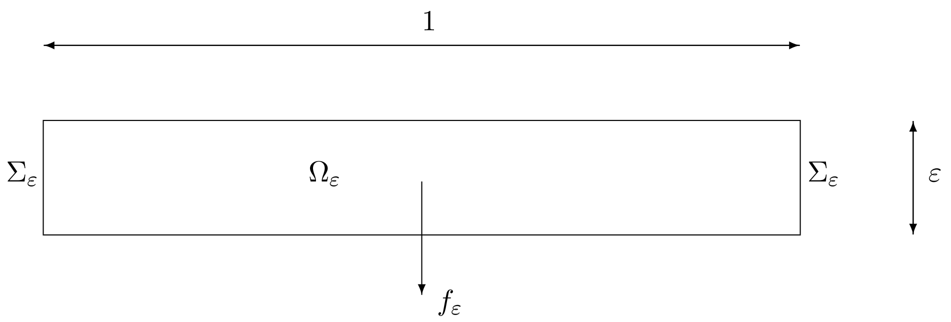
Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 431

Comportement asymptotique d'une structure mince

Contact : `jalalzai@cmap.polytechnique.fr`

Soit $\varepsilon > 0$, on considère une structure occupant dans sa configuration de référence l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ defini par $\Omega_\varepsilon :=]0,1[\times]0,\varepsilon[$. On suppose que ce matériau est soumis à une force volumique $f_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon;\mathbb{R}^2)$, qu'il est encastré sur les bords verticaux $\Sigma_\varepsilon := \{0,1\}\times]0,\varepsilon[$ et qu'il est libre sur le reste de la frontière $\partial\Omega_\varepsilon \setminus \Sigma_\varepsilon$.



On note $v_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^2$ le champ des déplacements qui vérifie à l'équilibre le système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon, \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_2} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Sigma_\varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Question 1. *Ecrire la formulation variationnelle du système* (1) *et en déduire l'existence d'une unique solution* $v_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon := \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon;\mathbb{R}^2) : \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma_\varepsilon\}$. *En quel sens avez-vous résolu le système* (1)*?*

Question 2. *Montrer que* v_ε *est l'unique minimiseur sur* $\mathcal{V}_\varepsilon$ *de l'énergie*

$$F_\varepsilon(\varphi) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\varphi|^2\,dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \cdot \varphi\,dx.$$

Question 3. *Ecrire sous* `FreeFem++` *un script permettant de résoudre le problème* (1) *par la méthode des éléments finis* P_1. *Pour ce faire on prendra la force* $f_\varepsilon = (-1,0)$ *et* $\varepsilon = 1/10$.

Question 4. *Tracer le maillage ainsi que le champ de vecteur u. On rappelle que la configuration déformée est donnée par l'ensemble des points $x+v_\varepsilon(x)$ lorsque x varie dans Ω_ε. Représenter graphiquement le maillage dans la configuration déformée.*

Question 5. *Calculer la valeur minimale de l'énergie, c'est-à-dire $F_\varepsilon(v_\varepsilon)$, pour $\varepsilon = 1/10$, $1/100$ et $1/1000$.*

Comme le paramètre ε est très petit (par rapport à 1), il est naturel de substituer le modèle bi-dimensionnel précédent par un modèle uni-dimensionnel en faisant une analyse asymptotique lorsque le paramètre ε tend vers zéro. La première difficulté réside dans le fait que le domaine dépend du paramètre. Pour remédier à ce problème, nous allons reformuler le problème précédent en un problème équivalent mais qui sera défini sur un domaine fixe.

Posons $\Omega := \Omega_1 =]0,1[\times]0,1[$ et $\Sigma = \Sigma_1 = \{0,1\}\times]0,1[$. Pour tout $(x_1,x_2) \in \Omega$, définissons

$$u_\varepsilon(x_1,x_2) := v_\varepsilon(x_1,\varepsilon x_2).$$

Question 6. *En supposant que $f_\varepsilon(x_1,x_2) = f(x_1,x_2/\varepsilon)$, montrer que u_ε est l'unique minimiseur de*

$$E_\varepsilon(\varphi) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\partial_1\varphi|^2 + \frac{|\partial_2\varphi|^2}{\varepsilon^2}\right) dx - \int_\Omega f\cdot\varphi\, dx$$

sur $\mathcal{V} := \mathcal{V}_1 = \{\varphi \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2) : \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma\}$.

Question 7. *Montrer qu'il existe une sous suite notée $(u_{\varepsilon'})_{\varepsilon'}$ et une fonction $u \in H^1_0(]0,1[;\mathbb{R}^2)$ (indépendante de x_2) telles que $u_{\varepsilon'} \rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$. En déduire que u est l'unique minimiseur de l'énergie*

$$E(\varphi) := \frac{1}{2}\int_0^1 |\varphi'|^2\, dx_1 - \int_0^1 \overline{f}\cdot\varphi\, dx_1$$

sur $H^1_0(]0,1[;\mathbb{R}^2)$, où $\overline{f}(x_1) := \int_0^1 f(x_1,x_2)\, dx_2$, et que u est l'unique solution du système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} -u'' = \overline{f} \text{ dans }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Question 8. *Montrer que toute la suite $u_\varepsilon \to u$ fortement dans $H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ et qu'il y a convergence de la valeur minimale: $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \to E(u)$.*

Question 9. *Déterminer la solution exacte du système (2) lorsque $\overline{f} = f = (-1,0)$.*

Question 10. *En prenant la même force qu'à la question 3, ecrire à l'aide de* `Scilab` *un schéma aux différences finies qui résoud numériquement le système (2).*

Question 11. *Représenter graphiquement la configuration déformée ainsi que la solution exacte.*

Question 12. *Calculer la valeur minimale de E, c'est-à-dire $E(u)$. Cette valeur est-elle cohérente avec les résultats obtenus aux questions 5 et 8?*