Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 431
Problèmes aux valeurs propres non-linéaires

Sujet proposé par Eric Cancès (cances@cermics.enpc.fr)

Soit $\Omega =]0,1[^d$, avec $d = 1$, 2 ou 3. Soit $V \in C^0(\overline{\Omega})$ et $\mu \in \mathbb{R}_+$. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on pose

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega V v^2 + \frac{\mu}{4}\int_\Omega v^4.$$

On peut montrer que l'espace $H_0^1(\Omega)$ est inclus dans l'espace $L^4(\Omega)$ des fonctions v mesurables telles que $\int_\Omega |v|^4 < \infty$. Ceci montre que la fonction E est bien définie pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. De plus, si on munit $L^p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ de la norme

$$\|v\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |v|^p\right)^{1/p},$$

l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est continue pour tout $1 \le p \le 6$ (pour $d \le 3$).

On considère le problème d'optimisation

$$I = \inf\left\{E(v),\ v \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega v^2 = 1\right\}. \tag{1}$$

On peut montrer que le problème (1) admet exactement deux solutions u et $-u$, u étant une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et strictement positive sur Ω. D'un point de vue physique, $|u|^2$ modélise la densité de l'état fondamental d'un condensat de Bose-Einstein confiné par un potentiel prenant la valeur V dans Ω et $+\infty$ en dehors de Ω ; μ modélise l'interaction (répulsive pour $\mu > 0$) entre les bosons formant le condensat.

Etude théorique

On note u l'unique solution de (1) positive sur Ω.

Question 1. Montrer que E est différentiable en u et calculer $E'(u)$.

Question 2. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que

$$-\Delta u + Vu + \mu u^3 = \lambda u. \tag{2}$$

Question 3. En adaptant la preuve du Théorème 7.3.5 du cours [1], montrer qu'il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k\ge1}$ de réels qui tend vers $+\infty$, et une base hilbertienne $(u_k)_{k\ge1}$ de $L^2(\Omega)$ telle que chaque u_k appartienne à $H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$-\Delta u_k + Vu_k + \mu u^2 u_k = \lambda_k u_k. \tag{3}$$

On peut montrer que le réel λ introduit à la question 2 est en fait la plus petite valeur propre de l'opérateur $-\Delta + V + \mu u^2$, et que cette valeur propre est simple (autrement dit que $\lambda = \lambda_1$ et que $u = \pm u_1$).

On s'intéresse au calcul d'approximations numériques de I, u et λ par la méthode des éléments finis. Soit V_h un sous-espace de dimension finie N_h de l'espace $V = H_0^1(\Omega)$, $(\phi_{h,j})_{1\leq j\leq N_h}$ une base de V_h, et

$$I_h = \inf \left\{ E(v_h),\ v_h \in V_h,\ \int_\Omega v_h^2 = 1 \right\}. \tag{4}$$

Question 4. Montrer que (4) possède un minimiseur u_h vérifiant $\int_\Omega u_h \geq 0$. Soit $U_h \in \mathbb{R}^{N_h}$ tel que

$$\forall x \in \Omega, \quad u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} [U_h]_j \phi_{h,j}(x).$$

Montrer qu'il existe $\lambda_h \in \mathbb{R}$ tel que U_h soit solution d'un problème aux valeurs propres généralisé non-linéaire de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{U_h} U_h = \lambda_h M_h U_h \\ U_h^T M_h U_h = 1 \end{array} \right. \tag{5}$$

où U_h^T est le vecteur ligne transposé du vecteur colonne U_h, où M_h est une matrice symétrique réelle définie positive, et où A_{U_h} est une matrice symétrique réelle dépendant de U_h. Exprimer les coefficients des matrices M_h et A_{U_h} en fonction des fonctions $(\phi_{h,j})_{1\leq j\leq N_h}$ et du vecteur U_h.

On cherchera une solution de (4) en résolvant le problème (6) par l'algorithme itératif suivant :

- initialisation : choisir un vecteur $U_h^0 \in \mathbb{R}^{N_h}$;
- itérations : pour chaque $n \in \mathbb{N}$, assembler la matrice $A_{U_h^n}$ et résoudre le problème aux valeurs propres généralisé *linéaire*

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{U_h^n} V_h = \lambda_h M_h V_h \\ V_h^T M_h V_h = 1 \end{array} \right. \tag{6}$$

  Prendre pour U_h^{n+1} un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre du problème ci-dessus et tel que

$$\sum_{j=1}^{N_h} [U_h^{n+1}]_j \int_\Omega \phi_j \geq 0.$$

Pour simplifier, on supposera désormais que $V = 0$.

I - Etude de convergence en dimension 1

On considère le cas où $d = 1$. Pour $N_h \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = \frac{1}{N_h+1}$, $x_j = jh$, et on prend pour V_h l'espace

$$V_h = \left\{ v \in C^0([0,1]) \text{ tel que } v|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } 0 \leq j \leq N_h \text{ et } v(0) = v(1) = 0 \right\}.$$

Question 5. Ecrire un programme SCILAB permettant de résoudre le problème (4) par la méthode décrite ci-dessus. Ce programme devra effectuer le calcul pour

$$N_h = 7, \quad N_h = 15, \quad N_h = 23, \quad N_h = 39, \quad N_h = 47, \quad N_h = 59, \quad N_h = 79$$

(noter que $N_h + 1$ est un diviseur de 240 pour tous les nombres de cette liste) et fournir comme sorties pour chacune des valeurs ci-dessus de N_h :

- une approximation λ_h de la valeur du réel λ introduit à la question 2 ;
- la valeur de I_h (on pourra remarquer que $\lambda_h = \int_\Omega |\nabla u_h|^2 + \mu \int_\Omega u_h^4)$;
- des approximations des erreurs $\|u - u_h\|_{L^2}$, $\|u - u_h\|_{H^1}$, $|I - I_h|$, $|\lambda - \lambda_h|$, obtenues en prenant comme solution de référence la solution numérique correspondant à $N_h = 239$.

Vérifier que si on choisit $U_0^h = 0$, l'algorithme itératif converge si μ est assez petit, mais diverge si μ est trop grand.

Question 6. Chosir $\mu > 0$ pas trop grand. Tracer les erreurs $\|u - u_h\|_{L^2}$, $\|u - u_h\|_{H^1}$, $|I - I_h|$, $|\lambda - \lambda_h|$ en fonction de h en échelles log-log. Estimer la vitesse de convergence de ces diverses mesures de l'erreur.

II - Etude en dimension 2

On considère le cas où $d = 2$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{N+1}$, et on note $\mathcal{T}_h$ le maillage uniforme de Ω comprenant $2(N+1)^2$ triangles et construit sur le modèle du maillage représenté sur la Figure 6.12 du cours [1]. On considère l'espace d'approximation

$$V_h = \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{K_i} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h \text{ et } v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Pour simplifier, on se limitera au cas où $\mu = 0$ (pour lequel on connaît la solution exacte du problème : $u(x, y) = 2\sin(\pi x)\sin(\pi y)$).

Question 7. Ecrire un programme FREEFEM++ permettant de résoudre le problème (4). Ce programme devra effectuer le calcul pour

$$N = 5, \quad N = 10, \quad N = 20, \quad N = 40, \quad N = 80, \quad N = 160,$$

et fournir comme sorties :

- une approximation λ_h de la valeur du réel λ introduit à la question 2 (qui vaut $2\pi^2$ lorsque $\mu = 0$) ;
- les erreurs $\|u - u_h\|_{L^2}$, $\|u - u_h\|_{H^1}$ et $|\lambda - \lambda_h|$.

Question 8. Tracer les erreurs $\|u-u_h\|_{L^2}$, $\|u-u_h\|_{H^1}$, $|\lambda-\lambda_h|$ en fonction de h en échelles log-log. Estimer la vitesse de convergence de ces diverses mesures de l'erreur.

Question 9 (facultative). Reprendre les deux questions précédentes en prenant pour espace d'approximation l'espace

$$V_h = \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{K_i} \in \mathbb{P}_2 \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h \text{ et } v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Références

[1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Ecole Polytechnique, Edition 2009.