Mini-Projet d'Analyse Numérique

Ecole Polytechnique, MAP 431, 2009-2010

Réchauffement d'un châlet par un feu de cheminée

sujet proposé par Jennifer Bourguignon-Mirebeau
jennifer.bourguignon@math.u-psud.fr

On considère un châlet dans la montagne. Des locataires viennent d'arriver dans le châlet pour y prendre leurs quartiers d'hiver. Pressés de se réchauffer, ils allument sans plus tarder un feu dans la cheminée, observent les volutes de fumée qui s'en dégagent et attendent impatiemment que la pièce atteigne une température acceptable.

Nous allons évaluer, d'une part, comment se propage le nuage de fumée qui s'est dégagé à l'extérieur du châlet (**Partie I, *Scilab***), et d'autre part à partir de quel instant la température de la pièce sera optimale (**Partie II, *FreeFem++***).

1 Déplacement du nuage de fumée émanant de la cheminée (*Scilab*)

A l'instant initial, la cheminée rejette une fumée qui va se propager sous l'effet du vent (cf. Figure 1). On veut connaître la densité de la fumée dans l'espace au cours du temps. On suppose le problème monodimensionnel : la vitesse du vent est selon un axe horizontal. On notera

- $c(x,t)$ la concentration de la fumée au point x, au temps t. La densité $c_0(x) = c(x,0)$ à l'instant $t = 0$ est supposée connue et à support compact ;
- $v(x,t)$ la vitesse du vent au point x, au temps t. On suppose également connue la vitesse du vent en tout point et à tout instant.

On suppose que la densité de fumée c vérifie l'équation d'advection-diffusion suivante (où k désigne le coefficient de diffusion) :

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, & \dfrac{\partial c}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial (vc)}{\partial x}(x,t) - k\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t) = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, & c(x,0) = c_0(x). \end{cases}} \tag{1}$$

Remarque 1. *On veut résoudre le système par une méthode de différences finies. Soient un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$. Pour $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$. On recherche une approximation c_j^n de $c(x_j, t_n)$. On se placera sur les intervalles : $x \in [-10, 10]$ et $t \in [0, 5]$. On notera*

$$\boxed{\alpha = \frac{v\ \Delta t}{\Delta x}, \quad \beta = \frac{k \Delta t}{\Delta x^2}\ .}$$

Pour les applications numériques sous Scilab, on partira systématiquement d'une donnée initiale (où 1_X est la fonction caractéristique de l'ensemble X)

$$c_0(x) = 1_{[0,2]} \times (1 - |x-1|).$$

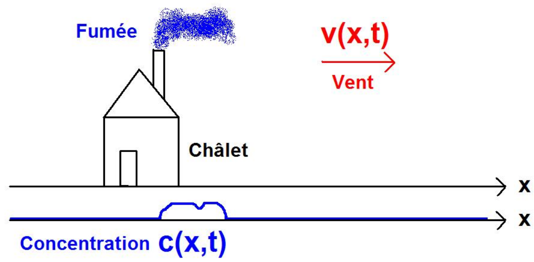

FIG. 1 – Fumée s'échappant du châlet - densité de fumée en (x, t)

On tracera, dans un premier temps, la solution $c(x,t)$ au cours du temps, puis on affichera en 3D, à la fin de la résolution, la solution c en fonction de (x,t).

1.1 Cas d'une vitesse constante, sans diffusion $(v = 1,\ k = 0)$

On suppose dans toute cette partie que k est nul et $v(x,t)$ est constante en espace et en temps : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ v(x,t) = v \in \mathbb{R}$. On prendra $\boxed{v = 1,\ k = 0}$ pour les applications numériques.

Méthode des caractéristiques On suppose de plus que c_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On cherche $c \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ solution du problème :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \quad \dfrac{\partial c}{\partial t}(x,t) + v\dfrac{\partial c}{\partial x}(x,t) = 0, \\ \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad c(x,0) = c_0(x). \end{cases} \tag{2}$$

On va utiliser la méthode des caractéristiques pour résoudre cette équation. On cherche une fonction $X(t)$ telle que c soit constante sur les courbes $(X(t), t)$ représentées dans le plan (x,t) (ces courbes sont appelées *courbes caractéristiques*, d'où le nom de la méthode).
Soit c solution de l'équation. On pose $\Phi(x,t) = c(X(t),t)$.

Question 1. *Calculer $\dfrac{d\Phi}{dt}$. A quelle condition $\dfrac{d\Phi}{dt}$ s'annule-t-il ? En déduire la forme que doivent posséder les caractéristiques $X(t)$. Y a-t-il unicité de la solution au problème ? Réciproquement, y a-t-il existence ?*

Méthode des différences finies - Schéma décentré On choisit d'utiliser un schéma explicite décentré en espace. On approche donc les dérivées partielles suivantes par les différences finies :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t}(x_j, t_n) &\approx \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t}, \\ \frac{\partial c}{\partial x}(x_j, t_n) &\approx \frac{c_j^n - c_{j-1}^n}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Question 2. *Ecrire le schéma numérique. Exprimer matriciellement $\left(c_j^{n+1}\right)_j$ en fonction de $\left(c_j^n\right)_j$, α. Le schéma est-il explicite ou implicite ?*

Question 3. *Résoudre numériquement le schéma, avec $\Delta t = 1.10^{-2}$ et $\Delta x = 2.10^{-2}$. Tracer la solution obtenue. Comparer avec la solution exacte donnée par la méthode des caractéristiques.*

Analyse de la convergence du schéma On rappelle que $\alpha = \dfrac{v\Delta t}{\Delta x}$ et on suppose que $\alpha \in [0,1]$ (c'est une condition de type CFL). On fait de plus l'hypothèse que la solution c est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et que ses dérivées partielles d'ordre 2 sont bornées sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Question 4. ***Stabilité.***
Soit c_j^n solution du schéma. Soit d_j^n solution du schéma perturbé par μ_j^n, définie par

$$\begin{cases} d_j^0 = c_j^0 = c_0(x_j), \\ d_j^{n+1} \; = \; d_j^n \; - \; \alpha \; \left(d_j^n - d_{j-1}^n\right) \; + \; \mu_j^n. \end{cases} \tag{3}$$

Posons $e_j^n = c_j^n - d_j^n$ (l'erreur commise par rapport à c_j^n) et $\eta^n = \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} |e_j^n|$. Montrer l'estimation de stabilité

$$\eta^n \;\leq\; \eta^{n-1} \;+\; \sup_{j\in\mathbb{Z}} \; |\mu_j^{n-1}| \;\leq\; \sum_{0\leq k\leq N} \; \sup_{j\in\mathbb{Z}} \; |\mu_j^k|. \tag{4}$$

En quoi cela constitue-t-il un résultat de stabilité ?

Question 5. ***Consistance.***
Soit $d_j^n = c(x_j, t_n)$ la solution du problème continu. Montrer que d_j^n est alors solution du schéma (3), où μ_j^n est tel que il existe une constante C, qu'on explicitera en fonction des normes L^∞ de certaines des dérivées partielles de c, telle que

$$|\mu_j^n| \;\leq\; C \;\Delta t \;(\Delta t + \Delta x). \tag{5}$$

Question 6. ***Convergence.***
Déduire des deux questions précédentes que le schéma est convergent au sens suivant : soit $N \in \mathbb{N}$ fixé, posons $T = N\Delta t$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\max_{0\leq n\leq N} \; \sup_{j\in\mathbb{Z}} \; \left|c(x_j,t_n) - c_j^n\right| \;\leq\; CT(\Delta t + \Delta x). \tag{6}$$

Question 7. ***Application numérique.***
On prendra un pas de temps $\Delta t = 1.10^{-2}$, avec pour pas d'espace :

1. $\Delta x = 2.10^{-2}$,
2. $\Delta x = 1.10^{-2}$,
3. $\Delta x = 0.5.10^{-2}$.

Dans quels cas le schéma explose-t-il ? Comment expliquez-vous cela au regard de la dernière question ?

1.2 Cas d'une vitesse constante, avec diffusion ($v = 1,\ k = 0.01$) - Schéma décentré

On suppose maintenant la vitesse du vent constante et le coefficient de diffusion non nul. Pour les applications numériques, on prendra

$$\boxed{v = 1, \quad k = 0.01, \quad \Delta t = 0.01 \quad \Delta x = 0.02.}$$

On approche la dérivée seconde par la différence finie :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x_j, t^n) \approx \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Question 8. *Ecrire le schéma numérique. Exprimer matriciellement* $\left(c_j^{n+1}\right)_j$ *en fonction de* $\left(c_j^n\right)_j$, α *et* β*. Le schéma est-il explicite ou implicite ?*

Question 9. *Résoudre numériquement le schéma et tracer la solution.*

1.3 Cas d'une vitesse constante, avec diffusion ($v = 1,\ k = 0.01$) - Schéma centré

On suppose toujours la vitesse du vent constante et le coefficient de diffusion non nul ; on prendra à nouveau pour les applications numériques

$$\boxed{v = 1, \quad k = 0.01, \quad \Delta t = 0.01 \quad \Delta x = 0.02.}$$

On choisit cette fois de traiter l'équation à l'aide du schéma suivant, centré en espace :

$$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} + v\,\frac{c_{j+1}^n - c_{j-1}^n}{2\Delta x} - k\,\frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

Question 10. *Ecrire le schéma numérique. Exprimer matriciellement* $\left(c_j^{n+1}\right)_j$ *en fonction de* $\left(c_j^n\right)_j$, α *et* β*. Le schéma est-il explicite ou implicite ?*

Question 11. *Résoudre numériquement le schéma et tracer la solution. Qu'observez-vous ?*

1.4 Cas d'une vitesse variable, avec diffusion (v variable, $k = 0.01$) - Schéma upwind simplifié

On suppose la vitesse du vent variable en temps et le coefficient de diffusion non nul ; on prendra pour cette question

$$\forall x,\ \forall t,\ \boxed{v(x,t) = 5\ \cos(\pi t)\sqrt{t}, \quad k = 0.01.}$$

Pour résoudre l'équation (1) dans le cas d'une vitesse variable, on va utiliser une simplification du schéma numérique appelé schéma upwind. On le définit en approchant la dérivée partielle $\frac{\partial(vc)}{\partial x}$ par :

$$\frac{\partial(vc)}{\partial x} \approx v_j^n \times \begin{cases} c_{j+1}^n - c_j^n & \text{si } v_j^n < 0, \\ c_j^n - c_{j-1}^n & \text{si } v_j^n > 0. \end{cases}$$

Question 12. *Ecrire le schéma numérique que l'on obtient. Implémenter le schéma upwind simplifié et tracer la solution obtenue. Attention, ici on prendra* $\boxed{\Delta t = 0.01 \quad \Delta x = 0.2.}$

2 Evolution de la température du châlet (*FreeFem++*)

2.1 Description de la géométrie de la pièce

On considère l'intérieur du châlet, représenté sur la figure 2. Il s'agit d'une grande pièce de forme rectangulaire, dont l'intérieur est constitué d'une fenêtre et d'une cheminée circulaire située au centre de la pièce. Un suppose que le bord inférieur gauche de la pièce est au point $(0, 0)$. La pièce est un rectangle de longueur $L_1 = 10$, de largeur $L_2 = 7$. La longueur de la fenêtre est de $L_3 = 8$, on suppose qu'elle rentre d'une épaisseur $h_0 = 0.5$ dans la pièce. La cheminée est un cercle de rayon $R_0 = 0.5$, et le centre de coordonnées $(x_0, y_0) = (8, 3.5)$.

On suppose de plus que tous les habitants du châlet sont assis sur un divan, schématisé par un cercle de rayon $R_1 = 0.5$, centré en $(x_1, y_1) = (6, 4.5)$.

2.2 Conditions aux limites

On notera Γ_F la surface de la fenêtre en contact avec l'intérieur de la pièce, Γ_C la frontière circulaire de la cheminée, et Γ_M la surface constituée de la réunion des murs. Ω désignera l'ouvert constitué de l'intérieur de la pièce. Soit Γ l'une de ces trois surfaces. Nous pouvons choisir :

1. soit une condition de type Dirichlet : on impose une valeur fixée pour la température T sur Γ.
2. soit une condition de type Neumann : on impose la valeur du flux de chaleur $\mathbf{n} \cdot \nabla T$ sur Γ ;
3. soit une condition de type Fourier-Robin : on impose la valeur de la quantité mixte $T + \lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T$ sur Γ (où λ est une constante réelle, dans la suite égale à 1).

Sur la fenêtre Γ_F et la cheminée Γ_C, nous ferons toujours l'hypothèse de conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} T = T_{\text{Froid}} = -5^o C \text{ sur } \Gamma_F, \\ T = T_{\text{Chaud}} = +50^o C \text{ sur } \Gamma_C. \end{cases}$$

En revanche nous faisons varier les conditions aux limites sur les murs :
- Condition (A) : on prend sur Γ_M une condition de Dirichlet, $T = T_{\text{Froid}}$.
- Condition (B) : on prend sur Γ_M une condition de Neumann, $\mathbf{n} \cdot \nabla T = g = -16$.
- Condition (C) : on prend sur Γ_M une condition de Fourier-Robin, $T + \mathbf{n} \cdot \nabla T = h = 20$.

2.3 Problème stationnaire

La température T est solution de l'équation de Laplace :

$$\Delta T = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Question 13. *Tracer les contours de la pièce et le maillage ; afficher le résultat avec FreeFem++. (Un exemple de construction de maillage est donné à la fin du problème.)*

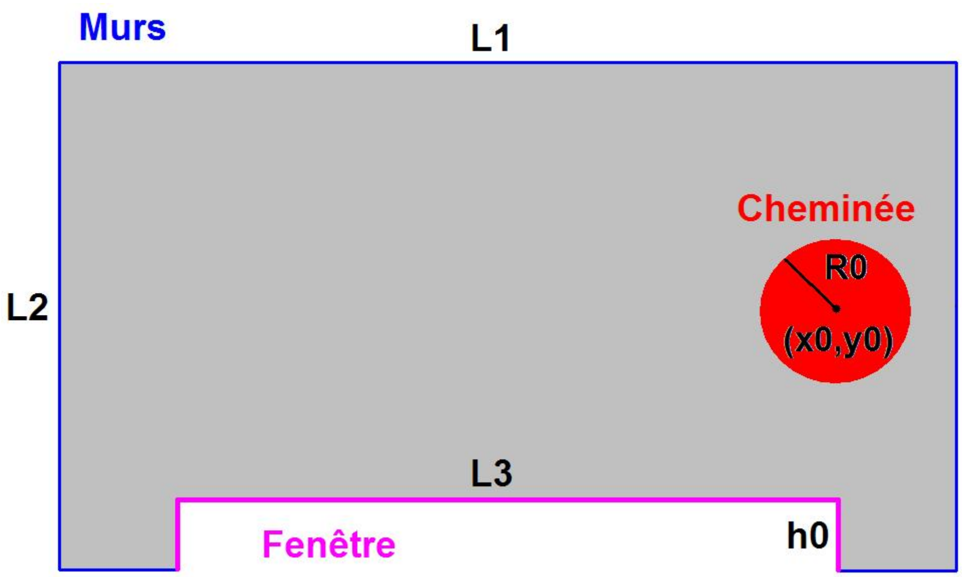

FIG. 2 – Géométrie du châlet

Conditions de Dirichlet

Question 14. *Ecrire la formulation variationnelle du problème de Laplace avec condition aux limites (A). On explicitera la forme bilinéaire a_A et la forme linéaire l_A associées. On mettra donc le problème sous la forme, V étant l'espace convenablement choisi :*

$$\textit{Trouver } T \in V, \quad \forall S \in V, \quad a_A(T,S) = l_A(S).$$

Question 15. *Calculer numériquement la solution T_{SA} à l'aide de FreeFem++. Calculer numériquement la valeur moyenne $T_{moy,A}$ de la température T_{SA} dans le cercle de centre (x_1, y_1) et de rayon R_1.*

Conditions de Dirichlet-Neumann

Question 16. *Ecrire la formulation variationnelle du problème de Laplace avec condition aux limites (B). On explicitera la forme bilinéaire a_B et la forme linéaire l_B associées.*

Question 17. *Calculer numériquement la solution T_{SB} à l'aide de FreeFem++. Calculer numériquement la valeur moyenne $T_{moy,B}$ de la température T_{SB} dans le cercle de centre (x_1, y_1) et de rayon R_1.*

Conditions de Dirichlet-Robin

Question 18. *Ecrire la formulation variationnelle du problème de Laplace avec condition aux limites (C). On explicitera la forme bilinéaire a_C et la forme linéaire l_C associées.*

Question 19. *Calculer numériquement la solution T_{SC} à l'aide de FreeFem++. Calculer numériquement la valeur moyenne $T_{moy,C}$ de la température T_{SC} dans le cercle de centre (x_1, y_1) et de rayon R_1.*

2.4 Problème transitoire

Soit T la température solution de l'équation de la chaleur dans la pièce :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = 0 \text{ dans } \Omega,$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet (A). On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, la température est constante égale à T_{Froid}.

Pour la résolution numérique, on choisit un schéma semi-discrétisé en temps. On effectue la discrétisation en temps par une méthode d'Euler rétrograde : T^n ayant été calculé à l'itération précédente, on cherche T^{n+1} solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} - \Delta T^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ T^{n+1} = T_{\text{Froid}} \text{ sur } \Gamma_F, \\ T^{n+1} = T_{\text{Chaud}} \text{ sur } \Gamma_C, \\ T^{n+1} = T_{\text{Froid}} \text{ sur } \Gamma_M. \end{cases} \tag{7}$$

Question 20. *Ecrire la formulation variationnelle du problème semi-discrétisé.*

Question 21. *Calculer numériquement la solution T_t à l'aide de FreeFem++. On arrêtera la boucle en temps lorsque le régime permanent semblera établi, i.e. lorsque la température T_t sera “ visuellement “ proche de la température T_{SA}. On prendra ici comme pas de temps $dt = 0.1$.*

Question 22. *On cherche à savoir à partir de quel instant $t_n = n * \Delta t$ la température dépasse, en moyenne, $T_c = 10^o C$ dans le cercle délimitant le divan.*

Indication : on cherchera t_n par une méthode de dichotomie.

1. Trouver un encadrement de la valeur cherchée : on cherchera t^0_{min} et t^0_{max} tels que
$$t^0_{\text{min}} \leq t_c \leq t^0_{\text{max}}$$
2. Connaissant t^n_{min} et t^n_{max}, poser
$$t^{n+1} = \frac{t^n_{\text{min}} + t^n_{\text{max}}}{2},$$
et calculer l'intégrale de la température $T(t^n)$:
$$\text{Int}_{T(t^n)} = \int_{\text{Divan}} |T(t^n)(x)|^2 \, dx.$$
3. Si $T(t^n) \leq T_c$, poser $t^{n+1}_{\text{min}} = t^n$, $t^{n+1}_{\text{max}} = t^n_{\text{max}}$.
4. Sinon, poser $t^{n+1}_{\text{min}} = t^n_{\text{min}}$, $t^{n+1}_{\text{max}} = t^n$.
5. On s'arrêtera lorsque l'écart $t^n_{\text{min}} - t^n_{\text{max}}$ sera inférieur à 10^{-3}.

Question 23. *Reprendre les questions précédentes en prenant les conditions aux limites (B). La température augmente-t-elle ou diminue-t-elle dans le cercle délimitant le divan au cours des itérations ? A partir de quel instant la température descend-elle, en moyenne dans ce cercle, en-dessous de $T_c = -7^o C$?*

2.5 Indications techniques pour FreeFem++

Construction du maillage Voici le script pour définir une pièce en forme de cercle avec un carré à l'intérieur (Nb1 et Nb2 sont le nombre de points de discrétisation, respectivement sur un bord du carré et sur le bord du cercle) :

```
int Nb1 = 50;
int Nb2 = 120;
real R0 = 2;
real x0 = 0.5;
real y0 = 0.5;
border a(t=0,1) { x=t; y=0; }
border b(t=0,1) { x=1; y=t; }
border c(t=1,0) { x=t; y=1; }
border d(t=1,0) { x=0; y=t; }
border e(t=0,2*pi) { x=x0 + R0*cos(t); y=y0 + R0*sin(t); }

mesh Th=buildmesh( a(Nb1)+b(Nb1)+c(Nb1)+d(Nb1)+e(Nb2) );
plot(Th,wait=1);
```

Vous adapterez cet exemple pour tracer les contours de la pièce.

Label des bordures Lorsque vous avez besoin de connaître le label associé à chaque bord de frontière, souvenez-vous que FreeFem++ numérote les fronctières dans l'ordre où vous les avez introduites en créant le maillage. Dans l'exemple ci-dessus, la frontière a porte le label 1, la frontière b porte le label 2, etc.

Fonction caractéristique du cercle où se tiennent les habitants Pour implémenter la fonction caractéristique du cercle de centre (x_1, y_1) et de rayon R_1 et calculer l'aire de ce cercle, ajouter les lignes suivantes :

```
func chi=( (x-x1)*(x-x1)+(y-y1)*(y-y1) < R1 );
Vh chih=chi;
cout « " Integrale(Caracteristique) = " « int2d(Th)(chih) « endl;
```