

# Mini-Projet d'analyse numérique du cours MAP 431

## Equilibre d'une membrane contenant de l'eau avec obstacle

Sujet propos par Gilles Thouroude  
e-mail : thouroude@cmapx.polytechnique.fr

### 1 Introduction

Soit  $\Omega$  une partie ouverte et bornée de  $\mathbb{R}^2$ , de bord régulier. Etant donné un champ de forces  $f \in L^2(\Omega)$ , le problème de l'obstacle s'écrit

$$\text{Min}_{v \in K} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla v(\omega)\|^2 d\omega - \int_{\Omega} f(\omega)v(\omega)d\omega, \quad (OP)$$

où  $K$  est défini par

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); v(\omega) \leq \Phi(\omega) \text{ p.p. sur } \Omega\}. \quad (1)$$

Ici  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . Si  $\Phi(\omega) = +\infty$  le problème est sans obstacle. Dans le cas général il s'agit une inéquation variationnelle, voir Lions et Stampacchia [4], Duvaut et Lions [3], Brézis [2], et aussi [1, Section 6.4] pour une présentation élémentaire.

Dans cette étude on prend en compte la présence d'eau au dessus de la membrane. La quantité d'eau est fixée. Pour commencer on étudie le problème de l'obstacle.

### 2 Problème de l'obstacle

Le potentiel de déformation élastique est

$$E_D(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla v(\omega)\|^2 d\omega. \quad (2)$$

Les constantes physiques sont prises égales à 1. Le potentiel associé aux forces  $f \in L^2(\Omega)$  (orientées vers le bas) est

$$E_C(v) = - \int_{\Omega} f(\omega)v(\omega)d\omega. \quad (3)$$

La position d'équilibre statique, avec la condition de déplacement nul au bord, est donc solution du problème

$$(P_1) \quad \inf E_D(v) + E_C(v); \quad v \in K.$$

1. Montrer que le problème admet une solution unique  $\bar{v} \in H_0^1(\Omega)$ .
2. Soit  $\lambda \in H^{-1}(\Omega)$  défini par  $\lambda = -\Delta\bar{v} - f$ . Montrer que

$$\langle \lambda, v - \bar{v} \rangle \geq 0, \quad \text{pour tout } v \in K. \quad (4)$$

3. Pour  $v \in K$ , on note le domaine de contact

$$I(v) := \{\omega \in \Omega; v(\omega) = \Phi(\omega)\};$$

Il est défini à un ensemble de mesure nulle près. On suppose ici que  $\bar{v} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Montrer que  $\bar{v}$  est continue, et que  $\lambda \in L^2(\Omega)_-$ , avec de plus  $\lambda$  nulle en dehors de  $I(\bar{v})$ .

4. En déduire une interprétation mécanique de la condition d'optimalité (équilibre des forces).
5. Formuler le problème discret, en supposant  $\Omega$  rectangulaire, et utilisant la méthode des différences finies.
6. Résoudre numériquement. On pourra comparer la performance de la fonction optim de scilab (algorithmes de quasi Newton à mémoire limitée avec bornes) à une implémentation plus rustique, du type gradient avec projection à pas constant. Peut-on dégager expérimentalement un comportement asymptotique quand le pas de discrétisation tend vers 0 ?
7. On suppose ici le problème sans obstacle et le champ de forces constant. On s'intéresse à un domaine très allongé avec éventuellement un pincement au milieu. Il semble intuitivement que le pincement rende les lignes de niveau non convexes. Peut-on le confirmer expérimentalement ?

### 3 Membrane faisant office de réservoir d'eau

Notons  $h$  le niveau d'eau (dirigé vers le bas). L'énergie potentiel dûe au poids de l'eau est

$$E_F(v, h) := -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (v(\omega) + h)(v(\omega) - h)_+ d\omega. \quad (5)$$

En effet, la hauteur de la colonne d'eau est  $(v(\omega) - h)_+$ . L'énergie mécanique totale est donc

$$E(v, h) := E_D(v) + E_C(v) + E_F(v, h). \quad (6)$$

On a de plus une contrainte de volume  $L > 0$  :

$$G(v, h) = \int_{\Omega} (v(\omega) - h)_+ d\omega = L. \quad (7)$$

La formulation du problème est

$$\inf E(v, h); \quad G(v, h) = L; \quad (v, h) \in K \times \mathbb{R}. \quad (P_2)$$

1. Montrer que si la contrainte est satisfaite, alors

$$E_F(v) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (v(\omega) - h)_+^2 d\omega - hL, \quad (8)$$

et que si on pose

$$J(v, h, L) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla v(\omega)\|^2 d\omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v(\omega) - h)_+^2 d\omega - \int_{\Omega} f(\omega)v(\omega) d\omega - hL, \quad (9)$$

un problème équivalent est

$$\text{Min}_{v, h} J(v, h, L); \quad G(v, h) = L; \quad (v, h) \in K \times \mathbb{R}. \quad (10)$$

2. (facultatif) Montrer que  $(\bar{v}, \bar{h}) \in K \times \mathbb{R}$  satisfait la contrainte de volume ssi  $\bar{v}$  est solution de

$$\text{Min}_{v \in K} \sup_{h \in \mathbb{R}} J(v, h, L). \quad (11)$$

3. Notons  $h(v, L)$  la hauteur d'eau. On admet que cette fonction est localement lipschitzienne. Posons

$$F(v) := J(v, h(v, L), L); \quad (v, L) \in L^2(\Omega) \times \mathbb{R}_{++}. \quad (12)$$

On introduit le problème réduit

$$\underset{v}{\text{Min}} F(v); \quad (v, L) \in K \times \mathbb{R}_{++}. \quad (RP)$$

(facultatif) Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$ , et telle que

$$F'(v)z = \int_{\Omega} \nabla v(\omega) \cdot \nabla z(\omega) d\omega - \int_{\Omega} (v(\omega) - h)_+ z(\omega) d\omega - \int_{\Omega} f(\omega) z(\omega) d\omega. \quad (13)$$

4. On note  $\hat{v}$  une solution de  $(RP)$ ; on suppose que  $\hat{v} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Donner une interprétation mécanique de la condition d'optimalité (équilibre des forces).
5. Formuler le problème discret, en supposant  $\Omega$  rectangulaire, et utilisant la méthode des différences finies. Expliciter le gradient du critère discret.
6. Résoudre numériquement, par exemple avec la fonction optim de scilab.
7. (question plus ouverte) Un algorithme possible est, à répartition d'eau figée de résoudre le problème d'obstacle correspondant, puis de faire chuter l'eau. A-t-on convergence de cet algorithme? Que donne sa mise en œuvre? Quel est son intérêt? Que donne-t-il pour un domaine avec pincement?

## Références

- [1] J.F. Bonnans and A. Shapiro. *Perturbation analysis of optimization problems*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [2] H. Brézis. Problèmes unilatéraux. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 51 :1–168, 1972.
- [3] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [4] J.L. Lions and G. Stampacchia. Variational inequalities. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 20 :493–519, 1967.