

## Équation de la chaleur non linéaire

Sujet proposé par O. Pantz [olivier.pantz@polytechnique.org](mailto:olivier.pantz@polytechnique.org)

### Objectif

Le but de ce Miniprojet consiste à étudier la propagation de la chaleur au sein d'un solide conducteur. L'évolution de la température au sein d'un tel solide dépend de la nature du matériau dont il est constitué et est déterminée par une loi de comportement définissant le flux de chaleur en fonction du gradient de température (et éventuellement de la température elle-même). Une première approximation consiste à supposer que le flux de chaleur est inversement proportionnel au gradient de température mais ceci n'est valable que lorsque ce dernier n'est pas trop élevé. Après une étude de l'équation de la chaleur linéaire, on étendra cette dernière à un cadre non linéaire. On appliquera par la suite la méthode des différences finies, puis des éléments finis dans un cadre respectivement unidimensionnel et bidimensionnel.

### Position du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier occupé par un solide conducteur. On note  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  l'application qui à tout élément  $x$  de  $\Omega$  associe sa température. On suppose que la température est fixée sur une partie du bord  $\Gamma_D$  à une température  $T_0$ , qu'un flux de chaleur  $g$  est appliqué sur le reste du bord du domaine  $\Gamma_D$  et qu'un flux volumique  $f$  est appliquée sur le domaine  $\Omega$ . Le flux de chaleur  $\sigma(x)$  en un point  $x$  du domaine est supposé dépendre uniquement du gradient de la température en ce point, c'est à dire que  $\sigma(x) = F(\nabla u(x))$ , où  $F$  est une fonction dépendant uniquement de la nature du matériau constituant le solide. On se place dans un cadre stationnaire. Dans ce cas,  $u$  est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\operatorname{div}(\sigma) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

$$u = T_0 \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (2)$$

$$-\sigma \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (3)$$

$$\sigma = F(\nabla u) \quad \text{sur } \Omega. \quad (4)$$

---

### MODÉLISATION

---

**Question 1.** En supposant que  $T_0$  est une constante et si  $f$  et  $g$  sont nuls, exhiber une solution élémentaire de (1-4).

**Question 2.** Lorsque  $T_0$  est proche d'une constante avec  $f$  et  $g$  proches de 0, il est raisonnable de supposer que la solution  $u$  de (1-4) reste proche de la solution précédente. Dans ce cas, on peut "linéariser" le problème (1-4) sous la forme

$$\operatorname{div}(\sigma_L) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (5)$$

$$u_L = T_0 \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (6)$$

$$-\sigma_L \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (7)$$

$$\sigma_L = -A\nabla u_L \quad \text{sur } \Omega, \quad (8)$$

où  $A$  est une matrice  $N \times N$ . Expliciter  $A$  en fonction de  $F$  en justifiant sommairement pour quelles raisons  $u_L$  est une approximation correcte de  $u$  (Note: A température constante, le flux de chaleur est nul. En d'autres termes,  $F(0) = 0$ ).

---

CAS UNIDIMENSIONNEL - CAS LINÉAIRE

---

On considère le cas  $A = \text{Id}$ . On souhaite appliquer la méthode des différences finies afin de résoudre (5-8). On suppose que  $\Omega = ]0, 1[$ , que la température est fixée nulle en  $\Gamma_D = \{0\}$  et que  $\Gamma_N = \{1\}$ . On introduit le schéma centré associé à (5-8) consistant à déterminer  $u_j$  ( $n = 0, \dots, N$ ) tel que

$$\begin{aligned} -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} &= f(x_j) \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, N-1 \\ u_0 &= 0 \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x} &= g + \frac{\Delta x}{2} f(1), \end{aligned}$$

où  $\Delta x = N^{-1}$ ,  $x_j = j\Delta x$  et  $u_j$  est une approximation de  $u(x_j)$ .

**Question 3.** Montrer que le schéma est d'ordre 2 (en espace, il n'y a pas de variable en temps ici). Implémenter ce schéma sous scilab. On utilisera à cet effet des **matrices creuses** pour écrire et résoudre le système.

**Question 4. Validation.** On souhaite vérifier la convergence du schéma proposé et déterminer (numériquement) sa vitesse de convergence. À cet effet, on fixe des valeurs de  $f$  et de  $g$  pour lesquels on connaît explicitement la solution  $u$  de l'équation de la chaleur, puis on vérifie la convergence de la solution du schéma vers la solution exacte. Afin d'obtenir un couple  $f$  et  $g$  pour lequel on connaît la solution explicite, le plus simple est de procéder "à l'envers": Il suffit de choisir une fonction  $u$  quelconque nulle en  $x = 0$ , puis de calculer ses dérivées première et seconde pour en déduire  $f$  et  $g$ .

Tester votre algorithme avec  $u = x \cos(x)$ , pour un nombre de points de discrétisation  $N = 5, 10, 100, 500, 1000, 5000, 10000$ . Tracer en échelle logarithmique l'erreur en norme  $L^2$  de la solution du problème discrétisé en fonction du pas de discrétisation  $\Delta x$ .

**Note:** La norme  $L^2$  de l'erreur discrétisée est définie par

$$e = \left( \sum_j |u_j - u(x_j)|^2 \Delta x \right)^{1/2}.$$

Tracer sur le même graphique (toujours en échelle logarithmique) les fonctions  $\Delta x$ ,  $\Delta x^2$  et  $\Delta x^3$  en fonction de  $\Delta x$  (leur graphes sont des droites en échelle logarithmique). Quelle est la vitesse de convergence du schéma ?

---

CAS UNIDIMENSIONNEL - CAS NON LINÉAIRE

---

On suppose que le flux  $F$  est de la forme

$$F(\nabla u) = -(1 + 2|\nabla u|^2)\nabla u. \quad (9)$$

On se propose d'utiliser la discrétisation suivante: Trouver  $u \in \mathbb{R}^{N+1}$  tel que

$$\left(1 + 2 \left| \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} \right|^2\right) \frac{u_j - u_{j-1}}{(\Delta x)^2} - \left(1 + 2 \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \right|^2\right) \frac{u_{j+1} - u_j}{(\Delta x)^2} = f_j, \quad (10)$$

pour tout  $j = 1, \dots, N-1$ ,

$$u_0 = 0 \quad (11)$$

et

$$\left(1 + 2 \left| \frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x} \right|^2\right) \frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x} = g + \frac{\Delta x}{2} f(1). \quad (12)$$

Le problème discrétisé ci-dessus est non linéaire. Afin de calculer numériquement sa solution, on peut utiliser un algorithme de type point fixe. On construit une suite de vecteurs  $u^n$  de  $\mathbb{R}^{N+1}$  convergeant vers la solution du système. A chaque itération,  $u^{n+1}$  est obtenu en deux temps. On détermine tout d'abord la solution  $\tilde{u}^{n+1} \in \mathbb{R}^{N+1}$  du problème linéaire dépendant de  $u^n$

$$\left(1 + 2 \left| \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right|^2\right) \frac{\tilde{u}_j^{n+1} - \tilde{u}_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - \left(1 + 2 \left| \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right|^2\right) \frac{\tilde{u}_{j+1}^{n+1} - \tilde{u}_j^{n+1}}{(\Delta x)^2} = f_j,$$

pour tout  $j = 1, \dots, N-1$ ,

$$\tilde{u}_0^{n+1} = 0,$$

$$\left(1 + 2 \left| \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta x} \right|^2\right) \frac{\tilde{u}_N^{n+1} - \tilde{u}_{N-1}^{n+1}}{\Delta x} = g + \frac{\Delta x}{2} f(1).$$

et on définit  $u^{n+1}$  par

$$u^{n+1} = \omega \tilde{u}^{n+1} + (1 - \omega)u^n,$$

où  $\omega$  est un réel strictement positif, inférieur ou égal à 1.

**Question 5.** Montrer que si l'algorithme proposé est convergent, la solution obtenue vérifie le système (10-12). Implémenter cet algorithme. Comparer sur un même graphique, la solution linéaire et la solution non linéaire obtenue avec  $\omega = 1/2$  en utilisant les mêmes fonctions  $f$  et  $g$  qu'à la question 4. Quelle est, dans ce cas, la différence (en norme  $L^2$ ) entre la solution de l'équation de la chaleur non linéaire et de l'équation de la chaleur linéaire ?

---

#### CAS BIDIMENSIONNEL - LINÉAIRE

---

**Question 6.** Écrire la formulation variationnelle associée au problème linéaire (5-8).

**Question 7.** Résoudre le problème (5-8) dans le cas bidimensionnel à l'aide du logiciel `FreeFem++`. On considérera le cas d'un domaine  $\Omega$  constitué d'un carré dont on a extrait un carré plus petit. Plus précisément, on pose  $\Omega^1 = ]0, 3[^2$ ,  $\Omega^0 = ]1, 2[^2$  et  $\Omega = \Omega^1 \setminus \Omega^0$ . On choisira  $A = \text{Id}$ ,  $T_0 = 0$ . Enfin, les conditions aux bords sont définies par

$$\begin{aligned}\Gamma_N &= \Gamma_N^0 \cup \Gamma_N^- \cup \Gamma_N^+, \\ \Gamma_D &= \partial\Omega \setminus \Gamma_N, \\ g &= 1 \text{ sur } \Gamma_N^+ = \{3\} \times [0, 3], \\ g &= -1 \text{ sur } \Gamma_N^- = \{0\} \times [0, 3], \\ g &= 0 \text{ sur } \Gamma_N^0 = \partial\Omega_0, \\ f &= 0 \text{ dans } \Omega.\end{aligned}$$

Représenter sur un graphique les isovaleurs de  $u_h$  (solution de la formulation éléments finis) en utilisant une discrétisation de 10 noeuds par coté (aussi bien pour le carré extérieur que intérieur).

**Question 7.** On souhaite affiner la précision du calcul. A cet effet, il est nécessaire de raffiner le maillage. Choisir un maillage uniforme n'est en général pas intéressant: Pour obtenir une bonne approximation, il suffit de mailler dans les zones où la fonction  $u$  est peu régulière. On utilisera à cet effet la procédure suivante:

- Définir le maillage initial `Sh`
- Calculer la solution `uh` de la formulation variationnelle pour les éléments finis  $P_1$ .
- Pour  $i$  allant de 0 à 10,
  - Adapter le maillage `Sh` en fonction de  $u_h$
  - Calculer la solution `uh` de la formulation variationnelle pour les éléments finis  $P_1$  sur le nouveau maillage.

Pour la procédure d'adaptation, on utilisera la fonction `adaptmesh` sous la forme

```
Sh=adaptmesh(Sh,u,err=0.01/(i+1),nbvx=100000);
```

Représentez la valeur du maximum du gradient de `uh` en fonction de  $i$ . Que constate-t-on ? Le gradient de `uh` présente-t-il des singularités ? Commentez.

#### CAS BIDIMENSIONNEL - NON LINÉAIRE

**Question 8.** Montrer que la solution  $u$  de l'EDP (1-4) est solution d'un problème variationnel de la forme suivante: Trouver  $u \in V$  tel que pour tout  $v \in V$ ,

$$a_u(u, v) = L(v),$$

où  $a_u$  est une forme bilinéaire dépendant de  $u$  et  $L$  est une forme linéaire.

**Question 9.** Adaptez la méthode de résolution du problème non linéaire vu dans le cas unidimensionnel au cas bidimensionnel. On utilisera de nouveau l'expression du flux donnée par (9). Calculez en norme  $L^2$  l'écart entre la solution du problème linéaire et du problème non linéaire et faites de même pour leur gradients (il s'agit donc de déterminer  $\|u - u_L\|_{L^2}$  et  $\|\nabla u - \nabla u_L\|_{L^2}$ ). Représentez graphiquement les isovaleurs de la différence entre solution linéaire et solution non linéaire.