

MAP431

Autour des guides d'onde

Benjamin Goursaud
benjamin.goursaud@ensta.fr

De nombreux phénomènes peuvent être modélisés par un guide d'onde. Voici une liste non exhaustive d'applications des guides d'onde dans différents domaines :

- acoustique musicale, acoustique sous-marine
- électromagnétisme : câbles coaxiaux, fibres optiques, micro-guides optiques
- élastodynamique : sismique, contrôle non destructif (aéronautique, centrales nucléaires, câbles)

Mathématiquement, on représente un guide d'onde par un milieu invariant dans une direction d'espace. Le milieu de propagation est donc cylindrique, de la forme : $\Omega = \Omega_s \times \mathbb{R}$, où Ω_s est la section du milieu de propagation. On distingue alors deux types de guides :

- si Ω_s est borné, on parle de guide fermé. Les câbles coaxiaux, par exemple, sont modélisés par des guides fermés.
- si Ω_s est non borné, on parle de guide ouvert. Les fibres optiques sont, par exemple, modélisées par des guides ouverts.

1 Détermination des modes guidés d'un guide fermé

On considère la géométrie donnée par la figure 1.



FIGURE 1 – Géométrie du guide fermé considéré.

On considère l'équation des ondes :

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{u}(t, x, y) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \Omega, \quad \Omega = \mathbb{R} \times [0, h] \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(t, x, y) = 0 \quad \forall t, \forall x, y = 0 \text{ ou } h \quad (2)$$

Question 1

On se place dans le régime périodique établi : cela revient à prendre \tilde{u} de la forme $\tilde{u} = \mathcal{R}e(ue^{-i\omega t})$, où $\mathcal{R}e$ désigne la partie réelle. Le signe $-$ dans $e^{-i\omega t}$ est une simple convention. Montrer que la résolution de (1-2) se ramène à la résolution de l'équation d'Helmholtz suivante :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u = 0 \text{ dans } \Omega \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{h\} \quad (4)$$

Question 2

La théorie spectrale nous assure qu'il existe une famille de fonctions de $H^2([0, h])$ $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une famille de réels positifs $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\lambda_n \rightarrow \infty$ tels que :

$$-\frac{d^2 \phi_n}{dy^2} = \lambda_n \phi_n \quad (5)$$

$$\frac{d\phi_n}{dy}(0) = \frac{d\phi_n}{dy}(h) = 0 \quad (6)$$

On peut de plus normaliser les ϕ_n de telle façon qu'ils forment une base hilbertienne de $L^2([0, h])$, i.e. :

$$(\phi_n, \phi_m)_{L^2([0, h])} = \int_0^h \phi_n(y) \phi_m(y) dy = \delta_n^m$$

où δ_n^m est le symbole de Kronecker : $\delta_n^m = 1$ si $n = m$ et 0 sinon. Déterminer les ϕ_n et les λ_n .

Question 3

En déduire que toute solution de (3-4) s'écrit :

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n e^{i\beta_n x} + B_n e^{-i\beta_n x} \right) \phi_n(y)$$

Déterminer la relation de dispersion : la relation liant β_n , λ_n et k .

Question 4

Montrer qu'on a l'alternative suivante :

- $\beta_n \geq 0$. Dans ce cas, le mode $e^{i\beta_n x}$ se propage vers la droite et le mode $e^{-i\beta_n x}$ se propage vers la gauche.
- $\beta_n = i\gamma_n$, $\gamma_n \geq 0$. Dans ce cas, le mode $e^{i\beta_n x}$ est évanescent vers la droite et le mode $e^{-i\beta_n x}$ est évanescent vers la gauche.

À k fixé, combien y a-t-il de modes propagatifs et de modes évanescents ?

Question 5

Avec l'aide de SCILAB, en prenant $h = 10$ et $k = 1$, calculer tous les β_n des modes propagatifs. Représenter l'allure des modes, i.e. $\phi_n(y)$ en fonction de y .

2 Détermination des modes guidés d'un guide ouvert

On considère maintenant la géométrie donnée par la figure 2.

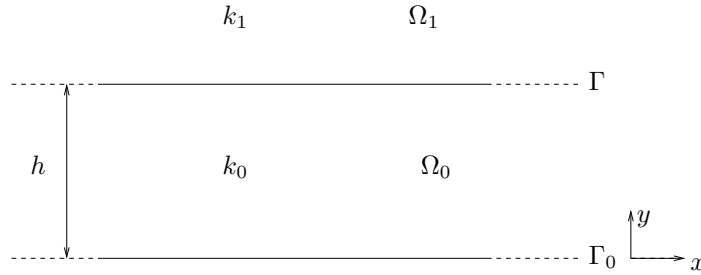


FIGURE 2 – Géométrie du guide ouvert considéré.

On note $\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < h\}$, $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > h\}$, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $\Gamma = \mathbb{R} \times \{h\}$, $\Gamma_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $k = k(y) = k_1$ si $y > h$, $k = k(y) = k_0$ si $0 < y < h$.

On part directement de l'équation de Helmholtz suivante :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u = 0 \text{ dans } \Omega \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (8)$$

Question 6

On recherche les modes guidés. Ceux-ci vérifient : $u(x, y) = \psi(x)\phi(y)$, avec $\psi(x) = Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}$, A, B, β constantes, $\phi \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

Déterminer le système vérifié par ϕ .

Montrer que la recherche des modes guidés conduit à la relation de dispersion suivante :

$$i\alpha_1 = \alpha_0 \tan(\alpha_0 h) \quad (9)$$

où $\alpha_1 \in i\mathbb{R}$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.

Déterminer α_1 et α_0 .

Indication : on a les conditions de raccord suivantes : $[\phi] = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = 0$ sur Γ . On note $[g]$ le saut de g sur Γ : $[g(y)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (g(h + \varepsilon) - g(h - \varepsilon))$.

Question 7

Avec SCILAB, déterminer numériquement les modes guidés en prenant $h = 10$, $k_0 = 1.5$ et $k_1 = 1$. Tracer l'allure de ces modes : $\phi(y)$ en fonction de y . Comparaison avec modes propagatifs du guide fermé.

Remarque : Contrairement au cas du guide fermé, on ne peut pas écrire pour le guide ouvert : $u(x, y) = \sum_n u_n(x)\phi_n(y)$, on doit écrire : $u(x, y) = \sum_n u_n(x)\phi_n(y) + \int_\lambda u_\lambda(x)\phi_\lambda(y)d\lambda$. Les modes propagatifs déterminés dans cette partie ne forment pas une base de $L^2(\mathbb{R}^+)$.

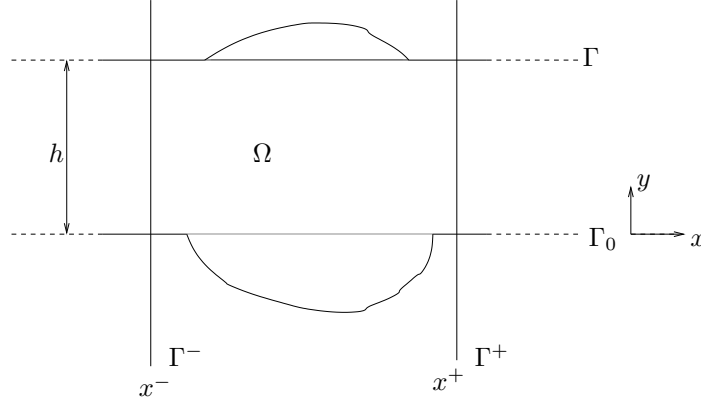


FIGURE 3 – Géométrie du guide fermé perturbé.

3 Simulation d'un défaut dans un guide fermé

On considère la géométrie donnée par la figure 3.

On cherche à simuler l'effet d'un défaut localisé dans une région bornée que l'on note Ω sur la propagation des ondes dans un guide d'onde fermé.

Question 8

On se place tout d'abord dans le cas où il n'y a qu'un seul mode propagatif. Quelle relation doivent vérifier k et h ?

On envoie le mode plan ($u_{inc} = \phi_0 e^{i\beta_0 x}$) sur Γ^- . On veut déterminer l'onde transmise, qui se propage vers la droite, et l'onde réfléchie, qui se propage vers la gauche.

D'après la question 3, la solution dans le guide non perturbé se décompose de la façon suivante :

$$u = \sum_n (A_n e^{i\beta_n x} + B_n e^{-i\beta_n x}) \phi_n(y).$$

Pour $x > x^+$, le guide est non perturbé, donc on peut décomposer la solution comme à la question 3.

On prend ici $B_n = 0$ car on veut des ondes qui se propagent vers la droite. En première approximation, on peut négliger tous les modes évanescents et donc écrire : $u \approx A_0 e^{i\beta_0 x} \phi_0(y)$, donc $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma^+} \approx i\beta_0 u$.

Pour $x < x^-$, le guide est également non perturbé. On décompose $u - u_{inc}$ comme à la question 3, mais en prenant ici $A_n = 0$, puisque $u - u_{inc}$ se propage vers la gauche. En négligeant les modes évanescents, on a : $u - u_{inc} \approx B_0 e^{-i\beta_0 x} \phi_0(y)$, donc $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma^-} \approx i\beta_0 u + g$, où g est la donnée du problème. Que vaut g ?

On a donc le problème suivant :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u = 0 \text{ dans } \Omega \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = i\beta_0 u + g \text{ sur } \Gamma^- \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = i\beta_0 u \text{ sur } \Gamma^+ \quad (14)$$

Déterminer la formulation variationnelle de ce problème. Peut-on appliquer le théorème de Lax-Milgram ? Pourquoi ? À l'aide de FREEFEM++, en se plaçant dans le cas où il n'y a qu'un mode

propagatif, simuler le guide non perturbé, puis en se donnant une perturbation, montrer l'effet de la perturbation.

On pourra utiliser le maillage suivant :

```
real pi=4*atan(1) ;
real r = 2.0 ;
real sqrt3 = sqrt(3.0) ;

////////////////////////////////////
// Definition du domaine //
////////////////////////////////////
// label=1 : Gamma0. label=2 : Gamma. label=3 : Gamma-. label=4 : Gamma+.
border b1(t=-3,-sqrt3) { x=t; y=-1;label=1;}
border b2(theta=-5*pi/6,-pi/6) { x = r*cos(theta); y = r*sin(theta); label=1;} ;
border b3(t=sqrt3,3) { x=t; y=-1;label=1;}
border b4(t=-1,1) { x=3; y=t;label=4;}
border b5(t=3,sqrt3) { x=t; y=1; label=2;}
border b6(theta=pi/6,5*pi/6) { x = r*cos(theta); y = r*sin(theta); label=2;} ;
border b7(t=-sqrt3,-3) { x=t; y=1; label=2;}
border b8(t=1,-1) { x=-3; y=t;label=3;}

////////////////////////////////////
// Construction du maillage //
////////////////////////////////////
int n2=6 ;
mesh Sh2= buildmesh (b1(4*n2)+b2(10*n2)+b3(4*n2)+b4(4*n2)+b5(4*n2)+b6(10*n2)+b7(4*n2)+b8(4*n2));
plot(Sh2,wait=1);
```

Question 9 (facultative)

Dans le cas où il y a plusieurs modes propagatifs, comment peut-on généraliser la méthode décrite à la question précédente? Que devient la formulation variationnelle?