

# Acoustique en écoulement

Responsable : Housseem Haddar

housseem.haddar@inria.fr

## 1 Introduction

On s'intéresse dans ce projet à la propagation d'une onde acoustique dans un milieu en écoulement. On supposera pour simplifier que l'écoulement est uniforme de vitesse  $V$  dirigé suivant  $x$  et est canalisé dans un tube infini  $D$  de hauteur  $h$  dans lequel se trouve également une plaque rigide  $\Gamma$  de longueur finie  $2a$  et parallèle à l'écoulement. On notera par  $\Omega$  le domaine occupé par le tube infini privé de la plaque  $\Gamma$  et par  $\partial D$  la frontière du tube infini (voir Fig. 1).

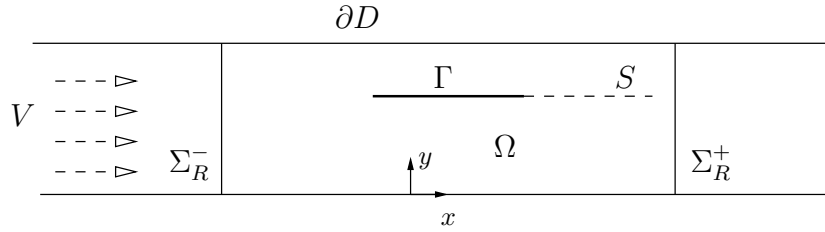


FIG. 1 – Description du modèle

### Un modèle simplifié :

A partir des équations d'Euler linéarisées en vitesse-pression et en régime harmonique de pulsation  $\omega$ , la pression acoustique  $P(x, y, t) = \mathcal{R}(p(x, y)e^{-i\omega t})$  s'obtient via la résolution des équations suivantes :

$$\begin{cases} H_M(p) = (1 - M^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2ikM\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial D \cup \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

où  $M = \frac{V}{c} < 1$  désigne le nombre de Mach ( $c$  vitesse de propagation du son dans le milieu au repos) et  $k = \frac{\omega}{c}$  le nombre d'onde. Afin de traduire la présence d'une onde incidente  $\varphi_i$ , solution particulière des équations précédentes dans le tube privée de la plaque rigide, on cherche la solution  $p$  sous la forme :

$$p = \varphi_i + p_d$$

où  $p_d$  correspond au champ de pression diffractée et vérifie donc les équations :

$$\begin{cases} H_M(p_d) = (1 - M^2) \frac{\partial^2 p_d}{\partial x^2} + 2ikM \frac{\partial p_d}{\partial x} + \frac{\partial^2 p_d}{\partial y^2} + k^2 p_d = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial p_d}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial D \\ \frac{\partial p_d}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2)$$

En réalité, il se développe un sillage (discontinuité de la vitesse) à partir du bord de fuite de la plaque. Nous négligerons ici ce sillage.

## 2 Détermination de l'onde incidente et réduction en domaine borné

En l'absence de la plaque rigide on peut déterminer analytiquement des solutions à variables séparées des équations précédentes :

$$p_n(x, y) = a_n(x)b_n(y)$$

vérifiant :

$$H_M(p_n) = 0 \quad \text{dans } ]-\infty, +\infty[ \times ]0, h[ \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial D \quad (4)$$

*Question 1 : Montrer que  $p_n$ ,  $n \geq 0$  est de la forme :*

$$p_n^\pm(x, y) = \gamma_n e^{i\beta_n^\pm x} \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right) \quad (5)$$

$$\text{avec } \beta_n^\pm = \frac{-kM \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 (1 - M^2)}}{1 - M^2}, \quad (6)$$

avec  $\gamma_n$  une constante et où la racine carée est déterminée en imposant à la partie imaginaire d'être positive ou nulle.

On posera par la suite  $c_n(y) = \gamma_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right)$  et on choisira la constante  $\gamma_n$  de telle sorte que  $\|c_n\|_{L^2(]0, h[)} = 1$ . On admettra que la famille de fonctions  $(c_n)_{n \geq 0}$  forme une base orthonormale de  $L^2(]0, h[)$ .

Lorsque  $n \leq kh / \left(\pi (1 - M^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ , la constante  $\beta_n^\pm$ , appelée constante de propagation, est réelle et la fonction  $p_n$  est oscillante suivant la direction  $Ox$ . On appelle ces solutions particulières des ondes guidées. Par contre, lorsque  $n > n_0$ , la constante  $\beta_n^\pm$  est imaginaire et on a affaire à des solutions ayant des comportements exponentiels à l'infini. On notera par  $n_0$  la partie entière de  $kh / \left(\pi (1 - M^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ .

On notera que parmi les ondes guidées,  $p_n^+$  correspond à une onde se propageant vers les  $x > 0$  et  $p_n^-$  vers les  $x < 0$ , qui correspond au fait que les solutions transitoires sont cherchées sous la forme :

$$P(x, y, t) = \Re(e^{-i\omega t} p(x, y)).$$

**On choisira, par la suite, une onde incidente de la forme  $\varphi_i = p_m^+$ .**

Afin de pouvoir résoudre le problème initial par une méthode d'éléments finis, il faut se ramener à un problème posé en **domaine borné**. Nous allons voir comment la connaissance des solutions à variables séparées permet d'y arriver.

D'un point de vue physique, la pression de diffraction correspond à une onde "produite" par le rayonnement de la plaque, c'est donc une onde qui se propage depuis l'obstacle vers l'infini. C'est également une onde qui doit être bornée à l'infini.

*Question 2 : En utilisant ces arguments "physiques", montrer que la solution  $p_d$  admet les décompositions suivantes à l'infini ( $L$  suffisamment grand) :*

$$x > L \quad p_d(x, y) = \sum_{n \geq 0} (p_d, c_n)_{\Sigma_L^+} p_n^+(x, y) e^{-i\beta_n^+ L} \quad (7)$$

$$x < -L \quad p_d(x, y) = \sum_{n \geq 0} (p_d, c_n)_{\Sigma_L^-} p_n^-(x, y) e^{i\beta_n^- L} \quad (8)$$

où on a posé :  $(p_d, c_n)_{\Sigma_L^\pm} = \int_{\Sigma_L^\pm} p_d(\pm L, y) c_n(y) dy$  avec  $\Sigma_L^\pm = \{x = \pm L\} \times ]0, h[$ .

En déduire que :

$$\frac{\partial p_d}{\partial n} \Big|_{\Sigma_L^\pm} = -T_\pm p_d$$

en posant :

$$T_+ p_d = - \sum_{n \geq 0} i\beta_n^+ (p_d, c_n)_{\Sigma_L^+} c_n \quad \text{et} \quad T_- p_d = \sum_{n \geq 0} i\beta_n^- (p_d, c_n)_{\Sigma_L^-} c_n.$$

Ce qui conduit à introduire le problème en domaine borné :

$$H_M(p_d) = 0 \quad \text{dans } \Omega \cap ]-L, +L[ \times ]0, h[ \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_L \quad (9)$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma \quad (10)$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial D \quad (11)$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial n} = -T_\pm p_d \quad \text{sur } \Sigma_L^\pm \quad (12)$$

Le problème (1) est alors équivalent au problème posé en **domaine borné** ( $L$  assez grand) :

$$H_M(p) = 0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_L \quad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \cup \partial D \quad (14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T_\pm p + \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + T_\pm \varphi_i \quad \text{sur } \Sigma_L^\pm \quad (15)$$

Question 3 : Montrer que lorsque  $\varphi_i = p_m^+$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + T_- \varphi_i &= i (\beta_m^- - \beta_m^+) e^{-i\beta_m^+ L} c_m \quad \text{sur } \Sigma_L^- \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + T_+ \varphi_i &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_L^+. \end{aligned}$$

**Remarque :** il est donc préférable de choisir  $\varphi_i = e^{i\beta_m^+ L} p_m^+$  afin d'éviter de garder le terme exponentiel.

Question 4 : Montrer que ce problème a pour formulation variationnelle :  $p \in H^1(\Omega_L)$  telle que  $\forall \psi \in H^1(\Omega_L)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( (1 - M^2) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} - 2ikM \frac{\partial p}{\partial x} \bar{\psi} - k^2 p \bar{\psi} \right) \\ + (1 - M^2) \left( \int_{\Sigma_L^+} T^+(p) \bar{\psi} + \int_{\Sigma_L^-} T^-(p) \bar{\psi} \right) = \int_{\Sigma_L^-} g_i \bar{\psi} \end{aligned} \quad (16)$$

où l'on précisera l'expression de  $g_i$ .

### 3 Mise en oeuvre

On se propose d'utiliser le logiciel Free-Fem++ pour calculer numériquement la solution de (16) obtenue par une méthode d'éléments finis  $P_1$  sur un maillage triangulaire. On note, par la suite,  $(w_I)_{I=1,N}$  les fonctions de base globales associées à ce maillage et  $(T_\ell)_{\ell=1,M}$  l'ensemble des triangles du maillage.

Question 5 : Montrer que l'approximation par éléments finis conduit à un système linéaire de la forme :

$$\left( (1 - M^2) \mathbb{K}_x + \mathbb{K}_y - k^2 \mathbb{M} - 2ikM \mathbb{D} + (1 - M^2) (\mathbb{T}^+ + \mathbb{T}^-) \right) X = B \quad (17)$$

où on donnera l'expression des différents termes en fonction des  $w_I$ .

Le calcul des matrices  $\mathbb{K}_x, \mathbb{K}_y, \mathbb{M}$  et  $\mathbb{D}$  est standard. Par contre, le calcul des matrices  $\mathbb{T}^\pm$  ne l'est pas. En effet, les termes de ces matrices sont de la forme, pour  $\mathbb{T}_{IJ}^+$  par exemple :

$$\mathbb{T}_{IJ}^+ = - \sum_{n \geq 0} i \beta_n^+ (w_I, c_n) (w_J, c_n) \quad \text{où} \quad (w_I, c_n) = \int_0^h w_I(L, y) c_n(y) dy$$

Question 6 : Quels sont les termes non nuls de  $\mathbb{T}^\pm$  ? Donner l'expression analytique de ces termes lorsque la série est tronquée après  $n_0$  ! C'est cette expression que l'on utilisera pour le calcul numérique.

Question 7 : Test de validation dans le cas sans plaque : En s'inspirant du traitement de  $\mathbb{T}^-$ , compléter la partie "calcul de  $\mathbb{T}^+$ " dans le fichier de commandes `aeroacoustique.edp`. Que doit-on trouver comme solution lorsque  $\varphi = p_m^+$ . Utiliser ce test pour valider le programme : on prendra  $c = 1, L = 5, h = 2, m = 0, 1, 2$  et  $\omega = 10$ , puis on fera varier  $M$  entre 0.1 et 0.5. Représenter la solution pour deux valeurs de  $M$ . Quel est l'effet d'augmenter  $M$  ?

*Question 9 : Modifier le fichier `aeroacoustique.edp` pour pouvoir prendre en compte la présence d'une plaque : le maillage pourra être construit en approchant la plaque par un domaine d'épaisseur petite (ne pas utiliser une épaisseur trop petite... le programme de maillage de FreeFem++ ne l'autorise pas !). On prendra une longueur  $l = 3$  de la plaque. Que doit-on obtenir comme solution pour  $m = 0$  ? Commenter les solutions numériques obtenues pour  $m = 0$  et  $m = 1$ .*