

X. Blanc

blanc@ann.jussieu.fr

Ce sujet est dédié à la construction de plusieurs méthodes de Volumes Finis pour discrétisation numérique pour les ondes linéaires, et à l'étude numérique de la vitesse d'onde homogénéisée dans un cas de grande importance industrielle.

L'équation des ondes acoustiques unidimensionnelles qui se propagent dans un fluide est

$$\rho(x)u_{tt} - (\sigma(x)u_x)_x = 0. \quad (1)$$

Les coefficients du fluide sont $\sigma(x)$ et $\rho(x)$.

Il est connu que la vitesse du son d'un mélange de deux fluides peut être plus petite que celle de chaque fluide pris séparément. Ce phénomène apparaît par exemple dans les tuyauteries de centrales nucléaires pour les mélanges eau ($c \approx 1000m/s$) et vapeur d'eau ($c \approx 300m/s$). Nous mettrons en évidence cette propriété physique à partir d'essais numériques.

1 - Équation des ondes en 1D (Théorie)

- a) On définit l'énergie $E(t) = \int_{\mathbb{R}} (\rho u_t^2 + \sigma u_x^2) dx$. Montrer que l'énergie est constante au cours du temps. On supposera pour cela que u et ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 (en temps et en espace) sont de carré intégrable en espace, pour tout $t \geq 0$.
- b) Ici nous supposons que le milieu est homogène $\rho(x) = \rho = \text{cste} > 0$ et $\sigma(x) = \sigma = \text{cste} > 0$. On définit la vitesse du son $c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$, ainsi que $w^\pm = u_t \pm cu_x$. Quelles sont les équations satisfaites par w^\pm ? Les résoudre. À partir de w^\pm donner la solution pour u_t et u_x .

Dans toute la suite, on reprend le cas $\sigma = \sigma(x)$ non nécessairement constant.

2 - Schéma numérique en 1D (Scilab)

On pose $p = \rho u_t$ et $q = u_x$. Montrer que (p, q) est solution du système

$$\begin{cases} p_t = (\sigma q)_x, & p(t=0) = p_0, \\ q_t = (\frac{1}{\rho} p)_x, & q(t=0) = q_0. \end{cases} \quad (2)$$

Soit le schéma numérique de type Volumes Finis sur un maillage $j\Delta x$, d'inconnues $(p_j^n)_j$ et $(q_j^n)_j$

$$\frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\Delta t} = \frac{(\sigma q)_{j+\frac{1}{2}}^n - (\sigma q)_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}, \quad \frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} = \frac{(\frac{1}{\rho} p)_{j+\frac{1}{2}}^n - (\frac{1}{\rho} p)_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}, \quad (3)$$

avec

$$(\sigma q)_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{(\sigma q)_j^n + (\sigma q)_{j+1}^n}{2} - \frac{c}{2} (p_j^n - p_{j+1}^n),$$

et

$$(\frac{1}{\rho} p)_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{(\frac{1}{\rho} p)_j^n + (\frac{1}{\rho} p)_{j+1}^n}{2} - \frac{1}{2c} (q_j^n - q_{j+1}^n).$$

- a) On fixe pour simplifier les coefficients $\sigma = \rho = c = 1$. Etudier la stabilité et la consistance de ce schéma.
- b) Ecrire un code en Scilab et faire une étude numérique de stabilité.
- c) Pour des données initiales à support compact que l'on choisira, vérifier que le support des solutions s'étend à la vitesse du son (au plus).

3 - Méthodes d'ordre élevé

On considère l'équation de transport en dimension un d'espace

$$\partial_t w + a \partial_x w = 0, \quad a > 0,$$

que l'on discrétise avec le schéma de Volumes Finis

$$\frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} + a \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0.$$

Le flux numérique est donné explicitement en fonction des valeurs voisines. La correspondance entre la forme du flux et le nom du schéma est donné dans le tableau qui suit

Schéma	Flux
Upwind	$w_{j+\frac{1}{2}}^n = w_j^n$
Lax-Wendroff	$w_{j+\frac{1}{2}}^n = w_j^n + \frac{1}{2}(1 - \nu)(w_{j+1}^n - w_j^n)$
Beam-Warming	$w_{j+\frac{1}{2}}^n = w_j^n + \frac{1}{2}(1 - \nu)(w_j^n - w_{j-1}^n)$
O3	$w_{j+\frac{1}{2}}^n = (1 - \alpha)w_{j+\frac{1}{2}}^{n,LW} + \alpha w_{j+\frac{1}{2}}^{n,BW}$

sachant que

$$\nu = \frac{a}{\Delta t} \Delta x \in]0, 1] \text{ et } \alpha = \frac{1 + \nu}{3}.$$

- a) Soit le système (1) à coefficients constants comme à la question 1-b). Déterminer a pour que le schéma de transport discrétise l'équation satisfaite par w^+ . Que dire pour w^- ?
- b) Montrer que les schémas de Lax-Wendroff et Beam-Warming sont d'ordre 2 en espace et en temps, et que le schéma O3 est d'ordre 3 en espace et en temps. Montrer que tous ces schémas sont stables sous la même condition de stabilité $\nu \leq 1$.
- c) On considère le système des ondes (2) avec des coefficients constants. On utilisera le fait que ce système se ramène à la résolution de deux équations scalaires découplées

$$\partial_t w + c \partial_x w = 0, \quad \partial_t z - c \partial_x z = 0,$$

avec $w = p + \sqrt{\sigma \rho} q$ et $z = p - \sqrt{\sigma \rho} q$.

Implémenter en Scilab les schémas précédents pour la résolution de (2) et vérifier que l'ordre optimal de convergence est atteint numériquement.

- d) Proposer des pistes pour étendre le schéma de Lax-Wendroff à la résolution du système (2) à coefficients variables.

4 - Homogénéisation numérique en 1D (Etude Scilab à partir d'un code fourni)

Le code **ondes2.sce**, écrit en Scilab, utilise le schéma (3) pour la solution (2) avec des coefficients ($\rho, \sigma, c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$) variables en espace. On considère un milieu à deux fluides numérique : $\rho(x) = \sigma(x) = \rho_1$ et $\rho(x) = \sigma(x) = \rho_2$ alternativement sur des intervalles de longueur $n_1 \Delta x$ puis $n_2 \Delta x$, avec $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. On note que $c_1 = c_2 = 1$.

- a) Faire des essais numériques avec le code **ondes2.sce**. Qu'observe-t-on ? Vérifier que les solutions numériques se comportent comme des solutions de l'équation des ondes avec un vitesse du son constante

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{1}{\sigma}}, \tag{4}$$

où \bar{f} désigne la moyenne en espace de f .

Indication : Pour mesurer la vitesse du son, on pourra se contenter de mesurer la vitesse de déplacement du pic principal sur le graphique.

Pour les courageux (question supplémentaire par rapport au texte initial) : En supposant que la vitesse du son est de $c = 1$ dans chaque fluide, montrer à partir de (4) que la vitesse du son homogénéisée est inférieure à 1 ($c \leq 1$) dans tous les cas de figures.

- b) Les valeurs physiques pour les mélanges eau-vapeur sont $\rho_e = 1000 \text{kg/m}^3$, $c_e = 1000 \text{m/s}$, $\rho_v = 1 \text{kg/m}^3$, $c_v = 300 \text{m/s}$. Tracer (grâce au logiciel **gnuplot** par exemple) la valeur de la vitesse du son en fonction de la fraction de présence. La vitesse du son est-elle une fonction monotone ?