div}(\nabla \theta) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2}$

Conservation (ou bilan) de l'énergie

Grandeurs physiques: température θ , flux de chaleur q (un vecteur), sources thermiques f , chaleur spécifique $c > 0$ (une constante).

Bilan dans un volume élémentaire V (indépendant du temps):

Variation en temps = sources + pertes ou entrées à travers les parois

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V c \theta dx \right) = \int_V f dx - \int_{\partial V} q \cdot n ds.$$

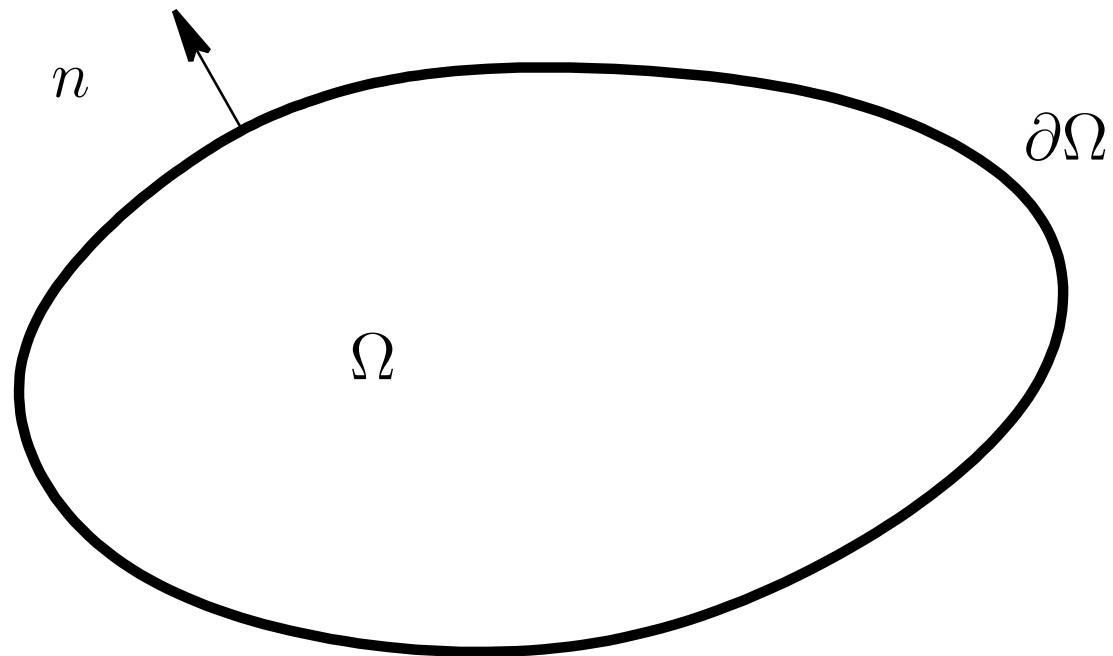
Par application du théorème de Gauss on obtient

$$\int_{\partial V} q \cdot n ds = \int_V \operatorname{div} q dx.$$

On permute la dérivée en temps et l'intégrale sur V . Comme le volume V est quelconque, on en déduit

$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div} q = f$$

Normale unité d'un ouvert



Convention: normale extérieure !

Normale unité: $\|n\| = 1$.

Loi constitutive (dite de Fourier ou de Fick)

Grandeurs physiques: vitesse convective V , conductivité thermique $k > 0$.

$$q(t, x) = cV\theta(t, x) - k\nabla\theta(t, x)$$

Relation linéaire entre le flux à travers une surface et la **convection** suivant la vitesse plus la **diffusion** suivant l'opposé du gradient thermique.

Relations supplémentaires:

Condition initiale: $\theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$.

Conditions aux limites:

➡ Dirichlet: $\theta = 0$ sur le bord (**thermostat**).

➡ Neumann: $q \cdot n = 0$ (**adiabatique**).

Modèle de convection-diffusion

On trouve une **équation aux dérivées partielles**:

$$\begin{cases} c \frac{\partial \theta}{\partial t} + c V \cdot \nabla \theta - k \Delta \theta = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta = 0 & \text{sur } \partial \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

⇒ **Données**: c , V , k , $f(t, x)$, $\theta_0(x)$, et Ω .

⇒ **Inconnue**: $\theta(t, x)$.

⇒ Modèle issu d'une loi de conservation et d'une loi constitutive.

⇒ Modèle simplifié dont l'analyse montrera les limites !

Modélisation (encore !)

Balance entre le terme de convection et le terme de diffusion mesurée par une grandeur sans dimension, le **nombre de Péclet**

$$\text{Pe} = \frac{cVL}{k},$$

où L est une longueur caractéristique du problème (par exemple le diamètre du domaine Ω).

Simplifications possibles du modèle:

$\text{Pe} \ll 1 \Rightarrow$ équation de la chaleur

$\text{Pe} \gg 1 \Rightarrow$ équation d'advection

On a donc **trois modèles** parmi lesquels il faut savoir choisir.

Modèles simplifiés

Equation de la chaleur ($Pe = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta = 0 & \text{sur } \partial \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Equation d'advection ($Pe = +\infty$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \frac{\partial \theta}{\partial t} + c V \cdot \nabla \theta = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta = 0 & \text{sur } \{x \in \partial \Omega \text{ tel que } V \cdot n(x) < 0\} \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Solutions explicites

Hypothèses: dimension $N = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ (pas de conditions aux limites), source $f = 0$. On pose $\nu = k/c$. **Faites le calcul pour vérifier !**

Equation de convection-diffusion:

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(y) \exp\left(-\frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu t}\right) dy.$$

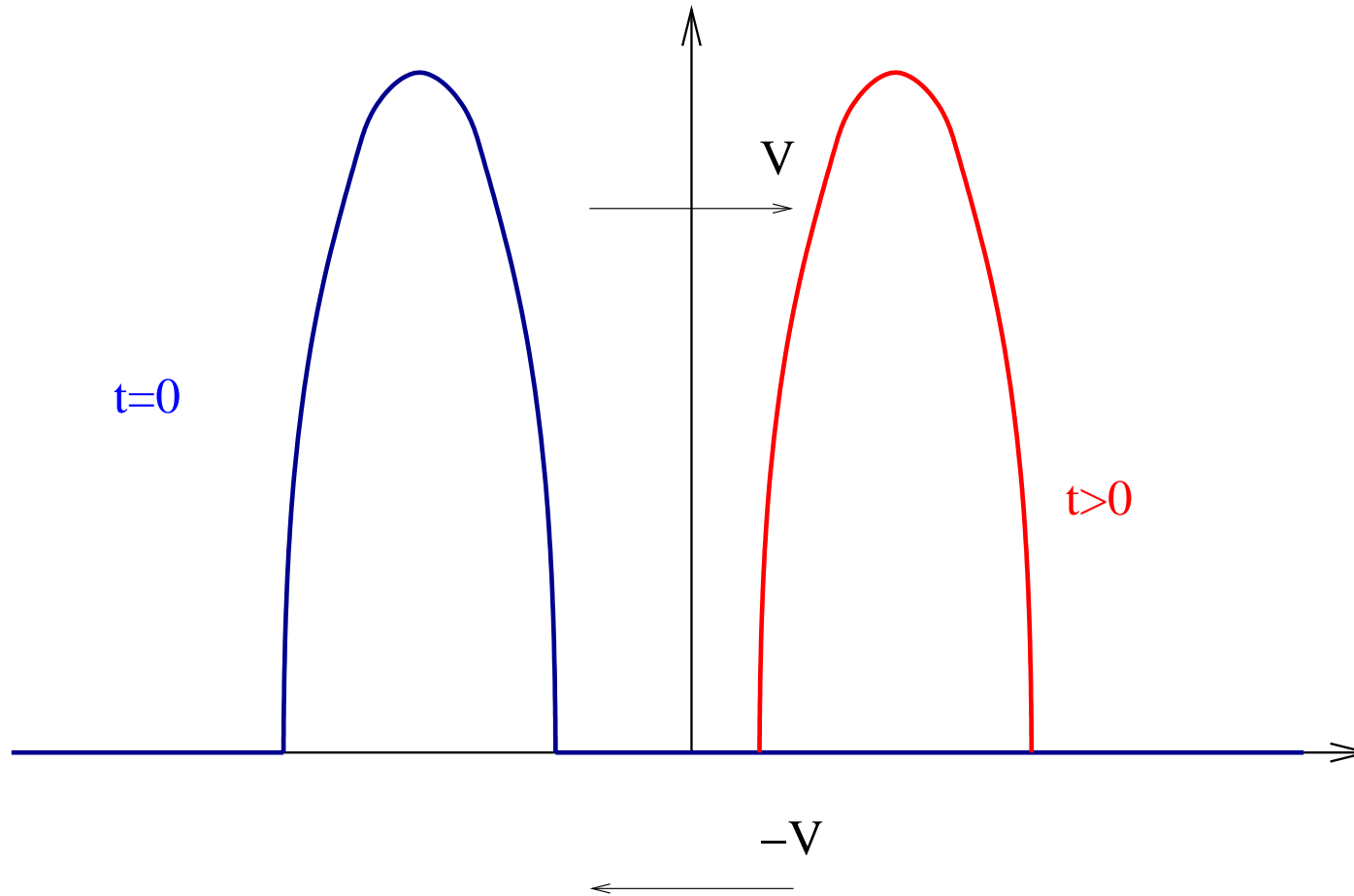
Equation de la chaleur:

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(y) \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{4\nu t}\right) dy.$$

Equation d'advection:

$$\theta(t, x) = \theta_0(x - Vt).$$

Propriété de la solution explicite de l'équation de convection



Principe du maximum pour la solution $\theta(t, x) = \theta_0(x - Vt)$:

$$\min \theta_0 \leq \theta(t, x) \leq \max \theta_0$$

Propriété des solutions de la chaleur et de convection-diffusion

Principe du maximum encore pour les solutions explicites des équations de la chaleur et de convection-diffusion.

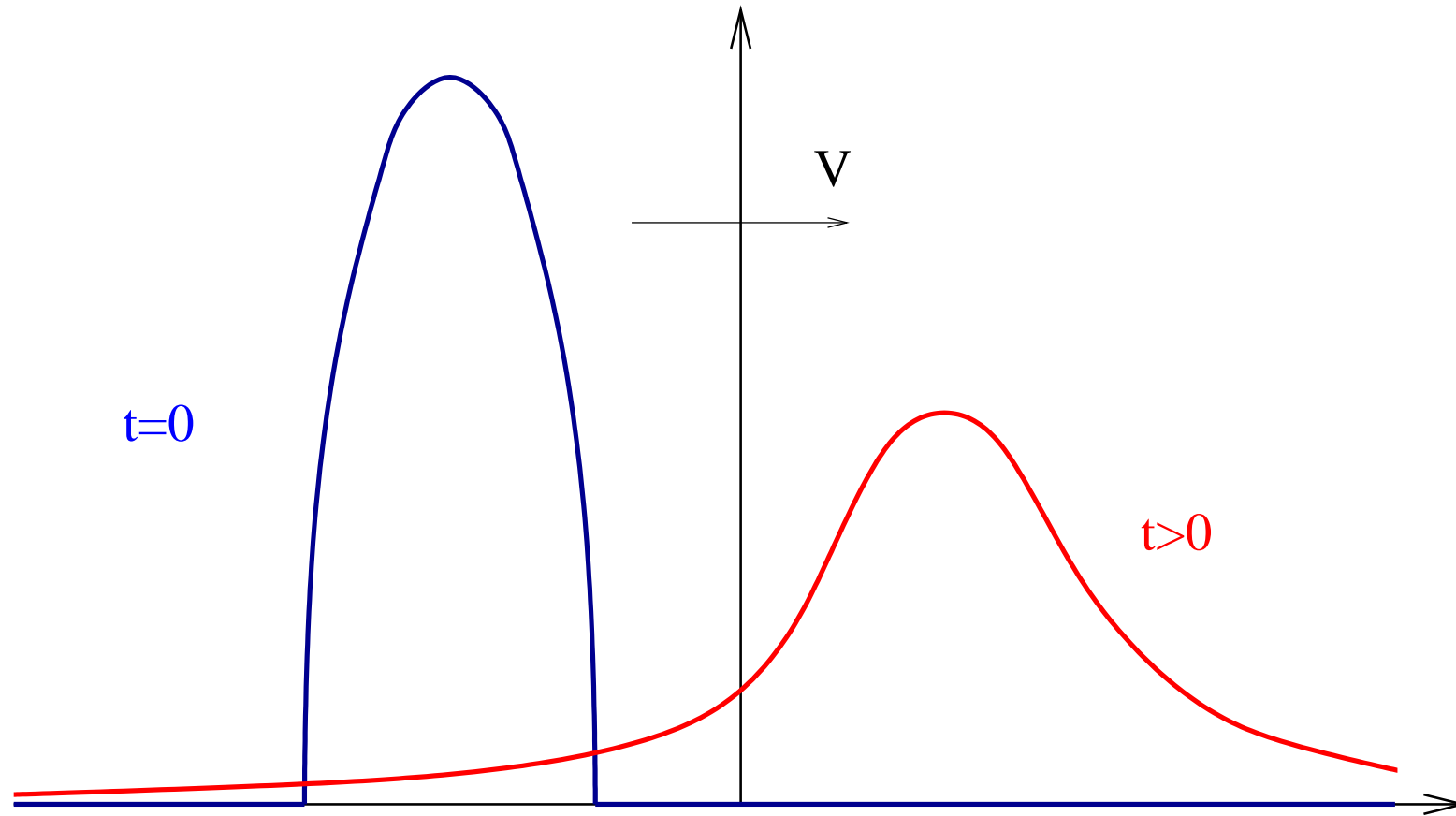
Solution = donnée initiale **moyennée** par un noyau gaussien:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu t}\right) dy = 1.$$

Faites le calcul pour vérifier !

Vitesse infinie de propagation ! Pour les équations de la chaleur et de convection-diffusion, si $\theta_0(x) \geq 0$ et $\theta_0 \neq 0$, alors $\theta(t, x) > 0$ pour tout $t > 0$.

Solution de l'équation de convection-diffusion



Convolution de la donnée initiale avec un noyau gaussien

Analyse des modèles

Au vu des solutions explicites:

➡ **Principe du maximum** pour les trois modèles:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \theta_0(x) \leq \theta(x, t) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} \theta_0(x) \quad \text{pour tout } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

➡ **La “flèche” du temps:** l'équation d'advection est **réversible** en temps, tandis que l'équation de la chaleur (ou de convection-diffusion) est **irréversible**.

➡ **Vitesse de propagation:** finie pour l'équation d'advection, mais **infinie** pour l'équation de la chaleur (ou de convection-diffusion).

Remarques

- ➡ Analyse plus poussée au Chapitre VIII: existence, unicité, et propriétés qualitatives des solutions de l'équation de la chaleur.
- ➡ **La même équation se retrouve dans d'autres problèmes:** évolution de la concentration d'un polluant, évaluation du prix des options en finance, écoulement potentiel d'un fluide, électrostatique...
- ➡ Très nombreux autres modèles à base d'équations aux dérivées partielles.

Notion de problème bien posé (section 1.5.1)

- ➡ **Problème aux limites** = équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine.
- ➡ **Problème de Cauchy** = équation aux dérivées partielles où, pour la variable de temps t , les conditions “au bord” sont des conditions initiales (et pas finales).

Définition. On dit que le problème $\mathcal{A}(u) = f$ est **bien posé** au sens de Hadamard si pour toute donnée f il admet une solution unique u , et si cette solution u dépend continuellement de la donnée f .

Condition nécessaire pour faire du calcul numérique !

Des petites variations de f (erreurs de mesures ou d'arrondis) ne doivent entraîner que des petites variations de u .

Un peu de vocabulaire

⇒ Exemple d'équation **parabolique**: équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = f \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ + \text{conditions aux limites} + \text{condition initiale} \end{array} \right.$$

⇒ Exemple d'équation **elliptique**: équation de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \theta = f \quad \text{dans } \Omega \\ + \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

⇒ Exemple d'équation **hyperbolique**: équation des ondes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \Delta \theta = f \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ + \text{conditions aux limites} + \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

Elliptique, parabolique, hyperbolique

Malgré les ressemblances, **propriétés très différentes**:

⇒ **Elliptique**: modèle stationnaire (thermique, électrostatique, membrane élastique, écoulement potentiel).

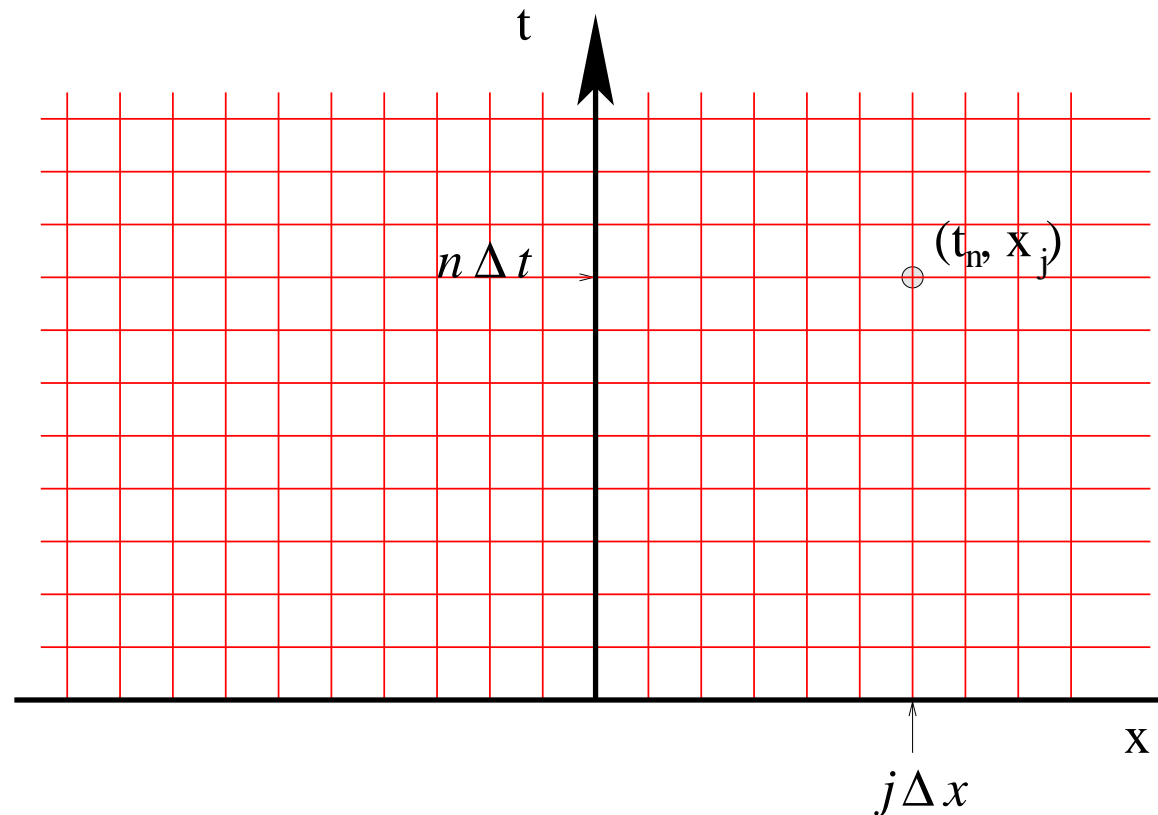
⇒ **Parabolique**: modèle instationnaire (diffusion thermique, chimique, neutronique, fluide visqueux incompressible).

Irréversibilité, décroissance, principe du maximum, propagation à vitesse infinie.

⇒ **Hyperbolique**: modèle instationnaire (propagation d'ondes, électromagnétisme, élastodynamique).

Réversibilité, conservation de l'énergie, propagation à vitesse finie.

Différences finies (section 1.4)



Maillage: discrétisation de l'espace et du temps

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \quad \text{pour} \quad n \geq 0, j \in \mathbb{Z}$$

$\Delta t =$ pas de temps, $\Delta x =$ pas d'espace (supposés "petits").

Principe des différences finies

On calcule des approximations

$$u_j^n \approx u(t_n, x_j)$$

On remplace les dérivées par des différences finies

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{ou bien} \quad \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad \text{ou bien} \quad \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

Principe de discrétisation:

on remplace un problème de dimension **infinie** (calculer la fonction $u(t, x)$) par un problème de dimension **finie** (calculer les valeurs discrètes u_j^n), qui seul peut être résolu par un ordinateur.

Différences divisées et formules de Taylor

Il n'y a pas **unicité** des formules d'approximation par différences finies.

On utilise des **formules de Taylor**. Par exemple

$$\begin{aligned}
 -u(t, x - \Delta x) + 2u(t, x) - u(t, x + \Delta x) = & -(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \\
 & - \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) + \mathcal{O}\left((\Delta x)^6\right)
 \end{aligned}$$

On en déduit la formule centrée (en espace)

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) \approx \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

à un terme d'ordre $(\Delta x)^2$ près.

Approximation de la dérivée en temps

Trois possibilités:

⇒ Différence finie **centrée** en temps:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

⇒ Différence finie décentrée (on avance dans le temps): **Euler explicite**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

⇒ Différence finie décentrée (on remonte dans le temps): **Euler implicite**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

Application à l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

avec $\nu = \frac{k}{c} > 0$.

Pour simplifier: dimension $N = 1$ et $\Omega = \mathbb{R}$.

Nous allons faire des **expériences numériques**.

But:

montrer qu'il y a quelque chose à comprendre... c'est l'analyse numérique.

Trois schémas pour l'équation de la chaleur

⇒ schéma centré: le plus "naturel"

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

⇒ schéma d'Euler explicite: le plus simple

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

(explicite \Leftrightarrow formule immédiate pour trouver u^{n+1} en fonction de u^n)

⇒ schéma d'Euler implicite: plus compliqué

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

(implicite \Leftrightarrow système linéaire pour trouver u^n en fonction de u^{n-1})

Initialisation: $u_j^0 = u_0(x_j)$ où $u_0(x)$ est la condition initiale.

Données des expériences numériques

- ➡ Pas de terme source $f = 0$, ni de convection $V = 0$.
- ➡ Coefficient de diffusion $\nu = 1$.
- ➡ Domaine $\Omega =] - 10; +10[$.
- ➡ Condition aux limites de Dirichlet $u(-10) = u(+10) = 0$.
- ➡ Donnée initiale

$$u_0(x) = \max(1 - x^2, 0).$$

- ➡ Comme $\Omega \approx \mathbb{R}$ on compare avec la solution exacte dans \mathbb{R}

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right) dy.$$

Trois schémas pour l'équation de la chaleur

⇒ schéma centré: instable et inutilisable !

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

⇒ schéma d'Euler explicite: stable sous condition

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

⇒ schéma d'Euler implicite: toujours stable

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

Condition de stabilité

Stabilité \Leftrightarrow pas d'oscillations numériques (définition précise au prochain chapitre).

Observations numériques: on fixe Δx et on fait varier Δt .

- ➔ Schéma centré: toujours instable.
- ➔ Schéma implicite: toujours stable.
- ➔ Schéma explicite: stable sous la condition CFL (Courant, Friedrichs, Lewy ; 1928 !)

$$2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2.$$

Le pas de temps ne peut pas être trop grand !

Condition de stabilité (suite)

Justification mathématique de la condition CFL de stabilité pour le schéma explicite.

Principe du maximum discret: le schéma explicite est équivalent à

$$u_j^{n+1} = \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^n + \left(1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^n + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^n$$

u_j^{n+1} est une **combinaison convexe** si la condition CFL est satisfaite.

Donc, si $2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$, on a

$$m \leq u_j^0 \leq M \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad m \leq u_j^n \leq M \quad \forall j \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall n \geq 0.$$

Si la condition CFL n'est pas satisfaite, il y a instabilité. Exemple:

$$u_j^0 = (-1)^j \quad \Rightarrow \quad u_j^n = (-1)^j \left(1 - 4\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)^n$$

qui tend (en valeur absolue) vers ∞ car $2\nu\Delta t > (\Delta x)^2 \Rightarrow 1 - 4\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} < -1$.

Conclusion 1

Pour certains schémas il existe une condition, dite CFL, qui est nécessaire et suffisante pour la stabilité.

Autrement dit, pour certains schémas le pas de temps Δt doit être petit en comparaison au pas d'espace Δx .

Expériences numériques pour la convection-diffusion

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u - \nu \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Schéma explicite en temps, centré en espace. Mêmes données que précédemment avec $\nu \Delta t = 0.4(\Delta x)^2$ et $V = 1$.

1. $\nu = 1$
2. $\nu = 0.1$
3. $\nu = 0.01$

De plus en plus instable !

Conclusion 2

La condition CFL varie d'une équation à une autre.

Quand la vitesse de convection domine le coefficient de diffusion (**grand nombre de Péclet**) il faut trouver une autre condition CFL.

Expériences numériques pour l'advection

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Solution explicite: $u(x, t) = u_0(x - Vt)$.

1. Schéma explicite **centré**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

Instable quelque soit le choix de Δt !

2. Schéma explicite **décentré amont**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si } V > 0.$$

On va chercher l'information en **remontant le courant** (une des idées majeures de l'analyse numérique).

Stabilité du schéma décentré amont

Le schéma explicite décentré amont est stable sous une nouvelle condition CFL

$$|V|\Delta t \leq \Delta x.$$

Justification mathématique: on peut le réécrire sous la forme

$$u_j^{n+1} = \frac{V\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n,$$

qui est une combinaison convexe si $|V|\Delta t \leq \Delta x$, donc il vérifie un **principe du maximum discret**.

Conclusion 3

Tous les schémas ne fonctionnent pas, même s'ils ont l'air raisonnables !

Il faut faire appel à la physique du problème et à l'analyse mathématique pour trouver de **bons schémas**.

Dans le cas présent, l'idée clé est le **décentrement amont**.

Constats et objectifs

- ➡ Le calcul numérique n'est pas toujours simple !
- ➡ Il existe des notions importantes: condition CFL pour la stabilité, décentrement des schémas, etc.
- ➡ On a besoin de l'analyse numérique pour sélectionner les “bons” schémas numériques.
- ➡ Apprendre à bien utiliser les schémas numériques.
- ➡ Pouvoir en concevoir de nouveaux.
- ➡ Connaitre les bases théoriques indispensables.
- ➡ A court terme (deux prochains amphis): stabilité, précision, et convergence des schémas de différences finies.

Une application amusante d'une recherche récente

- On fait toujours de la recherche sur la convection-diffusion !
- **Phénomène essentiel** dans de nombreux processus industriels ou enjeux environnementaux: génie chimique, thermique, milieux poreux, pollution, stockage souterrain des déchets nucléaires, dynamique des populations...
- Le calcul numérique n'est pas **simple** en présence de fortes variations des coefficients, de grands nombres de Péclet, de géométries complexes...
- Etude de la compétition entre convection et diffusion dans un domaine borné: **asymptotique en temps grand du maximum de la solution.**

Modèle de convection diffusion

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} + V \cdot \nabla \theta - \Delta \theta = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

- ✘ On interprète θ comme une concentration ou une densité de particules.
- ✘ On suppose la vitesse V “grande” donc la diffusion ne semble pas jouer un rôle important. **Et pourtant...**
- ✘ Expériences numériques avec un logiciel (libre) d’éléments finis FreeFem++.
- ✘ Une analyse mathématique rigoureuse du phénomène peut être faite.
- ✘ Dans les calculs, vitesse verticale $V = (0, 1)$.

Premières constatations

- ✘ Après remise à l'échelle la solution converge vers un **profil asymptotique** en temps grand.
- ✘ Le profil asymptotique se concentre dans la direction de la vitesse V , donc la diffusion **ne semble pas jouer un grand rôle**.
- ✘ On change la diffusion qui devient anisotrope

$$-\operatorname{div}(D\nabla\theta) \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ✘ Où va se concentrer la solution ?

Conclusion

- ⇒ Profonde interaction entre convection, diffusion et géométrie.
- ⇒ **La simulation numérique aide à la compréhension !** Les mathématiques sont devenues une science expérimentale !
- ⇒ **Le cours vous expliquera comment fonctionne FreeFem++** et tous les codes d'éléments finis...
- ⇒ Vous pourrez utiliser FreeFem++ au cours des **travaux pratiques**.



- ⇒ Un partenaire industriel (EADS) et deux partenaires académiques (l'INRIA et l'X) ont décidé de soutenir **l'enseignement et la recherche en Modélisation Mathématique et Simulation Numérique**.
- ⇒ **Actions de la chaire MMSN pour la recherche:** recrutement d'enseignants-chercheurs, de post-doctorants, financement de congrès, de missions, etc.
- ⇒ **Actions de la chaire MMSN pour l'enseignement:** développer le Master **Mathématiques de la modélisation**.
Comment ? en créant un programme international de bourses de Master et de thèse, **en finançant les stages de recherche des X en 3ème année pour ceux qui feront le Master ci-dessus en 4ème année.**

Travaux pratiques

- ⇒ Mise en oeuvre informatique avec les logiciels Scilab et FreeFem++.
- ⇒ Choisir à la scolarité un sujet de TP par binôme **avant le mardi 1er février**.
- ⇒ Pas plus de 15 binômes sur un même sujet. Pas de trinômes ou plus. L'attribution des sujets s'effectuera sur la base de **premier arrivé, premier servi**.
- ⇒ Assister aux 2 séances (obligatoires) de TP encadrées en salle informatique les 8 février, et 29 mars.
- ⇒ Rendre un mini-rapport (un par binôme, pas plus de quelques pages avec un CD des programmes) pour le **vendredi 13 mai** au plus tard.
- ⇒ Prévoir, en plus des séances de TP encadrées, de l'ordre d'une vingtaine d'heures de travail personnel de réflexion, de mise en oeuvre informatique et de rédaction.

Notation

$$\begin{aligned} \text{Note de module} = & \frac{1}{3}CC + \frac{1}{6} \max(DV, CC) + \\ & \frac{1}{4} \max(HC, CC) + \frac{1}{4}TP + (\text{bonus} \leq 2) \end{aligned}$$

- ⇒ Bonus attribué par les enseignants de PC.
- ⇒ HC, CC = contrôles hors classement et classant.
- ⇒ TP = mini-projet de travaux pratiques
- ⇒ DV = devoir obligatoire (distribué le 8 mars, à rendre avant le 6 avril, corrigé par des moniteurs).
- ⇒ Transformation de la note chiffrée en lettre par mes soins...

Pour plus de détails, voir le site web du cours:

http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours_X_annee2.html

Je cherche deux volontaires pour être délégués des élèves en MAP 431 !