Mini-Projet de MAP 431, Ecole Polytechnique

sujet proposé par F. Nataf

nataf@ann.jussieu.fr

Optimisation du chauffage d'un four

On considère un four de forme rectangulaire, comportant des résistances. On se propose de chercher les valeurs à donner aux résistances de sorte que la température dans une partie du four soit proche d'une valeur fixée à l'avance.

On notera Ω l'ouvert représentant le four et S la pièce à chauffer. Le four Ω est un carré de 2m de côté. L'origine est placée au centre du carré. La pièce S à chauffer est un rectangle de 1m sur 0.4m placée au centre du four. On notera C_i $(i = 1, \ldots, 4)$ les résistances modélisées comme des cercles de rayon 0.05m et placées aux points de coordonnées $(\pm 0.75m, \pm 0.75m)$ (cf. Figure 1).

Le bord supérieur du four est supposé maintenu à une température fixe de 50^{o}C, le bord inférieur à une température fixe de 10^{o}C. Les deux bords latéraux sont isolés, le flux de chaleur y est nul. La température dans le four est régie par l'équation de la chaleur

$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = f. \tag{1}$$

Dans cette équation, k est le coefficient de diffusion thermique qui est variable et vaut 1 dans la pièce à chauffer et 10 dans le reste du four, f est la source de chaleur et est de la forme $f = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \, \mathbf{1}_{C_i}$, où les coefficients α_i sont à déterminer et $\mathbf{1}_C$ est la fonction caractéristique du domaine C.

Travail à réaliser

1 Problème direct

On suppose connus les coefficients $(\alpha_i)_{i=1,\ldots,4}$ et l'on cherche à calculer la température qui en résulte.

Question 1. Ecrire la formulation variationnelle correspondante. On notera $T(\alpha)$ la solution du problème correspondant, où α est le vecteur $(\alpha_i)_{1 \le i \le 4}$.

Question 2. Ecrire le programme FreeFem++ correspondant, en prenant pour valeurs numériques $\forall i = 1, \ldots, 4, \ \alpha_i = 10$. Calculer la température moyenne T_{moy} dans la pièce S.

2 Problème indirect

On se donne une température souhaitée T_C dans la pièce S. On cherche les coefficients α_i de sorte que $T(\alpha)$ soit proche de T_C dans S. Plus précisément, on cherche à minimiser

$$J(\alpha) \ := \ \frac{1}{2} \int_S |T(\alpha) - T_C|^2 \ . \tag{2}$$

Question 3. Montrer que par linéarité, il existe cinq champs de température $T_i, \ i = 0, \ldots, 4$, tels que

$$T(\alpha) = T_0 + \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \ T_i.$$

Calculer les champs de température T_i $(i = 0, \ldots, 4)$ à l'aide de FreeFem++.

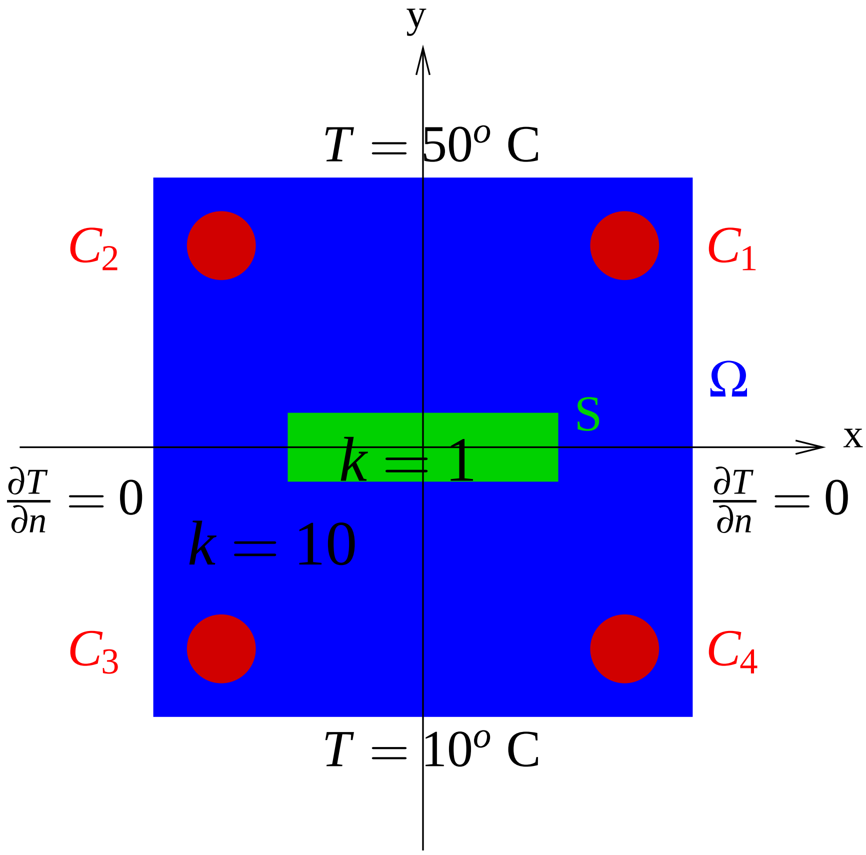

FIGURE 1 – Four Ω et pièce à chauffer S

Question 4. Montrer que le calcul des coefficients optimaux α_i peut se mettre sous la forme d'un système linéaire à résoudre : $A\alpha = b$, où A est une matrice 4×4 et b un vecteur colonne. Expliciter A et b.

Question 5. Calculer effectivement les coefficients α_i pour $T_C = 40^o$C.

Question 6. Contrôler à l'aide d'une simulation directe sous FreeFem++ que votre solution est acceptable. En particulier, calculer l'erreur relative entre la température moyenne obtenue et la température moyenne attendue. Dans tous les cas, on cherchera un maillage convenable en expérimentant avec l'adaptation de maillage de FreeFem++.