Natation synchronisée à faible Reynolds

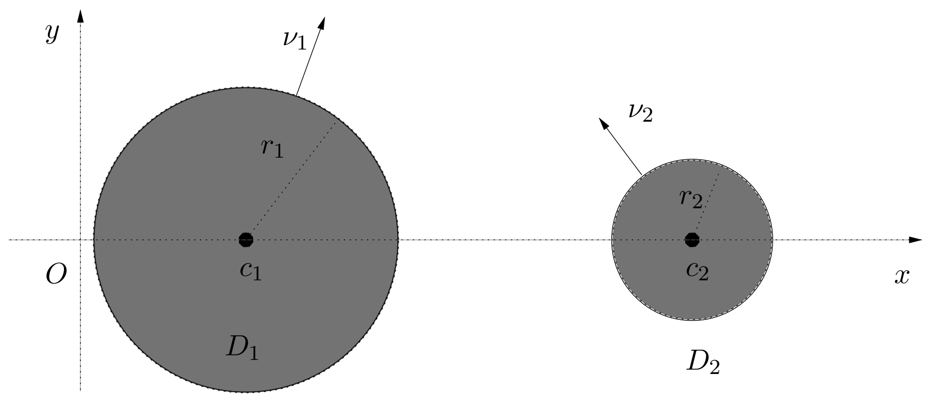
Benoît Merlet, merlet@math.univ-paris13.fr

18 janvier 2010

Nager

Nager, c'est se déplacer dans un fluide en déformant son corps de manière cyclique. Ce projet concerne la nage de tout petits objets ou organismes vivant dans un milieu aqueux. La taille et les vitesses considérées étant faibles, on peut négliger sans dommage les termes inertiels devant les termes visqueux dans les équations de Navier-Stokes. En première approximation, le champ de vitesse u et la pression p dans le fluide vérifient donc le système de Stokes.
Ici, on se place pour simplifier en dimension 2 d'espace et on étudie un couple de petits nageurs en forme de disques s'aidant mutuellement.

Les équations de Stokes



On considère un fluide dans $\mathbf{R}^2$ qui entoure deux nageurs ayant la forme de disques centrés sur l'axe (Ox), $D1 = B((c_1, 0), r_1)$ et $D2 = B((c_2, 0), r_2)$. Les champ de vitesse et de pression (u_x, u_y, p) vérifient

$$-\Delta u + \nabla p \;=\; 0 \qquad \text{dans } \mathbf{R}^2 \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2) \tag{1}$$

$$\nabla \cdot u \;=\; 0 \qquad \text{dans } \mathbf{R}^2 \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2), \tag{2}$$

On défini le tenseur des contraintes par

$$\sigma \;:=\; (\nabla u + {}^t\nabla u) - pId.$$

Question 1 *Montrez que si* (2) *est vérifiée, alors* (1) *est équivalente à*

$$-\nabla \cdot \sigma \;=\; 0 \qquad \textit{dans } \mathbf{R}^2 \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2). \tag{3}$$

On fait varier les rayons des disques au cours du temps, en espérant que cela provoque un déplacement selon (Ox). La vitesse $\dot{z}_i$ au point $z_i \in \partial D_i$ se décompose en un mouvement rigide caractérisé par la vitesse globale $\dot{c}_i$ et une vitesse relative $\dot{r}_i \nu_i$. On écrit

$$\dot{z}_i(z_i, t) \;=\; (\dot{c}_i(t), 0) + \dot{r}_i \nu_i(z_i, t),$$

où ν_i désigne la normale extérieure à D_i, $i = 1, 2$. On suppose que le fluide ne glisse pas sur la surface des nageurs, on en déduit la condition au bord

$$u \;=\; g_1 \;=\; \dot{z}_1 \quad \text{sur } \partial D_1, \qquad u \;=\; g_2 \;=\; \dot{z}_2 \quad \text{sur } \partial D_2.$$

La force exercée sur le fluide par les disques est donnée par

$$f_1 \;=\; \sigma \cdot \nu_1, \qquad f_2 \;=\; \sigma \cdot \nu_2,$$

Par principe de superposition, l'application $(g_1, g_2) \mapsto (f_1, f_2)$ est linéaire. Notons qu'elle ne dépend que de la forme et (le problème étant invariant par translation) de la position relative des nageurs. On note F_1 et F_2 les forces totales subies par les disques D_1 et D_2 respectivement. Comme on néglige les effets inertiels, le principe fondamental de la dynamique appliqué aux disques se réduit à $F_1 \;=\; F_2 \;=\; 0$. On en déduit

$$\int_{\partial D_1} f_1(z_1)\, ds(z_1) \;=\; 0, \qquad \int_{\partial D_2} f_2(z_2)\, ds(z_2) \;=\; 0.$$

Les équations du mouvement

Question 2 *On note $r = (r_1, r_2)$ et $c = (c_1, c_2)$. Montrer que les équations précédentes induisent une relation linéaire entre $\dot{r}$ et $\dot{c}$ de la forme $M_{c,r}\dot{c} + N_{c,r}\dot{r} = 0$ où $M_{c,r}$ et $N_{c,r}$ sont des matrices 2×2 dont les coefficients ne dépendent que de r et c (en fait de r et $\delta c = c_2 - c_1$).*

On admet que $M_{c,r}$ est inversible. En déduire que la vitesse des nageurs est liée à leurs mouvements par une relation de la forme

$$\dot{c} \;=\; A_{c,r}\dot{r},$$

où $A_{c,r}$ est une matrice 2×2.

Formulation variationnelle du problème de Stokes

On souhaite calculer des appoximations numériques des matrices $A_{c,r}$. Cette matrice a été obtenue à l'aide du calcul des matrices $M_{c,r}$ et $N_{c,r}$ où $m_{i,j}(c, r) = F_i$ force exercée sur D_i quand on résout Stokes avec les conditions au bord $g_k = (1, 0)$ si $k = j$ et $g_k = (0, 0)$ sinon et où $n_{i,j}(c, r) = F_i$ force exercée sur D_i quand on résout Stokes avec les conditions au bord $g_k = \nu_k$ si $k = j$ et $g_k = (0, 0)$ sinon.

Il nous faut donc résoudre les équations de Stokes autour des deux disques. Pour cela, on utilise une méthode d'éléments finis et le logiciel FreeFem++.

On commence par se ramener à un domaine borné. Pour cela on choisit R assez grand pour que $B(0, R)$ contienne D_1 et D_2. On pose ensuite $\Omega = B(0, R) \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2)$. Cet ouvert sera notre domaine de calcul. Il nous faut choisir des conditions au bord sur $\partial B(0, R)$ de sorte que le problème obtenu dans le domaine borné soit le plus proche possible de la solution dans le domaine non borné de départ. Comme on cherche des solutions qui vérifient $\lim_{|z|\to\infty}(u, p) = 0$, on pourrait essayer d'imposer $u = 0$ sur $\partial B(0, R)$.

Question 3 *Montrer que pour le calcul des coefficients de $N_{c,r}$, cette condition est incompatible avec l'équation de conservation du volume de fluide $\nabla \cdot u = 0$.*

Cette première approche étant rejetée, on va chercher des conditions au bord qui donnent la bonne solution dans le cas où le domaine contient un seul nageur, centré en 0 et en phase de dilatation.

Question 4 *On considère le problème de Stokes dans $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{B(0, r)}$ avec la donnée au bord $u = \nu$ sur $\partial B(0, r)$. Déterminer u en utilisant les symétries du problème et l'équation de conservation du volume. Montrer que $\Delta u = 0$, en déduire que $p = Cste$. Montrer que pour $R > r$, on a*

$$\partial_\nu u - p\nu + \frac{1}{R}u \;=\; 0 \qquad \textit{sur } \partial B(0, R), \tag{4}$$

Finalement, on considère le problème de Stokes dans Ω avec les conditions au bord $u = g_i$ sur ∂D_i, $i = 1, 2$ et (4) sur $\partial B(0, R)$.
Nous introduisons les espaces de Hilbert $V := \{v \in H^1(\Omega) \; : \; v \; = \; 0 \text{ sur } \partial D_1 \cup \partial D_2\}$ et $P := L^2(\Omega)$.

Question 5 *Montrer qu'un couple $(u, p) \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbf{R}^2) \times C^1(\bar{\Omega}, \mathbf{R})$ est solution si et seulement si les conditions aux bords $u = g_1$ sur ∂D_1 et $u = g_2$ sur ∂D_2 sont vérifiées et*

$$\forall (v, q) \in V \times P, \qquad \int_\Omega \nabla u : \nabla v - \int_\Omega p \, \nabla \cdot v + \frac{1}{R} \int_{\partial B(0,R)} u \cdot v + \int_\Omega \nabla \cdot u \, q \;=\; 0 \; ;$$

Question 6 *Écrire la formulation variationnelle de la question 5 sous la forme*

$$\textit{Trouver } (\tilde{u}, p) \in V \times P \textit{ tels que } \; a(\tilde{u}, v) + b(p, v) - b(q, \tilde{u}) \;=\; F(v) + G(q), \qquad \forall (v, q) \in V \times P. \quad (5)$$

Question 7 *Montrer que a et b sont des formes bilinéaires continues sur $V \times V$ et $P \times V$ respectivement.*

Question 8 *Montrer que a est symétrique et coercive sur $V \times V$.*

Admettons la généralisation suivante du Théorème de Lax-Milgram.

Théorème 1 *Soit E un espace de Banach et c une forme bilinéaire continue sur E. Pour $f \in E'$, on considère le problème :*

$$\textit{Trouver } x \in E \textit{ tel que } \; \forall y \in E, \quad c(x, y) \;=\; f(y).$$

Ce problème est bien posé si et seulement si
– $(\forall x \in E, \; c(x, y) = 0) \Longrightarrow (y = 0)$,
– $\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in E, \quad \sup_{y \in E} \dfrac{c(x, y)}{\|y\|} \;\geq\; \alpha \|x\|.$

Question 9 *Montrer que, en tenant compte des questions précédentes, le problème (5) est bien posé si et seulement si on a*

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall p \in P, \quad \sup_{v \in V} \frac{b(p, v)}{\|v\|_V} \;\geq\; \alpha \|p\|_P.$$

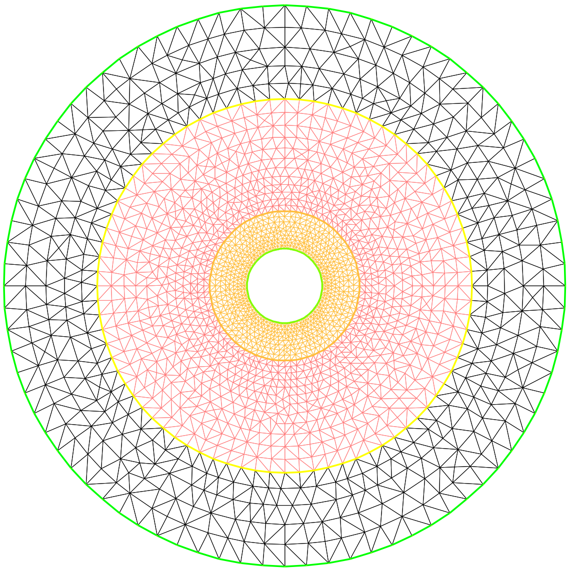
Cette condition est appelée condition inf-sup. On admet qu'elle est satisfaite.

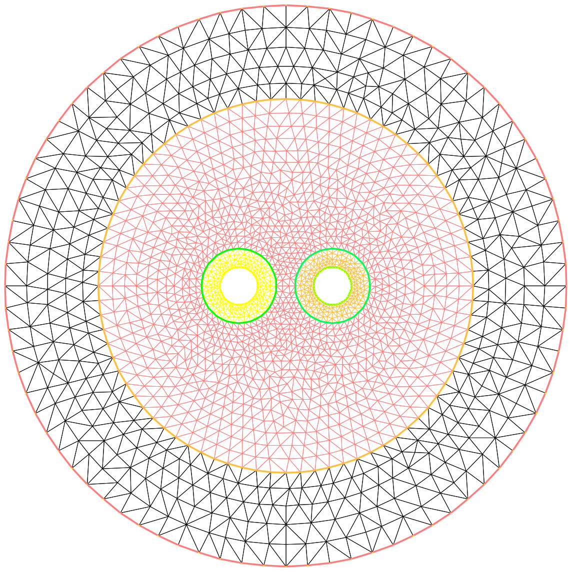
Résolution numérique du problème de Stokes avec FreeFem++

On résout numériquement le problème variationnel de la question 5 à l'aide d'une méthode d'éléments finis conformes. Il nous faut approcher les espaces V (espace des vitesses) et P (espace de la pression) par des sous-espaces V_h et P_h d'éléments finis. Le problème de Stokes est délicat, pour avoir des propriétés de convergence satisfaisantes, il faut que la condition inf-sup

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall p_h \in P_h, \quad \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(p_h, v_h)}{\|v_h\|_{V_h}} \;\geq\; \alpha \|p_h\|_{P_h}.$$

soit vérifiée *uniformément* en h (le coefficient α doit être indépendant de h). Ce n'est pas vrai par exemple si on prend des éléments finis $P1$ pour la vitesse et la pression. Ici nous recommandons d'utiliser les éléments finis $P2$ pour V_h et $P1$ pour P_h.





Maillages

Dans la suite on fixe le rayon du domaine de calcul à $R = 15$ et on se donne un entier n qui va caractériser le maillage. Comme la vitesse et la pression varient plus rapidement proches des nageurs, on va mailler plus finement au voisinage des disques. Pour cela, nous proposons de procéder comme sur les deux figures ci-dessous (un nageur et deux nageurs).
On se donne un entier $n = 20, 40, 80, \cdots$, on utilisera n mailles pour le bord du disque D_i, n mailles pour le bord (fictif) de disques D'_i (de même centre que D_i et de rayon $2r_i$), $2n$ mailles pour le bord d'un disque fictif de rayon $\tilde{R} = 10$ centré en 0 et finalement $2n$ mailles pour le bord extérieur $\partial B(0, R)$.

Remarque : Dans la documentation de FreeFem++, on trouve une résolution du problème de Stokes avec conditions de Dirichlet. Pour sa résolution le terme $I = 10^{-8} \int_\Omega pq$ est ajouté à la formulation variationnelle. Cela est utile si la méthode de résolution de problème linéaire choisie est LU (`solver = LU`). Nous recommandons ici de ne pas spécifier le solver que doit utiliser FreeFem++. Dans ce cas la méthode utilisée est GMRES et l'ajout de I est superflu.

Question 10 *Programmer un code* FreeFem++ *résolvant le problème de la question 4. Comparer u_h et la solution exacte en norme L^2. Déterminer l'ordre de la méthode en prenant $n = 10, 20, 40, 80$.*

Question 11 *On passe maintenant au cas de deux disques avec $c_2 = -c_1 = 2.5$, $r_1 = r_2 = 1$. Calculer des approximations $M^h_{c,r}$ et $N^h_{c,r}$ puis $A^h_{c,r}$des matrices $M_{c,r}$, $N_{c,r}$, $A_{c,r}$ de la question 2 pour $n = 20, 40, 80$. Les symétries du problème sont -elles respectées ? Sinon pourquoi ?*

Question 12 *Représenter avec* FreeFem++ *le champ de vitesse dans le cas $\dot{r} = (1, 0)$ et $\dot{c} = A_{c,r}\dot{r}$.*

Étude d'une petite brassée (Partie facultative)

Définir une brassée, c'est se donner les positions de départ $c(0)$ et une fonction $r : [0, T] \to]0, +\infty[^2$, vérifiant $r(0) = r(T)$. On supposera de plus cette application régulière. Les nageurs se seront déplacés si on a

$$\Delta c := \frac{c_1 + c_2}{2}(T) - \frac{c_1 + c_2}{2}(0) \neq 0.$$

Les deux nageurs n'étant pas liés, nous ne pouvons pas imposer $\delta c := c_2 - c_1$. Si nous voulons répéter périodiquement la même brassée, il faut pourtant qu'on ait $\delta c(T) = \delta c(0)$. En fait on peut montrer que c'est vrai sous la condition,

$$r_2(t) = r_1(T-t) \qquad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

Une condition suffisante pour le déplacement

On considère la limite des mouvements de faible amplitude : $\dot r \approx 0$ au voisinage d'une configuration symétrique $r = \bar r$ et $c = \bar c$ où on a posé $\bar r = (\rho_0, \rho_0)$ et $\bar c = (-c_0, c_0)$ où $\rho_o, c_0 > 0$ sont des longueurs données. On suppose que $t \mapsto r(t)$ et $(c, r) \mapsto A_{c,r}$ sont des applications régulières. De plus, on note $a_{i,j}(c, r)$ les éléments de la matrice $A_{c,r}$.

Question 13 *Montrer qu'on a*

$$\Delta c_k \;=\; \sum_{i,l=1,2} \left(\left\{ \sum_{j=1,2} a_{i,j} \frac{\partial a_{k,l}}{\partial c_j}(\bar c, \bar r) \right\} + \frac{\partial a_{k,l}}{\partial r_l}(\bar c, \bar r) \right) R_{i,l} + o(\varepsilon^2) \qquad k = 1, 2.$$

où $\varepsilon \;:=\; \sup_{[0,T]} |\dot r|$ *et*

$$R \;:=\; \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^T (r_1 - \rho_0)\dot r_1 & \displaystyle\int_0^T (r_1 - \rho_0)\dot r_2 \\ \displaystyle\int_0^T (r_2 - \rho_0)\dot r_1 & \displaystyle\int_0^T (r_2 - \rho_0)\dot r_2 \end{pmatrix} \;=\; \left\{ \int_0^T (r_1 - \rho_0)\dot r_2 \right\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On fixe $\rho_0, c_0, \varepsilon > 0$. On s'interesse à une brassée qui s'écrit

$$r(t) = \bar r + \varepsilon(\sin(2\pi t/T) + \sin(\pi t/T), -\sin(2\pi t/T) + \sin(\pi t/T)), \qquad c(0) = \bar c. \tag{7}$$

Question 14 *Montrer que cette brassée vérifie bien* (6)*. Déduire de la question précédente une condition sur* $A_{c,r}$ *et ses dérivées au point* $(\bar c, \bar r)$ *pour qu'on ait une avancée* $\Delta c \neq 0$ *pour* ε *assez petit.*

Pour calculer les quantités Δc_k de la question 13, on doit caculer des approximations la matrice $A_{c,r}$ mais aussi de ses dérivées partielles par rapport à c_1, c_2 et r_1, r_2. Pour calculer ces dérivées partielles nous utiliserons des différences finies centrées. Par exemple

$$\partial_{c_1} A_{c,r} \;\approx\; \frac{1}{2\delta c_1} \left(A_{(c_1+\delta c_1, c_2), r} - A_{(c_1 - \delta c_1, c_2), r} \right).$$

On prendra $\delta c_1 = \delta c_2 = \delta r_1 = \delta r_2 = 0.1$.

Question 15 *Calculer une approximation numérique de* $\displaystyle\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \Delta c$ *pour la brassée* (7)*. Conclure.*