

Diffusion inverse pour l'équation de Helmholtz unidimensionnelle : une méthode de continuation

Proposé par : Habib Ammari (habib.ammari@polytechnique.fr)

On considère l'équation de Helmholtz

$$\phi''(x, k) + k^2(1 + q(x))\phi(x, k) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que le potentiel $q \in \mathcal{C}_0^2([0, 1])$, *i.e.*, q est deux fois différentiable partout et $q(x) = 0, \forall x \notin [0, 1]$ et que $q(x) > -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose $n(x) = \sqrt{1 + q(x)}$ et on note par n_0 et par n_1 le maximum et le minimum de n , respectivement et on suppose que $n_0 > 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{C}$, on considère les solutions $\phi_+(x, k)$ et $\phi_-(x, k)$ de l'équation de Helmholtz de la forme

$$\phi_+(x, k) = \phi_{\text{inc}+}(x, k) + \phi_{\text{scat}+}(x, k)$$

$$\phi_-(x, k) = \phi_{\text{inc}-}(x, k) + \phi_{\text{scat}-}(x, k)$$

avec $\phi_{\text{inc}+}(x, k) = e^{ikx}$ et $\phi_{\text{inc}-}(x, k) = e^{-ikx}$ et $\phi_{\text{scat}+}(x, k)$ et $\phi_{\text{scat}-}(x, k)$ satisfont les conditions, dites de radiation,

$$\phi'_{\text{scat}\pm}(0, k) + ik\phi_{\text{scat}\pm}(0, k) = 0,$$

$$\phi'_{\text{scat}\pm}(1, k) - ik\phi_{\text{scat}\pm}(1, k) = 0.$$

$\phi_{\text{inc}+}$ et $\phi_{\text{inc}-}$ sont des ondes planes incidentes et $\phi_{\text{scat}+}$ et $\phi_{\text{scat}-}$ sont des ondes diffractées.

1. Écrire les équations satisfaites par $\phi_{\text{scat}+}$ et $\phi_{\text{scat}-}$.
2. Montrer qu'il existe deux nombres complexes $\mu_+(k)$ et $\mu_-(k)$ tels que

$$\phi_{\text{scat}+}(x, k) = \mu_+(k)e^{-ikx}, \quad \forall x \leq 0,$$

$$\phi_{\text{scat}-}(x, k) = \mu_-(k)e^{ikx}, \quad \forall x \geq 1.$$

On note $\mathbb{C}^+ = \{k \in \mathbb{C}, \Im m(k) \geq 0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{C}^+$, on définit les fonctions d'impédance $p_+(x, k), p_-(x, k)$ associées aux fonctions $\phi_+(x, k)$ et $\phi_-(x, k)$ par les formules

$$p_+(x, k) = \frac{\phi'_+(x, k)}{ik\phi_+(x, k)}$$

$$p_-(x, k) = -\frac{\phi'_-(x, k)}{ik\phi_-(x, k)}$$

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{C}^+, \overline{p_+(x, k)} = p_+(x, -\bar{k}), \overline{p_-(x, k)} = p_-(x, -\bar{k})$.

Le problème de diffusion inverse consiste à déterminer le potentiel q à partir de la connaissance de la fonction d'impédance $p_+(0, k)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$. I.M.

Gel'fand et B.M. Levitan (1951) ont démontré que $\{p_+(0, k), k \in \mathbb{R}\}$ détermine d'une manière unique q dans une classe de fonctions plus large que $\mathcal{C}_0^2([0, 1])$.

L'objet de ce projet est de reconstruire (approximativement) le potentiel $q(x), x \in [0, 1]$, à partir de la fonction d'impédance $p_+(0, k_j)$ pour un nombre fini de fréquences $k_j = jh, j = -M, \dots, M$, pour une constante $h > 0$. La méthode décrite ci-dessous est due à Y. Chen et V. Rokhlin (1992).

Soit $G_k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction de Green associée au problème aux limites

$$\begin{aligned}\psi''(x, k) + k^2\psi(x, k) &= 0, \\ \psi'(0, k) + ik\psi(0, k) &= 0, \\ \psi'(1, k) - ik\psi(1, k) &= 0;\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}G_k''(x, t) + k^2G_k(x, t) &= \delta_t, \\ G_k'(0, t) + ikG_k(0, t) &= 0, \\ G_k'(1, t) - ikG_k(1, t) &= 0,\end{aligned}$$

où $\delta_t, t \in]0, 1[$ est la masse de Dirac au point t (définie par " $\int_0^1 \delta_t(x)\psi(x) dx = \psi(t)$ ").

4. Montrer que le problème aux limites

$$\begin{aligned}\psi''(x, k) + (k^2 + \eta(x))\psi(x, k) &= f(x, k), \\ \psi'(0, k) + ik\psi(0, k) &= 0, \\ \psi'(1, k) - ik\psi(1, k) &= 0,\end{aligned}$$

avec $f : [0, 1] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, est équivalent à l'équation intégrale

$$\psi(x, k) = - \int_0^1 G_k(x, t)\eta(t)\psi(t, k)dt + g(x, k)$$

avec

$$g(x, k) = \int_0^1 G_k(x, t)f(t, k)dt.$$

5. Montrer que la fonction de Green de l'équation de Helmholtz unidimensionnelle

$$\psi''(x, k) + k^2\psi(x, k) = 0,$$

avec les conditions de radiation

$$\begin{aligned}\psi'(0, k) + ik\psi(0, k) &= 0, \\ \psi'(1, k) - ik\psi(1, k) &= 0,\end{aligned}$$

est donnée par

$$G_k(x, t) = \frac{1}{2ik} \begin{cases} e^{ik(t-x)}, & x \leq t, \\ e^{ik(x-t)}, & x \geq t. \end{cases}$$

On pose

$$x(t) = \int_0^t n(\tau) d\tau, S(t) = (1 + q(x(t)))^{-1/4},$$

$$\eta(t) = \frac{S''(t)}{S(t)} - \frac{n'(x)}{2(n(x))^2}$$

$$= \frac{1}{4}(1 + q)^{-2}(q''(x) - \sqrt{1 + q(x)}q'(x) - \frac{5}{4}(1 + q)^{-1}(q')^2(x)),$$

et $g(t) = f(x)/S(t) = f(x)(1 + q(x))^{1/4}$.

Soit $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ solution de

$$\phi''(x, k) + k^2(1 + q(x))\phi(x, k) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Montrer que la fonction $\psi(t, k) = \phi(x(t), k)/S(t)$ satisfait l'équation de Schrödinger (en t)

$$\psi''(t, k) + (k^2 + \eta(t))\psi(t, k) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

7. Montrer que

$$p_+(x, k) = n(x) \frac{\psi'_+(t, k)}{ik\psi_+(t, k)} - \frac{n'(x)}{2ikn(x)},$$

$$p_-(x, k) = -n(x) \frac{\psi'_-(t, k)}{ik\psi_-(t, k)} + \frac{n'(x)}{2ikn(x)},$$

où $\psi_+(t, k) = \phi_+(x(t), k)/S(t)$ et $\psi_-(t, k) = \phi_-(x(t), k)/S(t)$.

8. Montrer que

$$n(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a p_+(x, k) dk,$$

$$q'(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2}{ia} (1 + q(x)) \int_{-a}^a k p_+(x, k) dk,$$

$$n(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{4a} \int_{-a}^a (p_+(x, k) + p_-(x, k)) dk,$$

$$q'(x) = \frac{2}{\pi} (1 + q(x)) \int_{-\infty}^{\infty} (p_+(x, k) - p_-(x, k)) dk.$$

On considère le système d'équations différentielles

$$p'_{a+}(x, k) = -ik(p_{a+}^2(x, k) - (1 + q_a(x))), \quad (1)$$

$$p'_{a-}(x, k) = ik(p_{a-}^2(x, k) - (1 + q_a(x))), \quad (2)$$

$$q'_a = \frac{2}{\pi} (1 + q_a(x)) \int_{-a}^a (p_{a+}(x, z) - p_{a-}(x, z)) dz, \quad (3)$$

avec les conditions aux limites $p_{a+}(0, k) = p_+(0, k)$, $p_{a-}(0, k) = 1$, $q_a(0) = 0$.

9. Montrer que $|q(x) - q_a(x)| \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow +\infty$ pour tout $x \in [0, 1]$.

10. Montrer que la discrétisation en la variable k des équations (1)-(3) aux points $k_j = jh, h = a/M, j = -M, \dots, M$, conduit au système de $2M + 3$ équations différentielles

$$\begin{aligned}
 p'_{h+}(x, k_j) &= -ik_j(p_{h+}^2(x, k_j) - (1 + q_h(x))) \\
 p'_{h-}(x, k_j) &= ik_j(p_{h-}^2(x, k_j) - (1 + q_h(x))) \\
 q'_h(x) &= \frac{4h}{\pi}(1 + q_h(x)) \left(\sum_{j=1}^{M-1} \Re e(p_{h+}(x, k_j) - p_{h-}(x, k_j)) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\Re e(p_{h+}(x, 0) - p_{h-}(x, 0)) + \Re e(p_{h+}(x, a) - p_{h-}(x, a)) \right] \right)
 \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $p_{h+}(0, k_j) = p_+(0, k_j), p_{h-}(0, k_j) = 1, q_h(0) = 0$.

11. Implémenter un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 pour résoudre ces équations différentielles.

12. Implémenter l'algorithme décrit précédemment pour reconstruire la distribution Gaussienne $q(x) = e^{-((x-1/2)/\sigma)^2}$, où $\sigma = \frac{1}{4}\sqrt{\log_{10}(e)}$ est choisie telle que $q = 0$ (avec une double précision) en dehors de $[0, 1]$, à partir de $p_+(0, ja/M), j = -M, \dots, M$.

13. Étudier la convergence de l'approximation du potentiel q en fonction de la fréquence a .