

Flûte à coulisse

Introduction

L'objet de ce mini-projet est l'étude des sons produits par une flûte à coulisse. L'énoncé a été réalisé à partir de l'article "Sur le contrôle frontière d'une flûte à coulisse par fonction de Lyapunov" D'Andréa-Novel, Coron, Bastin. La simulation se fait sous scilab et permet de donner en fonction des données initiales les valeurs de pression et de débit au sein du tube. La pression p ainsi que le débit u sont régis par l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

Une fois la résolution de cette équation pour une longueur donnée réalisée, on s'intéressera à un générateur de consignes de longueur permettant ainsi de faire varier la longueur d'onde et donc ainsi le son produit. Les sons peuvent se jouer sous scilab via la commande "playsnd"

Résolution par différences finies

On précise tout d'abord quelques constantes apparaissant dans les calculs :

- Vitesse du son : $c = 344 \text{ m.s}^{-1}$
- Masse volumique de l'air : $\rho_0 = 1.2 \text{ kgm}^{-3}$
- Rayon du tube : $r = 0.01 \text{ m}$. On note S la section.
- Longueur max du tube : 0.18 m . On note L la longueur courante.

Q1 : Poser $Y = (u, p)$ et $c_1 = \frac{S}{\rho_0}$ et mettre en equation le problème sous la forme :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + A \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

avec A une matrice à déterminer sachant que les équations reliant u et p sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{S}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\rho_0 c^2}{S} \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Q2 : Diagonaliser ce système en faisant apparaître deux variables α (onde aller) et β (onde retour) vérifiant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + c \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} - c \frac{\partial \beta}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Q3 : On donne pour conditions aux limites :

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = S \frac{dL}{dt}$$

En déduire les conditions aux limites sur $\alpha + \beta$.

Q4 : Résoudre via la méthode des différences finies l'équation de d'Alembert pour une longueur de consigne donnée. On prendra comme fréquence d'échantillonnage $Fe = 22050Hz$ et $dt = 1/Fe$. On prendra pour pression initiale le long du tube :

$$p(x, 0) = \cos(2\pi f_0/c)$$

Le schéma pour α est décentré amont, et décentré aval pour β . $f_0 = \frac{c}{2L}$.

Q5 : Adapter le schéma précédent ce façon à ce que la longueur L soit un paramètre de la simulation que l'on puisse modifier en la passant en argument. Pour chaque nouvelle consigne L on réinitialisera la pression dans le tube.

Résolution directe

Les différences finies ne sont pas indispensables pour modéliser le front d'onde dans le tube de la flûte à coulisse. On a en effet un couple de solutions bien connues du problème :

$$p(x, t) = \cos\left(\frac{2\pi f_0 x}{c}\right) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$u(x, t) = \frac{S}{\rho_0 c} \sin\left(\frac{2\pi f_0 x}{c}\right) \sin(2\pi f_0 t)$$

Q6 : Reprendre les questions 4 et 5 en implantant directement la formule et comparer les résultats obtenus par les deux méthodes.

Générateur de consignes de longueur

Afin de générer des consignes pour la longueur L du tube de la flûte on utilise les valeurs données par une solution de l'équation dite de Lorenz :

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

Q7 : En utilisant la méthode des différences finies sous scilab trouver la solution du système précédent avec pour conditions initiales $(0, 1, 0)$ et pour pas de temps :

$$dt = 0.01$$

pour t allant de 0 à 10. Les paramètres de l'attracteur de Lorenz à prendre sont :

$$\rho = 28$$

$$\sigma = 10$$

$$\beta = 8/3$$

Tracer l'attracteur en trois dimensions puis sa projection suivant l'axe des Y .

Q8 : Combiner le générateur trouvé à la question précédente avec les solutions donnant la pression en fonction de la consigne de longueur. On utilisera la coordonnée y de la solution de l'équation de Lorenz pour obtenir une suite de consignes "pseudo aléatoires". Comparer les résultats obtenus avec la méthode des différences finies de la question 5 avec ceux de la résolution exacte implantée à la question 6 sur une dizaine de longueur consignes différentes. Le son peut être joué en utilisant la commande " playsnd" appliquée au vecteur de pression en bout de tube.